2026年度

信州大学大学院 総合理工学研究科

理学専攻

一般選抜 第Ⅱ期 学力試験

専門科目 (理科学分野 物理学ユニット)

解答時間　13:00 ～ 16:00

解答するときの注意事項

1. 解答用紙は，各問につき1枚使用し，白紙の場合でも必ず4枚提出すること。
2. 解答用紙には受験番号を必ず記入すること。
3. 必要ならば解答用紙の裏面を使用してもよい。

$\boxed{1}$

[A] 滑らかな水平面上に置かれたばね定数 k の軽いばねの一端に，質量 m の質点を取り付け，他端を固定する。ばねが自然長のときの質点の位置を原点とし，ばねの伸びる方向に x 軸をとり，時刻 t での質点の位置を $x(t)$ とする。$t=0$ で質点を $x=x_0\ (x_0>0)$ の位置まで移動させ，静かに手を放すことを考える。質点には速度に比例する抵抗力が働くとする。

(1) 質点に働く抵抗力を $-2m\gamma\dfrac{dx}{dt}$ とおき，質点の運動方程式を書け。ただし γ は正の定数とする。

(2) γ が小さいとき，この質点は減衰振動をするが，γ がある臨界値より大きくなると，振動せず過減衰運動となる。この臨界値 γ_0 を求めよ。

(3) γ が (2) で求めた臨界値 γ_0 にちょうど等しいとき，位置 x を求めよ。

(4) (3) で求めた x の時間変化の概形を描け。

[B] 図 1 のように，滑らかな板が水平に固定されており，その板にあけられた小さい孔に長さ l の糸を通し，板上の糸の端に質量 m_1 の質点 1 を取り付ける。板下の糸の他端には質量 m_2 の質点 2 を取り付け，孔の下に鉛直に垂れ下げた後，質点 1 を板上で運動させる。ただし，孔は滑らかであるとし，糸は軽く滑らかで，糸がたるまない状況を考えるとする。

(1) 図 1 のように，孔の位置を原点 O とし，板上に出ている糸の長さを r，角度を φ として質点 1 の位置を極座標 (r,φ) で表すとする。この系のラグランジアンを求めよ。ただし，重力によるポテンシャルエネルギーの基準は原点 O にとり，重力加速度の大きさを g とせよ。

(2) (1) で求めたラグランジアンより，r および φ についての運動方程式をそれぞれ求めよ。

(3) 質点 1 に適当な初速度を与えて運動させると，板上で半径 r_0 の等速円運動をした。このときの角速度の大きさ ω_0 を求めよ。

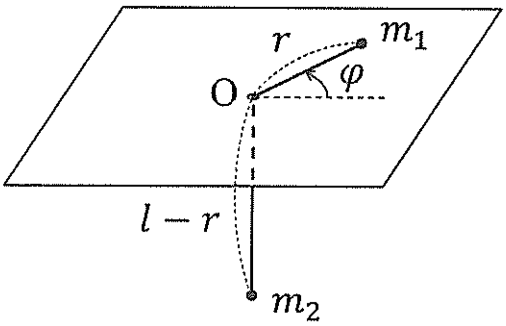

図 1

2 マクスウェル方程式

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{J}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

から出発してプラズマ中の電磁波伝搬を考える。ここで $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{J}$, ρ はそれぞれ，電場，磁場，電束密度，磁束密度，電流密度，電荷密度を表す。プラズマは完全に電離し，数密度 n でそれぞれ一様に分布する陽子と電子からなり，任意の位置で電気的に中性 $(\rho = 0)$ としてよい。電磁波によって質量 m で電荷 $-e$ の電子は運動するが，陽子は重く動かないとする。プラズマ中の構成方程式は

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}$$

とする。ε_0 と μ_0 はそれぞれ真空の誘電率と透磁率である。

[A] プラズマ中の電場と電流の関係を考える。

(1) マクスウェル方程式から $\boldsymbol{E}$ に関する以下の方程式を導け。必要なら任意のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対する $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{V}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{V}) - \nabla^2 \boldsymbol{V}$ の関係を用いてよい。

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t}$$

(2) 単位体積中で，$\boldsymbol{J}$ に対して $\boldsymbol{E}$ が単位時間になす仕事は $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J}$ である。マクスウェル方程式から，$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J}$ がポインティングベクトル $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ と，電磁場のエネルギー密度 $U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2}\mu_0 \boldsymbol{H}^2$ の時間微分 $\dfrac{\partial U}{\partial t}$ を用いて表されることを示せ。必要なら任意のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ と $\boldsymbol{W}$ に対する $\nabla \cdot (\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{W}) = \boldsymbol{W} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{V}) - \boldsymbol{V} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{W})$ の関係を用いてよい。

