

2025 年度

信州大学大学院 総合理工学研究科
理学専攻

一般選抜 第Ⅱ期 学力試験

専門科目 (理科学分野 物理学ユニット)

解答時間 13:00 ～ 16:00

解答するときの注意事項

1. 解答用紙は、各問につき 1 枚使用し、白紙の場合でも必ず 4 枚提出すること。
2. 解答用紙には受験番号を必ず記入すること。
3. 必要ならば解答用紙の裏面を使用してもよい。

下書用紙

下書用紙

1 以下では、重力加速度の大きさを g とする。

[A] 単振り子について考える。長さ l の軽い糸の先に質量 m のおもりを取り付けた振り子の運動について、以下の問いに答えよ。なお、糸はたるまないものとする。

- (1) 鉛直と糸のなす角度を θ として運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー V をそれぞれ書け。ただし、ポテンシャルの基準はおもりの最下位置とせよ。
- (2) ラグランジアン L_1 を求めて振り子の運動方程式を導け。
- (3) 振り子の運動が 1 平面内に制限されない場合 (例えば円錐振り子のような運動), ラグランジアン L_2 はどのようなになるか。おもりの水平方向の位置をある方向からの方位角 ϕ で表すとして記せ。
- (4) (3) で求めたラグランジアン L_2 から、振り子の支点を通る鉛直軸周りの角運動量が保存することを導け。

[B] 剛体振り子について考える。質量 M の一様な棒が、鉛直面内にある半径 r のなめらかな円周上を動く場合を考える。図 1 のように棒の両端 A, B は円周上に束縛されている。 $\angle AOB$ を 2α , 棒が水平面となす角を θ , O を通り紙面に垂直な軸周りの棒の慣性モーメントを I とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 棒の運動について、ラグランジアンと運動方程式を書け。
- (2) 慣性モーメント I を求めよ。
- (3) 剛体振り子の回転軸と重心間の距離 h と単振り子の長さ l がある関係を満たすとき、剛体振り子と単振り子の周期が等しくなる。このときの l が円の半径 r と等しくなる 2α の角度を求めよ。ただし、求める過程も記すこと。

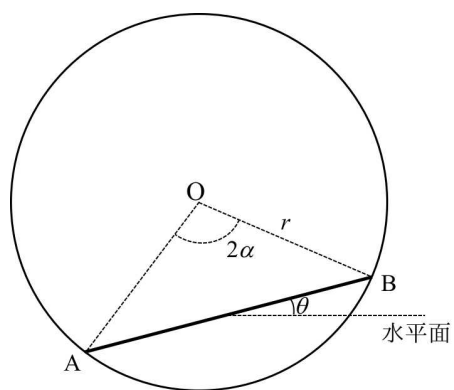


图 1

[A] 空間的に均一な媒質を伝搬する電磁波を考える。電場、磁場、電束密度、磁束密度、電荷密度、電流密度をそれぞれ $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, ρ , $\mathbf{J}$ とする。また媒質の誘電率 ε と透磁率 μ は、ともに定数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, ρ , $\mathbf{J}$ のみを用いて (ε と μ は用いない), マクスウェル方程式を微分形で書き, それぞれの方程式の物理的な意味を述べよ。
- (2) マクスウェル方程式から, 以下の関係式を導け。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

また, この関係式が表している物理的な意味を説明せよ。

- (3) マクスウェル方程式から, 以下の関係式を導け。ただし必要ならば, ベクトル解析の公式 $\nabla \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{W}) = \mathbf{W} \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) - \mathbf{V} \cdot (\nabla \times \mathbf{W})$ を用いてもよい。

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) = \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$$

また, この関係式が表している物理的な意味を説明せよ。

以下の問いにおいて, 真空の誘電率と透磁率をそれぞれ ε_0 , μ_0 とする。また $\rho = 0$, $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ とする。

- (4) マクスウェル方程式から, $\mathbf{E}$ に関する波動方程式を導け。ただし必要ならば, ベクトル解析の公式 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla^2 \mathbf{V}$ を用いてもよい。
- (5) 電磁波の伝搬方向を z 方向としたとき, $\mathbf{E} = (E_0 \exp \{i(kz - \omega t)\}, 0, 0)^T$ と表されるものとする。ここで, E_0 , k , ω はそれぞれ, 電場の振幅, 波数, 角周波数である。また T は転置を表す。このとき, (4) の波動方程式を用いて, k と ω の間の関係式と媒質の屈折率を, ε , μ , ε_0 , μ_0 から必要なものを用いてそれぞれ表せ。ただし, 求める過程も示せ。
- (6) (5) において, $\mathbf{H} = (0, H_0 \exp \{i(kz - \omega t)\}, 0)^T$ と表されるものとする。ここで, H_0 は磁場の振幅である。媒質の波動インピーダンスを ε , μ , ε_0 , μ_0 から必要なものを用いて表せ。ただし, 求める過程も示せ。

