2020年度

信州大学大学院 総合理工学研究科
理学専攻

一般選抜 第Ⅱ期 学力試験問題

専門科目(理科学分野 物理学ユニット)

解答時間　13:00 ～ 16:00

解答するときの注意事項

1. 5問中4問を選択して解答せよ。
2. 解答用紙は1問につき1枚を使用し，白紙の場合でも必ず4枚提出すること。
3. 各解答用紙には選択した問題番号と受験番号を必ず記入すること。
4. 必要ならば解答用紙の裏面を使用してもよい。

$\boxed{1}$ 図 1 のように，水平方向に距離 a，鉛直方向に距離 h だけ離れた位置にある標的 P に，質量 m の質点を投げて当てることを考える。質点の初速度を $\vec{v}_0$，重力は図の鉛直下向きに重力加速度の大きさ g ではたらき，空気の抵抗は無視できるとして以下の問いに答えよ。ただし，運動は同一面内で起きているとする。また，水平方向から反時計回りに測った $\vec{v}_0$ の角度を θ_0 とする。

(1) 質点が運動する平面内に直交座標系を設けて，運動方程式を書き下せ。その際に，x 軸，y 軸，原点をどのように選んだか明記せよ。

(2) 質点が P に当たるときの $\tan\theta_0$ を求めよ。

(3) 質点が P に当たる $\vec{v}_0$ の大きさ $(v_0 = |\vec{v}_0|)$ の下限を $v_{\min}$ として，$v_0 = v_{\min}$ のときの $\tan\theta_0$ を a と h で表せ。

(4) $v_{\min}$ に比べて v_0 が十分に大きい $(v_0 \gg v_{\min})$ ときの $\tan\theta_0$ の極限を求め，その極限について物理的に説明せよ。

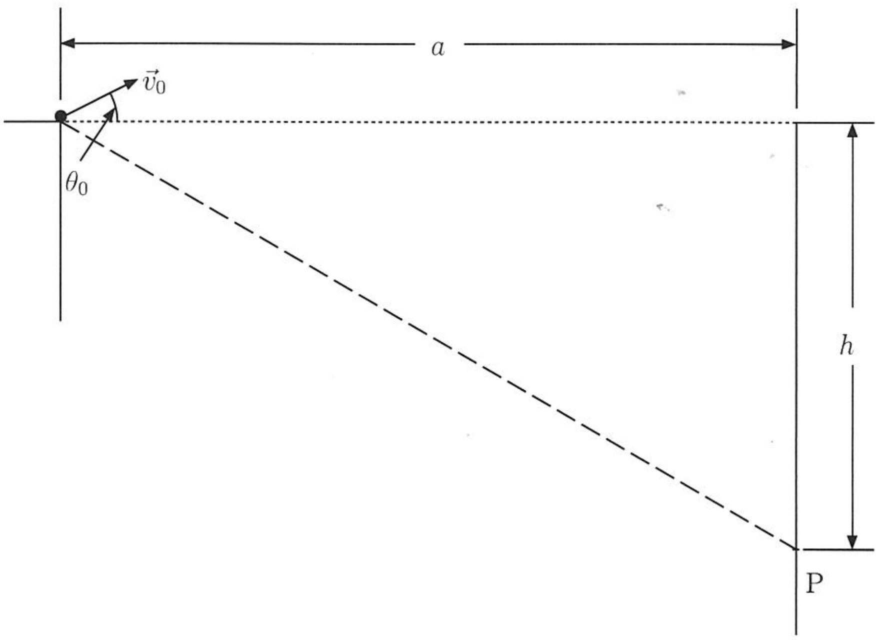

図 1

$\boxed{2}$ 真空の透磁率を μ_0 として，以下の問いに答えよ。

(1) z 軸上の線分 AB を z 軸の正の向きに流れる大きさ I の電流が，点 P $(r, 0, 0)$ につくる磁束密度を，図 2 の角 θ_{A}，θ_{B} を用いてビオ・サバールの法則から求めよ。

