信州大学工学部

学士論文

ランダム符号化を用いた
着払いコスト制約付き通信路符号化の順定理

指導教員　西新 幹彦 准教授

学科　電子情報システム工学科
学籍番号　19T2092H
氏名　髙丸 修一

2023 年 3 月 31 日

目次

1 序論 1
1.1 はじめに 1
1.2 本論文の構成 2

2 数学的準備 2

3 レート・歪み理論 2
3.1 レート・歪み問題の定式化 2
3.2 ランダム符号化を用いた補題 3

4 コスト制約付き通信路符号化 6
4.1 着払いコスト制約付き符号化問題の定式化 6
4.2 ランダム符号化を用いた順定理 8

5 まとめ 13

謝辞 13

参考文献 13

付録 A 14

1 序論

1.1 はじめに

情報源符号化問題と通信路符号化問題は情報理論において基礎的な問題である．

情報源符号化問題は，送信したい情報を符号化し，符号語を得る．その際，符号化に使用した符号語長を一文字あたりに換算したものを符号化レートと呼ぶ．この符号化レートが小さいほど効率よく情報をやり取りできるが，小さくしすぎると誤り確率が大きくなってしまう．そこで，誤り無く情報を符号化するという条件のもと，この符号化レートをどこまで小さくできるかを示す問題が情報源符号化問題である．そのような基本的な問題に対して条件を少し緩和し，電話での音声や画像の圧縮などのように，元のデータとは少し異なるデータを受信者に届けても支障が無いような場合を考える．このとき，元のデータと受信者に届いたデータの差異のことを歪みと呼ぶ．この歪みが生じる事を許容し，その歪みの許容範囲内で符号化レートをどこまで小さくできるかという問題がレート・歪み問題である [1].

一方，通信路符号化問題は，送信者と受信者が誤り無く通信をするという条件のもとで，符号化レートをどこまで大きくすることができるかを示す問題である．尚，通信路符号化において，通信路一回あたりに伝送される情報量を符号化レートと呼ぶ．さらに，実際の通信システムを考えると，電力や時間など何らかのコストがかかってしまう．通信路符号化問題において，そのようなコストを一定の値以下にするという制約を課した問題をコスト制約付き通信路符号化問題という．コストは通信路の入力と出力どちらにも定義することができるが，本研究では通信路の出力に対してコストを定義した着払いコスト制約付き通信路符号化問題を扱う．

以上の二つの問題に関するそれぞれの定理は，どちらも順定理と逆定理によって示される．順定理では符号を構成し，その符号によって所望の条件が達成可能である事を示す．符号を構成する主な方法として，ランダム符号化と非ランダム符号化と呼ばれる 2 種類が存在する．本研究ではランダム符号化に着目した．

先行研究において，レート・歪み問題の一般情報源に対するランダム符号化を用いた証明が存在する [1]．さらに，このランダム符号化の代わりに非ランダム符号化を用いた補題の証明も存在する [2]．後者の補題では，歪みの評価が抽象化されており，対角線論法を明示的に記述できるなど，前者に比べて汎用性が高い．本論文では，後者と同じ形式の補題をランダム符号化を用いて証明する．

また着払いコスト制約付き通信路符号化問題については非ランダム符号化を用いた証明のみが存在している [3]．本論文では同じ定理をランダム符号化を用いて証明する．

1.2　本論文の構成

第 2 章では数学的準備をし，第 3 章ではランダム符号化を用いた一般情報源のレート・歪み問題の補題の証明をする．第 4 章では着払いコスト制約付き通信路符号化の順定理をランダム符号化を用いて証明する．第 5 章では本論文をまとめる．付録では第 3 章で証明した補題を用いて，一般情報源のレート・歪み問題の順定理を証明する．

2　数学的準備

定義 1　実数値確率変数列 $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty} Z_n \triangleq \inf\left\{\alpha \,\middle|\, \lim_{n\to\infty} \Pr\{Z_n > \alpha\} = 0\right\} \tag{1}$$

とし，これを確率的上極限と呼ぶ．また，

$$\text{p-}\liminf_{n\to\infty} Z_n \triangleq \sup\left\{\beta \,\middle|\, \lim_{n\to\infty} \Pr\{Z_n < \beta\} = 0\right\} \tag{2}$$

とし，これを確率的下極限と呼ぶ．

本論文で扱う対数はすべて自然対数である．また集合 $\mathcal{Z}$ の中に値をとる確率変数 Z に対し，その確率分布を P_Z と表す．すなわち，$P_Z(z) = \Pr\{Z = z\}$ である．さらに $X = x$ が与えられたもとで $Y = y$ となる条件付き確率を $P_{Y|X}(y|x) = \Pr\{Y = y \mid X = x\}$ と表す．