(3) 電子の速度を $\boldsymbol{v}$ として電磁場中の電子の運動方程式を書け。ただし，電子は衝突なく運動するものとする。

(4) 電子に対する磁場の影響を無視したとき，プラズマ中の電子の平均速度を $\langle \boldsymbol{v} \rangle$ として，電磁波によって誘起される電流 $\boldsymbol{J}$ の時間微分 $\dfrac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t}$ を $\boldsymbol{E}$ を用いて表せ。

[B] プラズマ中の電磁波が z 方向に伝搬する単色平面波で，電場と磁束密度はそれぞれ x 方向と y 方向のベクトル成分のみを持ち，電場の x 成分が複素数表示を用いて，

$$E_x = E_0 \exp\{i(kz - \omega t)\}$$

で表されるとする。ここで，E_0, k および ω は定数で，それぞれ振幅，波数および角周波数を表す。電子は衝突なく運動するものとし，電子に対する磁場の影響は無視する。

(1) 電場 E_x とそれに伴う電流 J_x に $J_x = \tilde{\sigma} E_x$ の関係があるとして，複素電気伝導度 $\tilde{\sigma}$ を求めよ。

(2) k と ω の関係が

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left(1 - \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega^2}\right)$$

という形で書けることを示せ。また ω_{p} を n, e, m, ε_0 を用いて表せ。ここで，c は真空中の光速で，ω_{p} はプラズマ周波数と呼ばれる物理量である。

(3) プラズマ中を電磁波が伝搬するための条件を述べ，そのときの電磁波の位相速度を ω_{p} を用いて表せ。

(4) 前問の条件を満たさない電磁波がこのプラズマに入射したとき，何が生じるかを説明せよ。

(5) プラズマ中を伝搬する電磁波が，プラズマ中の電子になす仕事の時間平均 $\langle \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} \rangle$ を求めよ。

$\boxed{3}$

座標を x $(-\infty < x < \infty)$，運動量を p とし，ハミルトニアン H が

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + V(x)$$

で与えられる量子力学系を考える。m は質量，$V(x)$ はポテンシャルで，換算プランク定数を $\hbar$ とする。

[A] (1) 時刻 t での波動関数 $\psi(t,x)$ が満たす Schrödinger 方程式を，H を用いて書け。

(2) $\psi(t,x) = e^{-iEt/\hbar}\phi(x)$ (E は定数でエネルギー) として，時刻に依らない波動関数 $\phi(x)$ が満たす Schrödinger 方程式を，H と p を用いずに書け。

(3) 規格化可能な状態に関して，演算子 A の期待値を $\langle A\rangle$ とする。その状態の波動関数を $\phi(x)$ として，$\langle A\rangle$ を与える式を書け。ただし，$\phi(x)$ は規格化されているとは限らない。

(4) エルミート演算子 A に対して，$\Delta A = \sqrt{\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2}$ とする。$\left\langle \left(A - \langle A\rangle\right)^2 \right\rangle$ を ΔA を用いて表せ。

[B] A, B をエルミート演算子，$\phi(x)$ を規格化可能な状態の波動関数，λ を実数とする。波動関数 $(\lambda A - iB)\phi(x)$ のノルムは 0 以上なので，

$$\langle A^2\rangle\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \langle B^2\rangle \geq 0$$

という不等式が全ての実数 λ に対して成立する。

(1) α を求めよ。

(2) α が実数であることを示せ。

(3) 上の不等式が全ての実数 λ に対して成立する条件を求めよ。

(4) (3) の答えで $A = x - \langle x\rangle$, $B = p - \langle p\rangle$ とすることにより，Δx と Δp に対して成立する関係式を導け。

[C] ポテンシャル $V(x)$ が

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x(x+b)$$

の場合を考える。ω, b は実定数で，$\omega > 0$ とする。

(1) 波動関数 $\phi_0(x) = \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x(x+b)\right)$ が H の固有関数であることを示し，そのエネルギー固有値 E_0 を求めよ。

(2) $\phi_0(x)$ で表される状態に関する x の期待値 $\langle x \rangle$ を求めよ。

(3) 波動関数 $\phi_1(x) = (x+c)\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x(x+b)\right)$ が H の固有関数となるような定数 c を求めよ。また，そのエネルギー固有値 E_1 を求めよ。

4 質量 m の同種粒子 N 個が図 1 のような底面積 S, 高さ L の直方体の容器の中に入っている。粒子は古典力学で扱えるとし，粒子間に相互作用はないとする。また，容器は温度 T の熱源の中にあり全体は熱平衡状態とする。重力加速度の大きさを g として，重力がこの系に与える影響について考える。重力は z 軸の負の向きに働いているとし，容器の一辺が z 軸に平行で，z 軸に垂直な容器の 2 つの面は $z=0$ と $z=L$ とする。Boltzmann 定数を k_{B}，Planck 定数を h とする。