[B] 媒質 1 と媒質 2 との境界面がある。媒質 1 での電場及び電束密度を $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{D}_1$, 媒質 2 での電場及び電束密度を $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{D}_2$ とする。境界面には表面電荷が存在し, その表面電荷密度を σ とする。以下の問いに答えよ。ただし, 求める過程も示せ。

- (1) マクスウェル方程式を用いて、境界面において $\boldsymbol{E}_1$ と $\boldsymbol{E}_2$ が満たすべき条件式を求めよ。ただし、必要な物理量がある場合は定義して用いてもよい。
- (2) マクスウェル方程式を用いて、境界面において $\boldsymbol{D}_1$ と $\boldsymbol{D}_2$ が満たすべき条件式を求めよ。ただし、必要な物理量がある場合は定義して用いてもよい。

- [A] 1次元調和振動子の量子力学を考える。座標を x ($-\infty < x < \infty$), 運動量を p , プランク定数を $\hbar$ ($\hbar = \frac{h}{2\pi}$), 質量を m , 角振動数を ω (> 0), ハミルトニアン H を

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

とし, 演算子 $a, a^\dagger$ を

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \frac{ip}{\hbar} + \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \frac{ip}{\hbar} + \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right)$$

とする。

- (1) x と p の交換関係を書き, $[a, a^\dagger]$ を求めよ。
- (2) H を $a, a^\dagger$ を用いて表せ。
- (3) $[H, a], [H, a^\dagger]$ を求めよ。
- (4) 問 (2) より, 基底状態 $|0\rangle$ は $a|0\rangle = 0$ で特徴付けられる。基底状態の波動関数 $\phi_0(x)$ を求めよ。但し, $|0\rangle$ は規格化 ($\langle 0|0\rangle = 1$) されている。また, $\phi_0(x)$ は正とする。
- (5) 励起状態は $a^{\dagger n}|0\rangle$ ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$) で与えられる。状態 $a^{\dagger n}|0\rangle$ ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) のエネルギー固有値を求めよ。答だけでなく, 導出過程をつけること。
- (6) $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} a^{\dagger n}|0\rangle$ ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) とおく。 $a|n\rangle, a^\dagger|n\rangle$ ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) を求めよ。
- (7) β を正定数として, $q = e^{-\beta\hbar\omega}$ とおく。 $Z(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|e^{-\beta H}|n\rangle$ を求め, (β を用いずに) q を用いて表せ。 $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$ を証明せずに用いてよい。

- [B] 次に, 2次元等方的調和振動子の量子力学を考える。ハミルトニアン H は

$$H = \frac{1}{2m}\vec{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\vec{x}^2$$

で, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ である。[A] と同様に, x_j, p_j ($j = 1, 2$) に対して $a_j, a_j^\dagger$ を定義する。[A] で扱った系が独立に 2 つあると考えればよいので, 固有状態は $|n, m\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!m!}} a_1^{\dagger n} a_2^{\dagger m}|0, 0\rangle$ ($n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) で与えられる。 $\langle 0, 0|0, 0\rangle = 1$ とする。演算子 J_3, J_+, J_- を $J_3 = \frac{1}{2}(a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2)$, $J_+ = a_1^\dagger a_2$, $J_- = a_2^\dagger a_1$ とおく。

- (8) $|n, m\rangle$ ($n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) に対して, $H|n, m\rangle, J_3|n, m\rangle$ を求めよ。
- (9) $[H, J_3], [H, J_+], [H, J_-]$ を求めよ。
- (10) $[J_3, J_+], [J_3, J_-], [J_+, J_-]$ を求めよ。

(11) $|2, 0\rangle$ に対して, $J_+|2, 0\rangle$, $J_-|2, 0\rangle$, $J_-^2|2, 0\rangle$, $J_-^3|2, 0\rangle$ を求めよ。

(12) θ を実定数として, $z = e^{i\theta}$ とおく。 $Z(\beta, \theta) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \langle n, m | e^{-\beta H + i\theta J_3} | n, m \rangle$ を求め,

(β と θ を用いずに) q, z を用いて表せ。

(13) $Z(\beta, \theta)$ を q について整理して, $Z(\beta, \theta) = q \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\theta) q^n$ と書く。 $f_n(\theta)$ を求め, (β と虚数単位 i を用いずに) θ を用いて表せ。