3　レート・歪み理論

本章ではレート・歪み理論に関する成果について述べる．次の 3.1 節にてレート・歪み問題を定式化し，さらに次の 3.2 節で本論文の成果である補題の証明を行う．

3.1　レート・歪み問題の定式化

レート・歪み問題は以下のように定式化される．

一般情報源とは, 定常無記憶情報源を一般化した情報源のことであり, すべての非定常や非エルゴードな情報源を含んでいる．そのような情報源を $\boldsymbol{X} = \{X^n = (X_1, X_2, \cdots, X_n)\}_{n=1}^{\infty}$ と表す．情報源アルファベットを $\mathcal{X}$, 復号アルファベットを $\mathcal{Y}$ とする．各 n に対し, 歪み測度 d_n を関数 $d_n : \mathcal{X}^n \times \mathcal{Y}^n \to [0, +\infty)$ と定め，$d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})(\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n, \boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^n)$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の間の歪みと呼ぶ．また符号化と復号化は次のように行う．M_n 個の符号語の集合を $\mathcal{M}_n = \{1, 2, \cdots, M_n\}$ とする．符号化は符号器 $\varphi_n : \mathcal{X}^n \to \mathcal{M}_n$ によって行われ，復号化は復号器 $\psi_n : \mathcal{M}_n \to \mathcal{Y}^n$ によって行われる．そのとき，$\psi_n(m)$ を m の復号語と呼ぶ．

定義 2　二つの確率変数列 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ に対して

$$\overline{I}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}) \triangleq \text{p-}\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \frac{P_{Y^n|X^n}(Y^n|X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} \tag{3}$$

とし，これを $\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ の間の相互情報量スペクトル上限と呼ぶ.

定義 3　$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ の最大歪みを

$$\overline{D}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \triangleq \text{p-}\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} d_n(X^n, Y^n) \tag{4}$$

と定義する.

次に達成可能性を定義する.

定義 4　レート R が D-達成可能とは

$$\overline{D}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \leq D \tag{5}$$

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log M_n \leq R \tag{6}$$

を満たすような符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在するということである．ただし $\boldsymbol{Y}$ は $Y^n = \psi_n(\varphi_n(X^n))$ である.

定義 5　レート・歪み関数を以下のように定義する.

$$R(D) \triangleq \inf\{R | R \text{ が } D\text{-達成可能 }\} \tag{7}$$

上記のレート・歪み関数を数学的に求めることがレート・歪み問題の基本的な問題である．これに関し次の定理が成り立つことが知られている [1].

定理 1　一般情報源 $\boldsymbol{X}$ のレート・歪み関数は

$$R(D) = \inf_{Y : \overline{D}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \leq D} \overline{I}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}) \tag{8}$$

で与えられる.

3.2　ランダム符号化を用いた補題

定理 1 は順定理と逆定理によって示される.

定理 2　順定理は

$$R(D) \leq \inf_{Y : \overline{D}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \leq D} \overline{I}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}) \tag{9}$$

と表される.

定理 2 を示すために次の補題が使われる.

補題 1　任意の一般情報源 $\boldsymbol{X} = \{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し，それと相関のある $\boldsymbol{Y} = \{Y^n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える．R, γ を任意の正の定数とし，$\mathcal{S}_n$ を $\mathcal{X}^n \times \mathcal{Y}^n$ の部分集合とする．このとき

$$\mathcal{B}_n \triangleq \left\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{X}^n \times \mathcal{Y}^n \,\middle|\, \frac{1}{n} \log \frac{P_{Y^n|X^n}(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x})}{P_{Y^n}(\boldsymbol{y})} \le R - \gamma \right\} \tag{10}$$

とおくと

$$\frac{1}{n} \log M_n \le R \tag{11}$$

$$\Pr\{(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) \notin \mathcal{S}_n\} \le \Pr\{X^n Y^n \notin \mathcal{B}_n \cap \mathcal{S}_n\} + \exp(-e^{n\gamma}) \tag{12}$$

を満たす符号 (φ_n, ψ_n) が存在する．ただし $\exp(x)$ は指数関数 e^x を表す．

この補題の証明は文献 [1] の手法と異なり，集合 $\mathcal{S}_n$ の中身を定義せずに証明を行う．つまりこの補題は，様々な歪みの評価で応用できるという点が汎用性の高さを示している．尚，付録 A にて，この補題を用いて実際に順定理を証明する．

〔証明〕$\mathcal{T}_n \triangleq \mathcal{B}_n \cap \mathcal{S}_n$, $M_n = e^{nR}$ とおく．まずランダム符号化を用いて符号を構成する．はじめに復号語 $\bar{\psi}_n(1), \bar{\psi}_n(2), \cdots, \bar{\psi}_n(M_n) \in \mathcal{Y}^n$ を分布 P_{Y^n} に従って互いに独立に発生させる．そして，符号器は各入力 $\boldsymbol{x}$ に対して $(\boldsymbol{x}, \bar{\psi}_n(i_0)) \in \mathcal{T}_n$ となるような i_0 がただ一つ存在するとき，i_0 を出力する．そのとき $\bar{\varphi}_n(\boldsymbol{x}) = i_0$ と表す．$(\boldsymbol{x}, \bar{\psi}_n(i_0)) \in \mathcal{T}_n$ を満たす i_0 が二つ以上存在するとき，符号器はそれらの中からランダムに一つだけ選択し，出力する．そのような i_0 が存在しない時は $1, \cdots, M_n$ の中から任意の値を選択し出力する．このように定義された符号器，復号器の組 $(\bar{\varphi}_n, \bar{\psi}_n)$ に対して，情報源と復号器の出力の組が集合 $\mathcal{S}_n$ に入らない確率

$$\overline{P}_e^{(n)} = \Pr\{(X^n, \bar{\psi}_n(\bar{\varphi}_n(X^n))) \notin \mathcal{S}_n\} \tag{13}$$