[A] この系の分配関数 $Z_N(T)$ について考える。

(1) この系の重力によるポテンシャルエネルギー Φ を書け。j 番目の粒子の位置座標を (x_j, y_j, z_j) とし，$z=0$ をポテンシャルエネルギーの原点とする。

(2) $Z_N(T)$ が次の式で与えられることを示し，定数 λ を m, h, g, L のうち必要なものを用いて表せ。ただし $\beta = \frac{1}{k_{\mathrm{B}}T}$ とする。

$$Z_N(T) = \frac{\lambda^N \beta^{-\frac{5N}{2}} S^N}{N!} \left\{1 - \exp\left(-\beta m g L\right)\right\}^N$$

[B] この系の熱力学量について考える。λ を用いてもよい。

(1) この系の Helmholtz 自由エネルギー F を求めよ。$N \gg 1$ のとき $N! \sim \sqrt{2\pi N}\left(\dfrac{N}{\mathrm{e}}\right)^N$ としてよい。ただし熱力学的極限を取ること。このとき $N \to \infty$ とするとき，同時に $S \times L \to \infty$ とするが，z の値が等しい同一平面上で $\dfrac{S}{N}$ は有限の一定値に収束するとする。

(2) この系の内部エネルギー U を求めよ。

(3) 重力の影響が小さい ($\beta m g L \ll 1$) とき，前問の U が重力がないときの理想気体の内部エネルギーで近似できることを示せ。

[C] この系の圧力について考える。

(1) 容器の $\sigma \leqq z < \sigma + \varepsilon$ $(0 \leqq \sigma < L, \varepsilon \ll \sigma)$ となる薄い領域 Σ(図の網掛けの 2 枚の面で挟まれた領域) 中の粒子数 $n(\sigma)$ を，デルタ関数 $\delta(x)$ を用いて

$$n(\sigma) = \sum_{j=1}^{N} \varepsilon \delta(\sigma - z_j)$$

として，$n(\sigma)$ の統計力学的期待値 $\langle n(\sigma) \rangle$ を計算すると

$$\langle n(\sigma) \rangle = N\beta\xi\varepsilon \frac{\exp(-\beta m g \sigma)}{1 - \exp(-\beta m g L)}$$

となる。定数 ξ を求めよ。

(2) 領域 Σ における平均圧力を $P(\sigma)$, Σ の体積を V_Σ として，Σ 内で $P(\sigma)V_\Sigma = \langle n(\sigma)\rangle k_\mathrm{B}T$ が成り立つとする。重力の影響が小さい ($\beta mgL \ll 1$, $\beta mg\sigma \ll 1$) とき，$P(\sigma)$ の理想気体の圧力からのズレを $\dfrac{\sigma}{L}$ の 1 次の範囲で求めよ。ξ を用いてもよい。

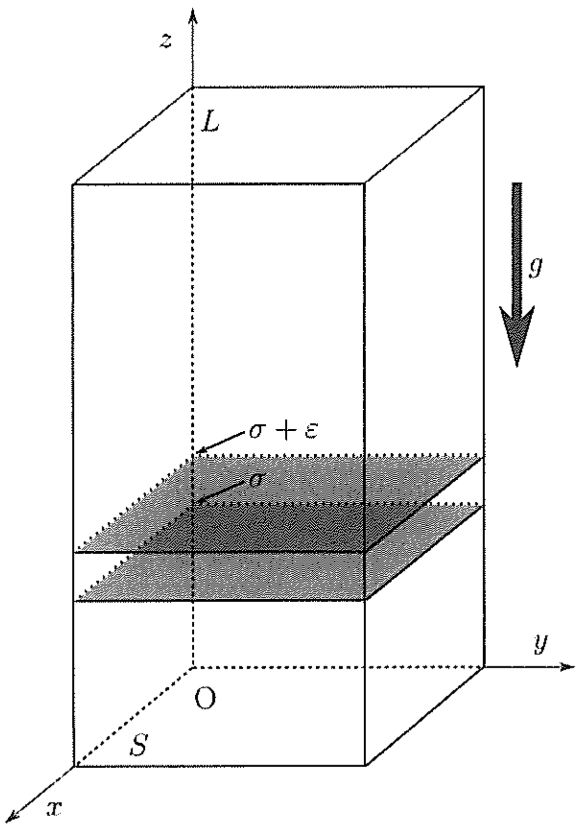

図 1