出題の意図

数学

[1] 2 変数関数の微分についての基礎的な力をみる。
[2] 広義積分および重積分についての理解度をみる。
[3] 行列に関する基礎的な計算の能力をみる.
[4] 線形空間と線形写像, 内積に関する基礎的な事項の理解をみる.

英語

数学に関連した英文の読解力をみる。

令和3年度 信州大学理学部

3年次編入 (数学科) 試験問題

令和2年11月13日 (金)

試験時間：英語、数学 10:00 ～ 12:30

- 開始の合図があるまで問題冊子を開いてはいけない。
- 計算用紙は配布しないので、問題冊子の余白などを利用すること。
- 数学 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ と英語、すべてに解答すること。
- 解答は指定された解答用紙に書くこと。
- 解答用紙すべてに受験番号を書くこと。

数学

$\boxed{1}$

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq 1\}$ とする。関数 $f(x, y) = 2x - xy^2$ の D における最大値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$

(1) 広義積分 $I = \displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2 + \sin x} dx$ の収束・発散を調べよ。

(2) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqq x + y \leqq 2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ とする。積分 $J = \displaystyle\iint_E \frac{dxdy}{x^2 + y^2}$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$

次の行列 A に対して、以下の問いに答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) A の行列式を求めよ。

(2) A の逆行列を求めよ。

(3) A の固有値を求めよ。

(4) $A^2 - 3I$ の階数を答えよ。ただし、ここで I は単位行列とする。

4

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ をベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の標準内積とする。つまり、

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

に対して

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

である。また、ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ はそれぞれ長さが 1 で、かつ内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関して互いに直交しているとする（k は 1 以上 n 以下の整数)。写像 $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{v} - \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1 \rangle \boldsymbol{v}_1 - \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_2 \rangle \boldsymbol{v}_2 - \cdots - \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_k \rangle \boldsymbol{v}_k \\ &= \boldsymbol{v} - \sum_{i=1}^{k} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_i \rangle \boldsymbol{v}_i. \end{aligned}$$

(1) F は線形写像であることを示せ。

(2) $F(\boldsymbol{v})$ は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ のそれぞれと直交していることを示せ。

(3) $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$ によって生成される $\mathbb{R}^n$ の部分空間を V とする。$\boldsymbol{v} \in V$ ならば、$F(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ となることを示せ（ただし、ここで $\boldsymbol{0}$ は零ベクトルである)。

(4) $F^2 = F$ を満たすことを示せ。

(5) 任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ に対して、$\langle F(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, F(\boldsymbol{w}) \rangle$ が成り立つことを示せ。

英語問題は理学部入試事務室窓口で閲覧できます