を考える．ここで X^n に加えて $(\bar{\varphi}_n, \bar{\psi}_n)$ も確率変数である事に注意する．$\overline{P}_e^{(n)}$ は，符号器の定義と $\mathcal{T}_n = \mathcal{B}_n \cap \mathcal{S}_n$ より

$$\begin{aligned}
\overline{P}_e^{(n)} &= \Pr\{(X^n, \bar{\psi}_n(\bar{\varphi}_n(X^n))) \notin \mathcal{S}_n\} && (14)\\
&= \sum_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) \Pr\{(X^n, \bar{\psi}_n(\bar{\varphi}_n(X^n))) \notin \mathcal{S}_n \mid X^n = \boldsymbol{x}\} && (15)\\
&= \sum_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) \Pr\{(\boldsymbol{x}, \bar{\psi}_n(\bar{\varphi}_n(\boldsymbol{x}))) \notin \mathcal{S}_n\} && (16)\\
&\le \sum_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) \Pr\{(\boldsymbol{x}, \bar{\psi}_n(\bar{\varphi}_n(\boldsymbol{x}))) \notin \mathcal{T}_n\} && (17)\\
&\le \sum_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) \Pr\{\text{ 任意の } i = 1, 2, \cdots, M_n \text{ に対して } (\boldsymbol{x}, \bar{\psi}_n(i)) \notin \mathcal{T}_n\} && (18)
\end{aligned}$$

と表される．$\bar{\psi}_n(1), \bar{\psi}_n(2), \cdots, \bar{\psi}_n(M_n)$ は互いに独立で，分布 P_{Y^n} に従うので，

$$\begin{aligned}
\overline{P}_e^{(n)} &\leq \sum_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) \prod_{i=1}^{M_n} \Pr\{(\boldsymbol{x}, \bar{\psi}_n(i)) \notin \mathcal{T}_n\} && (19)\\
&= \sum_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) (\Pr\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Y}^n) \notin \mathcal{T}_n\})^{M_n} && (20)\\
&= \sum_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) (1 - \Pr\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Y}^n) \in \mathcal{T}_n\})^{M_n} && (21)\\
&= \sum_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) \left(1 - \sum_{\boldsymbol{y}:(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathcal{T}_n} P_{Y^n}(\boldsymbol{y})\right)^{M_n} && (22)
\end{aligned}$$

と表される．ここで $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{T}_n$ なら，$\mathcal{B}_n$ の定義より，

$$\frac{1}{n} \log \frac{P_{Y^n|X^n}(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x})}{P_{Y^n}(\boldsymbol{y})} \leq R - \gamma \tag{23}$$

$$P_{Y^n}(\boldsymbol{y}) \geq P_{Y^n|X^n}(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x}) e^{-n(R-\gamma)} \tag{24}$$

と書ける．式 (24) より，式 (22) は，

$$\overline{P}_e^{(n)} \leq \sum_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) \left(1 - e^{-n(R-\gamma)} \sum_{\boldsymbol{y}:(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathcal{T}_n} P_{Y^n}(\boldsymbol{y})\right)^{M_n} \tag{25}$$

と表せる．ここで不等式，$(1-x)^y \leq e^{-xy} \quad (0 \leq x \leq 1, y \geq 0)$ を用い，$M_n = e^{nR}$ を代入すると，

$$\begin{aligned}
\overline{P}_e^{(n)} &\leq \sum_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) \exp\left(-e^{-n(R-\gamma)} \sum_{\boldsymbol{y}:(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathcal{T}_n} P_{Y^n|X^n}(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x}) e^{nR}\right) && (26)\\
&= \sum_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) \exp\left(-e^{n\gamma} \sum_{\boldsymbol{y}:(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathcal{T}_n} P_{Y^n|X^n}(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x})\right) && (27)
\end{aligned}$$

と表せる．さらに不等式　$e^{-xy} \leq 1 - y + e^{-x} (0 \leq y \leq 1, x \geq 0)$ を用いると，

$$\begin{aligned}
\overline{P}_e^{(n)} &\leq \sum_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) \left\{1 - \sum_{\boldsymbol{y}:(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathcal{T}_n} P_{Y^n|X^n}(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x}) + \exp(-e^{n\gamma})\right\} && (28)\\
&= 1 - \sum_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}:(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in T_n} P_{X^nY^n}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \exp(-e^{n\gamma}) && (29)\\
&= 1 - \Pr\{X^nY^n \in T_n\} + \exp(-e^{n\gamma}) && (30)\\
&= \Pr\{X^nY^n \notin T_n\} + \exp(-e^{n\gamma}) && (31)
\end{aligned}$$

