出題意図

(数学)

$\boxed{1}$ 行列と線形写像の理解度を見る。

$\boxed{2}$ 行列の対角化、固有値、固有空間などについての理解度を見る。

$\boxed{3}$ 2 変数関数の微分、積分の取り扱いについての理解度を見る。

$\boxed{4}$ 重積分についての理解度をみる。

(英語)

$\boxed{1}$ 数学に関連する英語の読解力をみる.

2025 年度
信州大学理学部数学科
第 3 年次編入学

学力試験 試験問題

2024 年 6 月 7 日 (金)

試験時間: 英語, 数学 10:00〜12:30

- 開始の合図があるまで問題冊子を開いてはいけない。
- 計算用紙は配布しないので、問題冊子の余白などを利用すること。
- 数学 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ と英語 $\boxed{1}$、すべてに解答すること。
- 解答は指定された解答用紙に書くこと。
- 解答用紙すべてに受験番号を書くこと。

数学

$\boxed{1}$ $\mathbb{R}$ を実数全体の集合、$\mathbb{R}^n$ を n 次元列ベクトル空間とする。行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

を考える。また、線形写像 $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ を $f(v) = Av$ で定める。

(1) 行列 A の階数 (ランク) を求めよ。

(2) 線形写像 f の像の次元、およびその基底を一組求めよ。

(3) 線形写像 f の核の次元、およびその基底を一組求めよ。

—以下余白—

$\boxed{2}$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

を考える。

(1) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような、実正則行列 P を一つ求めよ。

(2) $M(3;\mathbb{R})$ で実数を成分とする 3 次正方行列全体のなす $\mathbb{R}$-線形空間を表す。実数 μ に対して

$$W(\mu) = \{X \in M(3;\mathbb{R}) \mid AX = \mu XA\}$$

と定める。このとき $W(\mu)$ は $M(3;\mathbb{R})$ の $\mathbb{R}$-部分空間であることを示せ。

(3) 実数 λ に対して

$$V(\lambda) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}\}$$

と定める。$X \in W(\mu)$ かつ $\boldsymbol{v} \in V(\lambda)$ ならば、$X\boldsymbol{v} \in V(\lambda\mu)$ であることを示せ。

(4) $W(3) = \{O\}$ となることを示せ。ただし O は零行列を表す。

(5) $W(2) \neq \{O\}$ となることを示せ。

—以下余白—

$\boxed{3}$ $g(t)$ を区間 $(-\infty, \infty)$ 上の微分可能な 1 変数実数値関数とする。実数 x と y に対し

$$f(x,y) = \int_{x-y}^{x+y} g(t)\, dt$$

とする。

(1) 偏微分 $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ と $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ をそれぞれ g を用いて表せ。

(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ を示せ。

(3) $f(0,y) = \arctan y$ かつ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ をみたす関数 $f(x,y)$ を一つ求めよ。ただし arctan は、関数 $\tan\theta \left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を表す。

—以下余白—

$\boxed{4}$ xy-平面上の領域 $D = \{(x, y) \mid 0 < x^2 - y^2 < 1,\ 0 < 2xy < 1,\ x > 0,\ y > 0\}$ に対し、変数変換 $u = x^2 - y^2, v = 2xy$ を考えると、領域 D と uv-平面上の領域 $D' = \{(u, v) \mid 0 < u < 1,\ 0 < v < 1\}$ は一対一に対応する。

また、ヤコビアンについて $\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \left(\det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \right)^{-1}$ が成り立つ。

(1) 変数変換 $u = x^2 - y^2, v = 2xy$ に対し、ヤコビアン $\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$ を x と y を用いて表せ。

(2) 重積分 $\iint_D (x^4 - y^4)\, dxdy$ の値を求めよ。

—以下余白—

英語

英語問題は理学部入試事務室窓口で閲覧できます。