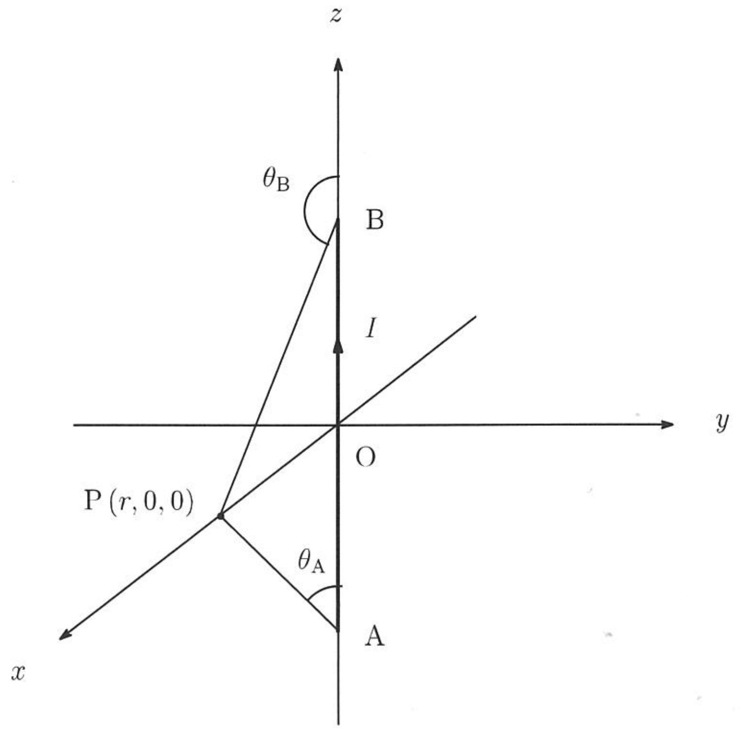

図 2

(2) 点 A $(0, 0, a)$ に電荷 Q，点 B $(0, 0, b)$ に電荷 $-Q$ があって，AB 間を直線の導線でつないだら，大きさ I の電流が流れた。このとき，マクスウェル・アンペールの法則を用いて，点 P $(r, 0, 0)$ に生じる磁束密度を求めよ。ただし，$a < 0 < b$ とする。また，この結果は，(1) の結果と一致することを示せ。

$\boxed{3}$ ハミルトニアン H が

$$Q = \sigma_+ \left(-i\frac{d}{dx} - iW(x) \right), \quad Q^\dagger = \sigma_- \left(-i\frac{d}{dx} + iW(x) \right)$$

を用いて，

$$H = \frac{1}{2}\left(QQ^\dagger + Q^\dagger Q \right)$$

のように与えられている。ここで，σ_+ および σ_- は

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である。以下の問いに答えよ。

(1) Q^2 および ${Q^\dagger}^2$ を計算せよ。

(2) $[Q, H]$ および $[Q^\dagger, H]$ を計算せよ。ここで，$[A, B] = AB - BA$ である。

(3) H の固有値は 0 以上であることを示せ。

(4) H の固有関数 $\psi_{\mathrm{B}}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi(x) \end{pmatrix}$ に対して，$Q^\dagger \psi_{\mathrm{B}}(x)$ を計算せよ。

(5) $\psi_{\mathrm{B}}(x)$ を固有関数とする H の固有値が $E(> 0)$ のとき，$\psi_{\mathrm{F}}(x) = Q\psi_{\mathrm{B}}(x)$ で与えられた $\psi_{\mathrm{F}}(x)$ も H の固有関数になることを示すとともに，その固有値を求めよ。

(6) $\psi_{\mathrm{B}}(x)$ を固有関数とする H の固有値が 0 のとき，$Q\psi_{\mathrm{B}}(x) = 0$ が成り立つ。このとき，$\phi(x)$ が満たす微分方程式を書き下し，その一般解を求めよ。

(7) $W(x) = \mu x^2$ のとき，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)|^2 dx < \infty$ を満たすような $Q\psi_{\mathrm{B}}(x) = 0$ の解が存在しないことを示せ。ここで，μ は 0 ではない実定数とする。

(8) H を $W(x)$ を含んだ行列の形で書き下せ。

(9) $W(x) = \lambda x$ のとき，H の固有値を求めよ。ここで，λ は 0 ではない実定数とする。必要に応じて，$-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2}{dx^2} + \dfrac{1}{2}m\omega^2 x^2$ の固有値が $\hbar\omega\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ であることを参考にせよ。