と表される．一方 $\overline{P}_e^{(n)}$ は，ランダムでない符号 (φ_n, ψ_n) を用いて

$$
\begin{aligned}
\overline{P}_e^{(n)} &= \Pr\{(X^n, \bar{\psi}_n(\bar{\varphi}_n(X^n))) \notin \mathcal{S}_n\} && (32)\\
&= \sum_{\varphi_n, \psi_n} P_{\bar{\varphi_n}\bar{\psi_n}}(\varphi_n, \psi_n) \Pr\{(X^n, \bar{\psi_n}(\bar{\varphi_n}(X^n))) \notin S_n | \bar{\varphi}_n = \varphi_n, \bar{\psi}_n = \psi_n\} && (33)\\
&= \sum_{\varphi_n, \psi_n} P_{\bar{\varphi_n}\bar{\psi_n}}(\varphi_n, \psi_n) \Pr\{(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) \notin \mathcal{S}_n\} && (34)
\end{aligned}
$$

と表される．式 (34) は $\Pr\{(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) \notin \mathcal{S}_n\}$ の期待値の形になっている．また式 (31) より $\overline{P}_e^{(n)}$ は上から抑えられているので

$$
\sum_{\varphi_n, \psi_n} P_{\bar{\varphi_n}\bar{\psi_n}}(\varphi_n, \psi_n) \Pr\{(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) \notin \mathcal{S}_n\} \leq \Pr\{X^n Y^n \notin \mathcal{T}_n\} + \exp(-e^{n\gamma}) \quad (35)
$$

と書ける．よって期待値が上から抑えられているので，少なくとも一つのランダムでない符号 (φ_n, ψ_n) が存在し，$\mathcal{T}_n = \mathcal{B}_n \cap \mathcal{S}_n$ より

$$
\Pr\{(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) \notin \mathcal{S}_n\} \leq \Pr\{X^n Y^n \notin \mathcal{B}_n \cap \mathcal{S}_n\} + \exp(-e^{n\gamma}) \quad (36)
$$

を満たすことがわかる．

また符号化レートは，$M_n = e^{nR}$ と定義したので，

$$
\frac{1}{n} \log M_n \leq R \quad (37)
$$

を満たす．□

4　コスト制約付き通信路符号化

本章ではコスト制約付き通信路符号化に関する成果について述べる．次の 4.1 節ではコスト制約付き通信路符号化問題を述べ，さらに次の 4.2 節で本論文の成果であるランダム符号化を用いたコスト制約付き通信路符号化の順定理を示す.

4.1　着払いコスト制約付き符号化問題の定式化

着払いコスト制約付き通信路符号化問題は以下のように定式化される．

通信路の入力アルファベットを $\mathcal{X}$，通信路の出力アルファベットを $\mathcal{Y}$ とする．$\mathcal{X}$，$\mathcal{Y}$ どちらも有限集合とする．このとき一般通信路は，入力系列 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathcal{X}^n$ と出力系列 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathcal{Y}^n$ を用いて，条件付き確率の列 $\boldsymbol{W} \triangleq \{W^n(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})\}_{n=1}^{\infty}$ で表すことができる．一般通信路とは定常無記憶な通信路を一般化した通信路である．また，$\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^n$ に対して $c_n(\boldsymbol{y})$ を $\boldsymbol{y}$ のコストと呼ぶ．本論文では，入力を $\boldsymbol{X}$ としたときの通信路出力を $\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})$ と表記する．

送信したいメッセージの集合を $\mathcal{M}_n = \{1, 2, \cdots, M_n\}$ とするとき，符号器 $\varphi_n : \mathcal{M}_n \to \mathcal{X}^n$ にて符号化される．あるメッセージ $m \in \mathcal{M}_n$ が送られたとすると，$\varphi_n(m)$ が通信路に入力される．このとき $\varphi_n(m)$ を $m \in \mathcal{M}_n$ の符号語という．復号器 $\psi_n : \mathcal{Y}^n \to \mathcal{M}_n$ では，通信路の出力 $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^n$ を受け取った時，送信されたメッセージを推測し，一つだけメッセージを出力する．また，通信路に入力されたメッセージと出力されるメッセージは，必ずしも一致するとは限らない．このとき一致しない確率は，

$$\varepsilon_n \triangleq \frac{1}{M_n} \sum_{m=1}^{M_n} W^n((\psi_n^{-1}(m)^c | \varphi_n(m)) \tag{38}$$

と表され，誤り確率と呼ばれる．ただし c は補集合を表し，$\psi_n^{-1}(m)$ は m と復号される受信語 $\boldsymbol{y}$ 全体を表し，m に対する復号領域と呼ばれる．

定義 6　レート R が Γ-達成可能とは

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0 \tag{39}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq R \tag{40}$$

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} c_n(Y^n) \leq \Gamma \tag{41}$$

がすべて成り立つような符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する事である．式 (41) において，$Y^n = Y^n(\varphi_n(U_{M_n}))$ である．ここで U_M は M 以下の自然数上に一様に分布する確率変数とする．つまりメッセージが等確率で送られた時のコスト超過する確率である．

定義 7　Γ に対して

$$C(\Gamma) \triangleq \sup\{R | R \text{ は } \Gamma\text{-達成可能 }\} \tag{42}$$

を Γ-通信路容量と呼ぶ．

上記の Γ-通信路容量を数学的に求める事が制約付き通信路符号化問題の基本的な問題である．

次に Γ-通信路容量を数学的に表すために以下の量を用意する．

定義 8　通信路の入出力 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})$ に対し

$$\underline{I}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}) = \text{p-}\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n | X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} \tag{43}$$

と定める．

定義 9　$\boldsymbol{Y}$ に対し

$$\overline{c}(\boldsymbol{Y}) \triangleq \text{p-}\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} c_n(Y^n) \tag{44}$$

とおく．

上記のもとで次の定理が成り立つことが知られている [3].