4

質量 m で相互作用のない同種粒子 N 個をシリンダに入れ、粒子の出入りができないようにピストンで閉じ込める。シリンダとピストンは熱を通すことができ、ピストンはシリンダ内をなめらかに動くことができる。また、外界は一定の温度 T_e の熱浴とみなすことができるとする。粒子系のハミルトニアン H が次の式で与えられるとし、Planck 定数を h , Boltzmann 定数を k_B とし、以下の問いに答えよ。

$$H = \sum_{j=1}^N \frac{\vec{p}_j^2}{2m}$$

必要なら以下の近似式を用いてよい。

$$\log n! \sim n(\log n - 1) + \frac{1}{2} \log(2\pi n) \quad (n \gg 1)$$

[A] 図 1 のように、粒子が閉じ込められている部分の体積が V となる位置でピストンを固定した後、粒子系が熱平衡状態になるまで放置した。

(1) 粒子系の温度を T として、粒子系の分配関数 $Z_N(T, V)$ が次の式で与えられることを示し、定数 λ を求めよ。

$$Z_N(T, V) = \frac{V^N (k_B T)^{\frac{3N}{2}}}{N! \lambda^{3N}}$$

(2) 粒子系の圧力を P として P と T_e との関係を表す式を $Z_N(T, V)$ から導け。

[B] 図 2 のように、外界の圧力 P_e を [A] (2) で求めた粒子系の圧力 P と等しくした後、ピストンが動けるようにし、粒子系が熱平衡状態になるまで放置した。

(1) 体積 V が変わりうる系を扱う場合、 $Z_N(T, V)$ よりも次の式で定義される $Y_N(T, P)$ が適している。

$$Y_N(T, P) = \int_0^\infty Z_N(T, V) \exp\left(-\frac{PV}{k_B T}\right) dV$$

この積分を実行し、 $Y_N(T, P) = \frac{1}{\lambda^{3N}} (k_B T)^A P^B$ の A, B に当てはまる定数を求めよ。

(2) f と ϕ を以下の式で定義するとき、 ϕ と f の差 $\phi - f$ を求めよ。

$$f = \lim_{N \rightarrow \infty, \frac{V}{N} = \text{一定}} \left\{ -\frac{k_B T}{N} \log Z_N(T, V) \right\},$$

$$\phi = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{k_B T}{N} \log Y_N(T, P) \right\}$$

(3) 前問で定めた量 ϕ の物理的意味を答えよ。

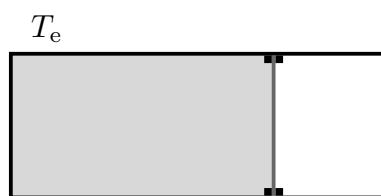


图 1



图 2

下書用紙

解 答 例

専門科目

1 以下では、重力加速度の大きさを g とする。

[A] 単振り子について考える。長さ l の軽い糸の先に質量 m のおもりを取り付けた振り子の運動について、以下の問いに答えよ。なお、糸はたるまないものとする。

- (1) 鉛直と糸のなす角度を θ として運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー V をそれぞれ書け。ただし、ポテンシャルの基準はおもりの最下位置とせよ。
- (2) ラグランジアン L_1 を求めて振り子の運動方程式を導け。
- (3) 振り子の運動が 1 平面内に制限されない場合 (例えば円錐振り子のような運動)、ラグランジアン L_2 はどのようなになるか。おもりの水平方向の位置をある方向からの方位角 ϕ で表すとして記せ。
- (4) (3) で求めたラグランジアン L_2 から、振り子の支点を通る鉛直軸周りの角運動量が保存することを導け。

Ans.

- (1) 運動エネルギー T とポテンシャル V はそれぞれ

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$V = mgh = mg(l - l \cos \theta) = mgl(1 - \cos \theta)$$

- (2) ラグランジアンは

$$L_1 = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta)$$

オイラーラグランジュ方程式より、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_1}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L_1}{\partial \theta} = 0$$

ここで、

$$\frac{\partial L_1}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta, \quad \frac{\partial L_1}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}$$

従って

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0 \quad \text{or} \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

を得る。

(3) 運動エネルギー T とポテンシャル V はそれぞれ

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2$$

$$V = mgl(1 - \cos\theta)$$

であるから、ラグランジアンは

$$L_2 = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2 - mgl(1 - \cos\theta)$$

(4) 支点を通る鉛直軸周りの角運動量であるから、 ϕ についてオイラーラグランジュ方程式を作れば、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_2}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L_2}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(ml^2\sin^2\theta\dot{\phi}) = 0$$

$ml^2\sin^2\theta\dot{\phi} = mlv_\phi$ (v_ϕ は水平方向の速さ) は対象としている角運動量であるから、保存することが確かめられる。