(10) $W(x) = \lambda x$ のとき，H の固有値が 0 である規格化された固有関数を求めよ。ここで，λ は 0 ではない実定数とする。必要に応じて，$-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2}{dx^2} + \dfrac{1}{2}m\omega^2 x^2$ の基底状態の規格化された固有関数が $\left(\dfrac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\dfrac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)$ であることを参考にせよ。

$\boxed{4}$ 3次元理想ボース気体について考えよう。ボース粒子のスピンは0であるとし，さらに巨視的なサイズの系の性質を考えるために，ボース粒子の状態には周期的境界条件を課すとする。ボース粒子の質量を m，周期的境界条件で用意した大きな立方体の箱の体積を $V(=L^3)$，プランク定数を h，ボルツマン定数を k_{B}，逆温度を $\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$（$T$ は系の絶対温度）として，以下の問いに答えよ。ただし，解答するにあたり必要な物理量は定義して用いよ。

(1) 一つのボース粒子のエネルギーを書け。

(2) 一つのエネルギー準位を占有する平均粒子数（ボース分布関数）を書け。

(3) エネルギー ε と $\varepsilon + d\varepsilon$ の間に含まれる一粒子エネルギー準位の個数を $D(\varepsilon)d\varepsilon$ としたとき，この $D(\varepsilon)$ をエネルギー状態密度という。最低エネルギー準位を除いたエネルギー領域で $D(\varepsilon)$ を求めよ。

(4) この系の内部エネルギー U が，

$$U = \frac{3}{16}V\left(\frac{8\pi m}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}\beta^{-\frac{5}{2}}\phi(5/2, z)$$

で与えられることを示せ。ただし，$\phi(5/2, z)$ はアッペル関数で

$$\phi(s, z) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t z^{-1} - 1}dt$$

のように定義する。ここで，$\Gamma(s)$ はガンマ関数で $\Gamma(5/2) = 3\sqrt{\pi}/4$ である。さらに，化学ポテンシャルを μ として，$z = e^{\beta\mu}$ とする。

(5) この系の圧力 P が，

$$P = \left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}\beta^{-\frac{5}{2}}\phi(5/2, z)$$

で与えられることを示せ。

(6) 上の (4) および (5) の結果を用いて，P と V と U の間に成り立つ関係式を導け。

(7) 絶対零度において，この系の圧力はどうなるか。3次元理想フェルミ気体の場合と比較して答えよ。

5 以下の問い (1)，(2)，(3) に答えよ。

(1) 以下の文章の空欄を埋めよ。

高電圧で加速された $\boxed{\text{あ}}$ が，陽極となるターゲットの金属に衝突するとX線が発生する。このX線は $\boxed{\text{い}}$ X線と $\boxed{\text{う}}$ X線に分類することができる。$\boxed{\text{い}}$ X線は，加速された $\boxed{\text{あ}}$ がターゲットの金属に衝突し減速されるときに失うエネルギーが放出されること（これを $\boxed{\text{え}}$ と呼ぶ）により発生するX線であるので，スペクトルは $\boxed{\text{い}}$ となる。X線管の電圧をある臨界電圧より高くすると，スペクトルのある波長の位置に $\boxed{\text{お}}$ が現れる。これが $\boxed{\text{う}}$ X線である。$\boxed{\text{う}}$ X線の波長はメートルを単位として，$\boxed{\text{か}}$ のオーダーであり，$\boxed{\text{き}}$ ごとに異なる値をとる。

(2) 結晶構造がわかっている単結晶試料について，その結晶面（ミラー指数）が知りたいとき，$\boxed{\text{い}}$ X線と，$\boxed{\text{う}}$ X線のどちらを用いてどのように実験し解析をすればよいか。実験概略図を示して説明せよ。

(3) ある単体金属の粉末試料について，その格子定数が知りたいとき，$\boxed{\text{い}}$ X線と，$\boxed{\text{う}}$ X線のどちらを用いてどのように実験し解析をすればよいか。実験概略図を示して説明せよ。