定理 3　Γ-通信路容量は

$$C(\Gamma) = \sup_{\boldsymbol{X}:\bar{c}(\boldsymbol{Y})\le\Gamma} \underline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) \tag{45}$$

と表される．

4.2　ランダム符号化を用いた順定理

定理 3 は順定理と逆定理によって示される．

定理 4　順定理は

$$C(\Gamma) \ge \sup_{\boldsymbol{X}:\bar{c}(\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}))\le\Gamma} \underline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) \tag{46}$$

と表される．

順定理は符号を構成するパートと，構成された符号の性能評価をし，Γ-通信路容量の下界を求めるパートの 2 つで構成される．

本研究ではランダム符号化と呼ばれる，特定の分布に従って符号語を構成する手法を用いた．従来研究の非ランダム符号化と異なり，ランダムに符号を構成しているため，性能が良い符号，すなわち達成可能を満たすような符号と，そうでない符号が混在している．この性能の良い符号が存在する事を示す為に，構成した符号の誤り確率とコスト超過確率の期待値の和を用いて，符号の性能を評価する方法を用いた．

〔証明〕証明を始めるにあたり

$$\bar{c}(\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) \le \Gamma \tag{47}$$

を満たすような入力過程 $\boldsymbol{X}$ を考える．また任意の小さい定数 $\gamma > 0$ に対して

$$R \triangleq \underline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) - 2\gamma \tag{48}$$

と定義し，

$$\tilde{\mathcal{B}}_n(\boldsymbol{x}) \triangleq \left\{ \boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^n \,\middle|\, \frac{1}{n}\log\frac{W^n(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})}{P_{Y^n(X^n)}(\boldsymbol{y})} \ge R+\gamma \right\} \tag{49}$$

$$M_n \triangleq e^{nR} = e^{n(\underline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y})-2\gamma)} \tag{50}$$

とおく．

まずランダム符号化を用いて符号を構成する．$\bar{\varphi}_n(1), \bar{\varphi}_n(2), \cdots, \bar{\varphi}_n(M_n) \in \mathcal{X}^n$ を分布 P_{X^n} に従って互いに独立に発生させる．$\mathcal{Q}_n = \{\bar{\varphi}_n(1), \bar{\varphi}_n(2), \cdots, \bar{\varphi}_n(M_n)\}$ を符号語の集合とす

る．復号化では復号器が $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^n$ を受け取ったとき，$\boldsymbol{y} \in \tilde{\mathcal{B}}(\bar{\varphi}_n(i))$ なる i がただ一つ存在するとき，復号器はその番号 i を出力する．そのような番号 i が一つも無いときや複数個存在するときは，誤りが起こったものとし，M_n 個の中からランダムに i を出力する．このようにランダムに定義された符号器と復号器の組 (φ_n, ψ_n) に対して，以下で性能の評価をする．

ここで事象 $E_{(i,j)}$ を

$$E_{(i,j)} = \{Y^n(\bar{\varphi}_n(i)) \in \tilde{\mathcal{B}}_n(\bar{\varphi}_n(j))\} \tag{51}$$

とする．$i_0 \in M_n$ を送信したときの通信路の出力は $Y^n(\bar{\varphi}_n(i_0))$ なので，$i_0 \in M_n$ を送ったときのランダム符号 $\mathcal{Q}_n$ のすべてにわたる誤り確率の平均 $\bar{\varepsilon}_n(i_0)$ は

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}_n(i_0) &= \Pr\left\{E^c_{(i_0,i_0)} \cup \left(\bigcup_{i \neq i_0} E_{(i_0,i)}\right)\right\} && (52)\\
&\leq \Pr\left\{E^c_{(i_0,i_0)}\right\} + \Pr\left\{\bigcup_{i \neq i_0} E_{(i_0,i)}\right\} && (53)\\
&\leq \Pr\left\{E^c_{(i_0,i_0)}\right\} + \sum_{i \neq i_0} \Pr\left\{E_{(i_0,i)}\right\} && (54)\\
&= \Pr\left\{Y^n(\bar{\varphi}_n(i_0)) \notin \tilde{\mathcal{B}}_n(\bar{\varphi}_n(i_0))\right\}\\
&\quad + \sum_{i \neq i_0} \Pr\left\{Y^n(\bar{\varphi}_n(i_0)) \in \tilde{\mathcal{B}}_n(\bar{\varphi}_n(i))\right\} && (55)
\end{aligned}$$