[B] 剛体振り子について考える。質量 M の一様な棒が、鉛直面内にある半径 r のなめらかな円周上を動く場合を考える。図 1 のように棒の両端 A, B は円周上に束縛されている。 $\angle AOB$ を 2α 、棒が水平面となす角を θ 、O を通り紙面に垂直な軸周りの棒の慣性モーメントを I とするとき、以下の問いに答えよ。

(1) 棒の運動について、ラグランジアンと運動方程式を書け。

$$L = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - Mgr\cos\alpha(1 - \cos\theta)$$

$$I\ddot{\theta} = -Mgr\cos\alpha\sin\theta$$

(2) 慣性モーメント I を求めよ。

一様な棒の中心を通り棒に垂直な軸周りの慣性モーメントは

$$I_0 = \frac{1}{12}M(2r\sin\alpha)^2 = \frac{1}{3}M(r\sin\alpha)^2$$

一様な棒の midpoint と円の中心の距離は $r\cos\alpha$ であるので平行軸の定理から

$$I = \frac{1}{3}M(r\sin\alpha)^2 + M(r\cos\alpha)^2 = \frac{1}{3}Mr^2(1 + 2\cos^2\alpha)$$

(3) 剛体振り子の回転軸と重心間の距離 h と単振り子の長さ l がある関係を満たすとき、剛体振り子と単振り子の周期が等しくなる。このときの l が円の半径 r と等しくなる

2α の角度を求めよ。ただし、求める過程も記すこと。

質量 M の剛体振り子と単振り子の運動が等しくなるとき、 h と l の関係は

$$l = \frac{I}{Mh}$$

となる。したがって

$$l = \frac{I}{Mr \cos \alpha} = \frac{1 + 2 \cos^2 \alpha}{3 \cos \alpha} r$$

$l = r$ のとき

$$\frac{1 + 2 \cos^2 \alpha}{3 \cos \alpha} = 1$$

であるから、 $2\alpha = 120^\circ$

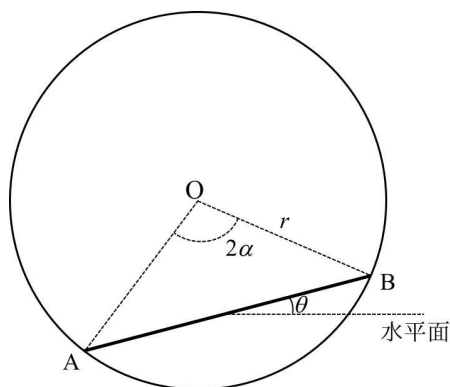


図 1

2

[A] (1) (5 点)

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{J}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

(2) (10 点) Maxwell 方程式から電荷保存則を導く。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \quad (1)$$

の両辺を t で微分する。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{D}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{j}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (4)$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (6)$$

左辺第 1 項は電荷の時間変化を示し、第 2 項は電流の発散を示している。つまり、電荷が時間的に減少した (増加した) 場合、電流の湧き出し (吸い込み) が生じ、全体の電荷は保存されることを意味する。

(3) (15 点) Maxwell 方程式の $\mathbf{H}$ と $\mathbf{E}$ の curl 方程式にそれぞれ、 $\mathbf{E}$ と $\mathbf{H}$ を掛ける。

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (7)$$

$$\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (8)$$

下式から上式を引くと、

$$-\left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (9)$$

ここでベクトル恒等式 $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$ を用いて、

$$-\left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (10)$$

と書ける。左辺の時間に関する微分を変形すると、

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) = \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (11)$$

となる。ここで、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{D} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} \quad (12)$$

と

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (13)$$

を用いた。 $\mathbf{H}$ と $\mathbf{B}$ に関しても同様にした。

左辺の時間微分の中が電磁場のエネルギーを表す。

$$U_{\text{EM}} = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \quad (14)$$

$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ は電流が流れることによる Ohmic ロスを表す。 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ は Poynting ベクトル $\mathbf{S}$ であり、 $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ は単位時間あたり系から流れ出るエネルギー

よって,

$$k^2 = \varepsilon\mu\omega^2 \quad (26)$$

上式より, 電磁波の位相速度は,

</

を考える。長方形の4辺の内、境界面と垂直方向の2つの辺の長さを最終的に0にすることを考えると、Faradayの誘導法則の左辺の線積分は、

$$\begin{aligned}
(4) \quad & \phi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \\
& (\because) \left(\frac{d}{dx} + \frac{m\omega}{\hbar}x\$$

となる。これより

$$\lambda = \sqrt{\frac{h^2}{2\pi m}} \quad (43)$$

となる

である。ここで $z = \frac{PV}{k_B T}$ とすると、 $\frac{P}{k_B T} > 0$ より、積分は

$$\int_0^\$$

- (3) 【配点：10 点 Legendre 変換に気づいたと思われる場合 5 点, ϕ の意味が正しく答えられていたら 5 点】