出題意図

問題 1　行列の固有値と固有ベクトルについて、きちんと理解できているかどうかを見る。

問題 2　ベクトル空間の次元、内積、基底、ベクトルの正規直交性、線形写像とその像および核といった基本事項をきちんと理解できているかどうかを見る。

$\boxed{\text{出題意図}}$

[3]　2 変数関数の微分の扱いについて計算の能力をみる.

[4]　重積分, 広義積分およびオイラーの公式について理解度をみる.

令和４年信州大学数学科３年次編入学試験 英語 出題意図

数学に関連する英語の読解力を見る。

令和４年度信州大学理学部数学科

３年次編入学

試験問題

試験日　２０２１年６月４日（金）

試験時間　英語, 数学　10:00～12:30

令和４年度
信州大学理学部数学科
第３年次編入学試験問題（数学）

$\boxed{1}$ 行列 E は３次単位行列、A は３次実交代行列で零行列でないとする。

(1) 行列 A の固有値は、０および、互いに複素共役な純虚数であることを証明せよ。

(2) 行列 $E-A$ は正則であることを証明せよ。

(3) 行列 $P=(E+A)(E-A)^{-1}$ の固有値は、１および、実数ではなく互いに複素共役な大きさ１の複素数であることを証明せよ。

$\boxed{2}$ ２次実正方行列全体のなす $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間を V で表す。また V 上の内積を

$$\langle A,B\rangle=\frac{1}{2}\operatorname{tr}({}^tAB)\quad(A,B\in V)$$

で定める。但し ${}^tA$ は A の転置行列を表し、$\operatorname{tr}(X)$ は正方行列 X のトレースを表す。

(1) 行列 e_0,e_1,e_2,e_3 を次で定める:

$$e_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad e_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\quad e_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

このとき $\{e_0,e_1,e_2,e_3\}$ は V の正規直交基底であることを証明せよ。

(2) 行列 $A\in V$ に対し、V の一次変換

$$f:X\mapsto[A,X]\overset{\text{def}}{=}AX-XA\quad(X\in V)$$

を考える。ただし、A は単位行列の定数倍ではないものとする。このとき、線形写像 f の核 $\operatorname{Ker}f$ は e_0 および A で生成される V の２次元部分空間であること、また像 $\operatorname{Im}f$ は e_0 および ${}^tA$ で生成される V の２次元部分空間の直交補空間であることを、それぞれ証明せよ。

$\boxed{3}$ $x=s^2-t^2,\ y=2st\ \ (-\infty<s<\infty,\ t>0)$ とする。

(1) $s^2+t^2=\sqrt{x^2+y^2}$ を示せ。

(2) $x,\ y$ に関する２変数関数 z に対して $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ を，変数 $x,\ y$ の関数と偏微分 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を用いた式で表せ。

(3) 方程式

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(x,y)+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}f(x,y)=0,\quad y\neq 0$$

を満たす関数 $f(x,y)$ で $f(x,y)=0$ 以外のものを一つ見つけよ。

$\boxed{4}$ $I(a)$ を次のように定義する。

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+ix^2}\,dx$$

ただし、a は正の実数とし、$i = \sqrt{-1}$ を虚数単位とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $I(a)^2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(-a+i)(x^2+y^2)}\,dxdy$ である。極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を利用して $I(a)^2$ を a の式で表せ。

(2) $\displaystyle\lim_{a\to+0} I(a)^2 = \pi e^{\frac{\pi}{2}i}$ を示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{a\to+0}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\sin(x^2)\,dx$ の値を計算せよ。(ただし、求める値は存在し正になることは分かっているものとする。)

—以下余白—

英語問題は理学部入試事務室窓口で閲覧できます。