と表される．

ここで式 (55) の右辺の各項について評価する．第 1 項に関して，$\bar{\varphi}_n(i_0)$ は分布 P_{X^n} に従うので，確率変数 X^n を用いると

$$\begin{aligned}
&\Pr\left\{Y^n(\bar{\varphi}_n(i_0)) \notin \tilde{\mathcal{B}}_n(\bar{\varphi}_n(i_0))\right\} && (56)\\
&= \Pr\left\{Y^n(X^n) \notin \tilde{\mathcal{B}}_n(X^n)\right\} && (57)\\
&= \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n(X^n)|X^n)}{P_{Y^n(X^n)}(Y^n(X^n))} < R + \gamma\right\} && (58)\\
&= \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n(X^n)|X^n)}{P_{Y^n(X^n)}(Y^n(X^n))} < \underline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) - \gamma\right\} && (59)\\
&\to 0 \quad (n \to \infty) && (60)
\end{aligned}$$

となる．ただし，式 (58) は $\tilde{\mathcal{B}}_n(X^n)$ の定義より，式 (59) は式 (48) より成り立ち，式 (60) は $\underline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y})$ の定義に当てはめると導く事が出来る．

第 2 項目に関して，符号語 $\bar{\varphi}_n(i_0)$ と $\bar{\varphi}_n(i)$ は分布 P_{X^n} に従うので，確率変数 X^n と $\boldsymbol{x}$ を用いて

$$\sum_{i \neq i_0} \Pr\left\{Y^n(\bar{\varphi}_n(i_0)) \in \tilde{\mathcal{B}}_n(\bar{\varphi}_n(i))\right\} \tag{61}$$

$$= \sum_{i \neq i_0} \Pr\left\{Y^n(X^n) \in \tilde{\mathcal{B}}_n(\bar{\varphi}_n(i))\right\} \tag{62}$$

$$= \sum_{i \neq i_0} \sum_{\boldsymbol{x}} \Pr\left\{\bar{\varphi}_n(i) = \boldsymbol{x}\right\} \Pr\left\{Y^n(X^n) \in \tilde{\mathcal{B}}_n(\bar{\varphi}_n(i)) \mid \bar{\varphi}_n(i) = \boldsymbol{x}\right\} \tag{63}$$

$$= \sum_{i \neq i_0} \sum_{\boldsymbol{x}} \Pr\left\{\bar{\varphi}_n(i) = \boldsymbol{x}\right\} \Pr\left\{Y^n(X^n) \in \tilde{\mathcal{B}}_n(\boldsymbol{x})\right\} \tag{64}$$

$$= \sum_{i \neq i_0} \sum_{\boldsymbol{x}} \Pr\left\{X^n = \boldsymbol{x}\right\} \Pr\left\{Y^n(X^n) \in \tilde{\mathcal{B}}_n(\boldsymbol{x})\right\} \tag{65}$$

と表される．ここで $\Pr\{Y^n(X^n) \in \tilde{\mathcal{B}}_n(\boldsymbol{x})\}$ は通信路の出力 $Y^n(X^n)$ が $\mathcal{B}_n(\boldsymbol{x})$ に入る確率なので，式 (65) は

$$\sum_{i \neq i_0} \sum_{\boldsymbol{x}} \Pr\{X^n = \boldsymbol{x}\} \Pr\left\{Y^n(X^n) \in \tilde{\mathcal{B}}_n(\boldsymbol{x})\right\} \tag{66}$$

$$= \sum_{i \neq i_0} \sum_{\boldsymbol{x}} \sum_{\boldsymbol{y} \in \tilde{\mathcal{B}}_n(\boldsymbol{x})} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) \Pr\{Y^n(X^n) = \boldsymbol{y}\} \tag{67}$$

$$= \sum_{i \neq i_0} \sum_{\boldsymbol{x}} \sum_{\boldsymbol{y} \in \tilde{\mathcal{B}}_n(\boldsymbol{x})} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) P_{Y^n(X^n)}(\boldsymbol{y}) \tag{68}$$

と表される．ここで，$\boldsymbol{y} \in \tilde{\mathcal{B}}_n(\boldsymbol{x})$ ならば

$$\frac{1}{n} \log \frac{W^n(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})}{P_{Y^n(X^n)}(\boldsymbol{y})} \geq R + \gamma \tag{69}$$

すなわち

$$P_{Y^n(X^n)}(\boldsymbol{y}) \leq W^n(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) e^{-n(R+\gamma)} \tag{70}$$

となる．よって式 (68) は

$$\sum_{i\neq i_0}\sum_{\boldsymbol{x}}\sum_{\boldsymbol{y}\in\tilde{\mathcal{B}}_n(\boldsymbol{x})} P_{X^n}(\boldsymbol{x})P_{Y^n(X^n)}(\boldsymbol{y}) \tag{71}$$

$$\leq \sum_{i\neq i_0}\sum_{\boldsymbol{x}}\sum_{\boldsymbol{y}\in\tilde{\mathcal{B}}_n(\boldsymbol{x})} P_{X^n}(\boldsymbol{x})W^n(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})e^{-n(R+\gamma)} \tag{72}$$

$$= \sum_{i\neq i_0}\sum_{\boldsymbol{x}}\sum_{\boldsymbol{y}\in\tilde{\mathcal{B}}_n(\boldsymbol{x})} P_{X^nY^n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})e^{-n(R+\gamma)} \tag{73}$$

$$\leq \sum_{i\neq i_0} e^{-n(R+\gamma)} \tag{74}$$

$$=(M_n-1)e^{-n(R+\gamma)} \tag{75}$$

$$\leq M_n e^{-n(R+\gamma)} \tag{76}$$

$$=e^{nR}e^{-n(R+\gamma)} \tag{77}$$

$$=e^{-n\gamma} \tag{78}$$

と表される．尚，式 (77) では $M_n = e^{nR}$ を用いた．以上の評価より，$\bar{\varepsilon}_n(i_0)$ は

$$\bar{\varepsilon}_n(i_0) \leq \Pr\left\{Y^n(\bar{\varphi}_n(i_0)) \notin \tilde{\mathcal{B}}_n(\bar{\varphi}_n(i_0))\right\} + \sum_{i\neq i_0}\Pr\left\{Y^n(\bar{\varphi}_n(i_0)) \in \tilde{\mathcal{B}}_n(\bar{\varphi}_n(i))\right\} \tag{79}$$

$$\leq \Pr\left\{Y^n(X^n) \notin \tilde{\mathcal{B}}_n(X^n)\right\} + e^{-n\gamma} \tag{80}$$

と書ける．ここですべての符号において平均した誤り確率 $\bar{\varepsilon}_n$ は，メッセージが等確率で送られるので

$$\bar{\varepsilon}_n = \frac{1}{M_n}\sum_{i=1}^{M_n}\bar{\varepsilon}_n(i) \tag{81}$$

$$\leq \frac{1}{M_n}\sum_{i=1}^{M_n}\left(\Pr\left\{Y^n(X^n) \notin \tilde{\mathcal{B}}_n(X^n)\right\} + e^{-n\gamma}\right) \tag{82}$$

$$= \Pr\left\{Y^n(X^n) \notin \tilde{\mathcal{B}}_n(X^n)\right\} + e^{-n\gamma} \tag{83}$$

が成立し，式 (60) より

$$\bar{\varepsilon}_n \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{84}$$

となる事が分かる．

次にランダムな符号 $\mathcal{Q}_n$ のすべてにわたるコスト超過確率の期待値 $\bar{o}_n(\theta)$ を評価する．

$\bar{o}_n(\theta)$ は，ランダムな符号語 $\bar{\varphi}_n(i)$ を用いると

$$\bar{o}_n(\theta) = \frac{1}{M_n}\sum_{i=1}^{M_n} \Pr\left\{\frac{1}{n}c_n(Y^n(\bar{\varphi}_n(i))) > \theta\right\} \tag{85}$$

$$= \frac{1}{M_n}\sum_{i=1}^{M_n} \Pr\left\{\frac{1}{n}c_n(Y^n(X^n)) > \theta\right\} \tag{86}$$

$$= \Pr\left\{\frac{1}{n}c_n(Y^n(X^n)) > \theta\right\} \tag{87}$$

と表される．さらに式 (44) と式 (47) より，$\bar{o}_n(\theta)$ は $\theta > \Gamma$ のとき

$$\bar{o}_n(\theta) \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{88}$$

となる事が分かる．

以上の結果を用いて，誤り確率とコスト超過確率がどちらも 0 に収束する符号が存在する事を示すために $\bar{\varepsilon}_n + \bar{o}_n(\theta)$ を評価する．式 (84) と式 (88) より，$\bar{\varepsilon}_n + \bar{o}_n(\theta)$ は

$$\bar{\varepsilon}_n + \bar{o}_n(\theta) \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{89}$$

となる．$\bar{\varepsilon}_n$ と $\bar{o}_n(\theta)$ はランダムな符号に関する期待値なので，式 (89) より，ランダムでないある符号 (φ_n, ψ_n) が存在し，その誤り確率 ε_n とコスト超過確率 $o_n(\theta)$ に関して $\varepsilon_n + o_n(\theta) \le \bar{\varepsilon}_n + \bar{o}_n(\theta)$ が成り立ち，$\varepsilon_n \to 0$ かつ $o_n(\theta) \to 0$ となる事が分かる．ただし符号 (φ_n, ψ_n) のコスト超過確率 $o_n(\theta)$ は

$$o_n(\theta) \triangleq \Pr\left\{\frac{1}{n}c_n(Y^n(\varphi_n(U_M))) > \theta\right\} \tag{90}$$

と定義される．したがって，確率的上極限の定義に当てはめると

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}c_n(Y^n(\varphi_n(U_{M_n}))) \le \theta \tag{91}$$

が成立する．$\theta > \Gamma$ は任意なので，$\theta \to \Gamma$ とすると

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}c_n(Y^n(\varphi_n(U_{M_n}))) \le \Gamma \tag{92}$$

を満たす．符号化レートについては，$R = \underline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) - 2\gamma$ より

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log M_n \ge R = \underline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) - 2\gamma \tag{93}$$

を満たしている．以上より $R = \underline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) - 2\gamma$ は Γ-達成可能なので

$$C(\Gamma) \ge \underline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) - 2\gamma \tag{94}$$

となる．$\gamma > 0$ は任意だったので，$\gamma \to 0$ とすると

$$C(\Gamma) \geq \underline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) \tag{95}$$

となる．$\boldsymbol{X}$ は $\bar{c}(\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) \leq \Gamma$ を満たすと考えていたので

$$C(\Gamma) \geq \sup_{\boldsymbol{X}:\bar{c}(\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}))\leq\Gamma} \underline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) \tag{96}$$

が成り立つ．□

5　まとめ

本研究ではレート・歪み理論における補題と，コスト制約付き通信路符号化の順定理をランダム符号化を用いて証明した．レート・歪み理論においては，任意の集合を用い，$\mathcal{S}_n$ を未定義のまま証明を行った．その際，ランダム符号化において，送信されたメッセージの判断を歪みで決める事が出来ないため，集合 $\mathcal{T}_n$ に入っているか入っていないかで判断することにした．また既存のランダム符号化の証明と似たような形で示すことができた．コスト制約付き通信路符号化においては，誤り確率とコスト超過の確率を同時に評価する必要がある．本研究では両者とも $n \to \infty$ のとき 0 に収束する必要があるため，両者の和をとることでうまく 0 に収束させることができたが，誤り確率の条件を緩和した通信路符号化においてはこの方法は適用できないと考えられる．

謝辞

本研究を行うにあたり，丁寧なご指導を賜りました指導教員の西新幹彦准教授に感謝の意を表する．

参考文献

[1] 韓 太舜，情報理論における情報スペクトル的方法，培風館，1998.

[2] 伊藤佑樹，西新幹彦，「ランダム符号化を用いない一般情報源に対するレート・歪み理論の順定理」，第 41 回情報理論とその応用シンポジウム (SITA2018), pp.137–142, 2018 年 12 月.

[3] Mikihiko Nishiara, “Channel Coding with Cost Paid on Delivery,” IEICE TRANSACTIONS on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, Vol.E105-A, No.3, pp.345–352, March 2022.

付録 A

ここでは 3 章で証明した補題 1 を使用し，一般情報源に対するレート・歪み理論の順定理を示す．

〔定理 2 の証明〕$\overline{D}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) \leq D$ を満たす任意の Y を考える．次に γ を任意の正の定数として

$$R_n \triangleq \overline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) + 2\gamma \tag{97}$$

$$\mathcal{S}_n(\boldsymbol{y}) \triangleq \left\{ x \,\middle|\, \frac{1}{n} d_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leq D + \gamma \right\} \tag{98}$$

とし，補題 1 を用いる．すると，ある (φ_n, ψ_n) が存在し，

$$\frac{1}{n}\log M_n \leq \overline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) + 2\gamma \tag{99}$$

$$\Pr\left\{ \frac{1}{n} d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) > D + \gamma \right\} \tag{100}$$

$$\leq \Pr\left\{ \frac{1}{n}\log\frac{W_n(X^n|Y^n)}{P_{X^n}(X^n)} > \overline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) + \gamma, \quad \frac{1}{n} d_n(X^n, Y^n) > D + \gamma \right\} + \exp(-e^{n\gamma}) \tag{101}$$

$$\leq \Pr\left\{ \frac{1}{n}\log\frac{W_n(X^n|Y^n)}{P_{X^n}(X^n)} > \overline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) + \gamma \right\} + \Pr\left\{ \frac{1}{n} d_n(X^n, Y^n) > D + \gamma \right\} + \exp(-e^{n\gamma}) \tag{102}$$

が成り立つ．式 (99) より

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log M_n \leq \overline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) + 2\gamma \tag{103}$$

となる．ここで式 (102) の各項について評価する．第 1 項目は，$\overline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y})$ の定義より

$$\Pr\left\{ \frac{1}{n}\log\frac{W_n(X^n|Y^n)}{P_{X^n}(X^n)} > \overline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) + \gamma \right\} \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{104}$$

と表される．第 2 項目について，$\gamma > 0$ の代わりに，$n \to \infty$ のとき $\gamma_n \to 0$ となるような γ_n を用いると，

$$\Pr\left\{ \frac{1}{n} d_n(X^n, Y^n) > D + \gamma_n \right\} \to 0 \tag{105}$$

が成り立つ (対角線論法)．第 3 項目は，極限をとると

$$\exp(-e^{n\gamma}) \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{106}$$

と表せる．以上より，

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) > D + \gamma_n\right\} = 0 \tag{107}$$

が成り立つ．したがって，確率的上極限の定義より

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{n}d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) - \gamma_n\right\} \leq D \tag{108}$$

である．$\gamma_n \to 0$ より

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) \leq D \tag{109}$$

よって式 (103) と式 (109) より，$\overline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) + 2\gamma$ は D-達成可能である．つまり

$$R(D) \leq \overline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) + 2\gamma \tag{110}$$

である．$\gamma > 0$ は任意だったので，$\gamma \to 0$ とすると

$$R(D) \leq \overline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) \tag{111}$$

さらに $\boldsymbol{Y}$ の任意性より

$$R(D) \leq \inf_{Y:\overline{D}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\leq D} \overline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) \tag{112}$$

が成り立つ．よって順定理が証明された．□