

信州大学
大学院総合理工学研究科

修士論文

コスト超過を許容したコスト制約付き通信路符号化

指導教員 西新 幹彦 准教授

工学専攻 電子情報システム工学分野

学籍番号 20W2085G

氏名 堀 真樹

2022 年 3 月 5 日

目次

1	はじめに	2
2	先行研究	2
2.1	一般通信路における Γ -通信路容量	3
2.2	一般通信路における (ε, Γ) -通信路容量	6
3	Feinstein の補題の拡張	7
4	復号誤りとコスト超過を許容したコスト制約付き通信路符号化定理	12
4.1	証明	12
4.2	復号誤りとコスト超過の許容による通信路容量向上の例	15
5	漸近的成本制約付き通信路符号化定理	16
5.1	証明	17
5.2	既存のコスト超過の定義との比較	20
5.3	定常無記憶通信路における漸近的 Γ 通信路容量	23
6	まとめ	25
7	謝辞	25
	参考文献	26

1 はじめに

通信路符号化問題では送り手と受け手の間の通信路の存在を仮定し、送り手から送られたメッセージを受け手が正しく受け取るための伝送レートと復号誤り確率の関係について取り扱う。実際のメッセージの送信には時間や電力といった何らかのコストを要する。符号語にかかるコストに制約をおいた問題をコスト制約付き通信路符号化問題という。韓 [1] は、符号語に対するコスト制約が各ブロック長において満たす場合についての一般通信路に対する通信路容量を明らかにした。

本論文では、コスト制約付き通信路符号化問題の拡張と、コスト制約の定義の緩和を試みる。

はじめに、既存のコスト制約付き通信路符号化定理を拡張し、コスト超過を確率的に許容した問題設定を考え、そのときの通信路容量に関する定理を明らかにする。さらに、復号誤りとコスト超過を許すことで通信路容量が向上する一例を挙げる。

次に、十分大きな符号語長で、コスト制約を満たす確率が漸近的に 1 に近づくような符号を考える。このような問題設定を、漸近的成本制約付き通信路符号化問題と呼ぶことにする。そして、コスト超過と復号誤りをそれぞれ許容した漸近的成本制約付き通信路符号化定理を示す。

加えて、コストが入力関数として定められている場合、本論文で定めたコスト制約は、先行研究の制約よりも緩和されており、このときの通信路容量は真に大きくなる場合があることを確認した。

これらの証明のため、本研究では Feinstein の補題を拡張した新たな補題を証明した。この補題の証明では、二段階にわたる符号の構築という、新たな手法を用いており、本研究における最も重要な成果といえる。

2 先行研究

はじめに、本論文の先行研究となる、コスト制約付き通信路符号化定理について復習する。送り手が選ぶ M_n 個のメッセージの集合を $\mathcal{M}_n = \{1, 2, \dots, M_n\}$ とし、通信路への入力および出力はそれぞれ入力アルファベット $\mathcal{X}$ ($\mathcal{X}$ は有限集合)、出力アルファベット $\mathcal{Y}$ の要素とする。このとき一般通信路は、系列長 n の入力系列 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{X}^n$ 、出力系列 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathcal{Y}^n$ を用いて、条件付き確率 $\mathbf{W} \triangleq \{W^n(\mathbf{y}|\mathbf{x})\}_{n=1}^{\infty}$ でモデル化される。

また、任意の入力系列 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n$ に対して実数 $c_n(\mathbf{x}) > 0$ を対応させ、 $c_n(\mathbf{x})$ を $\mathbf{x}$ のコストとよぶ。

メッセージは符号器 $\varphi_n : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{X}^n$ で符号化され、出力系列 $\mathbf{y}$ は復号器 $\psi_n : \mathcal{Y}^n \rightarrow \mathcal{M}_n$ で復号化される。このとき、 $\varphi_n(m)$ を $m \in \mathcal{M}_n$ の符号語という。 n と $\mathcal{M}_n$ が与えられたと

き、符号 (φ_n, ψ_n) の伝送レート R は、

$$R \triangleq \frac{1}{n} \log M_n \quad (1)$$

で与えられ、復号誤り確率 ε_n は

$$\varepsilon_n \triangleq \frac{1}{M_n} \sum_{m \in \mathcal{M}_n} W^n(\psi_n^{-1}(m)^c | \varphi_n(m)) \quad (2)$$

で与えられる．また、本論文では $\mathbb{N}$ は自然数全体を表し、断りの無い限り対数は自然対数を使用する．

まず、確率的（上／下）極限と呼ばれる概念を導入する．

定義 1 実数値に値をとる確率変数 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し、

$$p\text{-}\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \triangleq \inf \left\{ \theta \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \{A_n \geq \theta\} = 0 \right. \right\} \quad (3)$$

$$p\text{-}\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \triangleq \sup \left\{ \theta \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \{A_n \leq \theta\} = 0 \right. \right\} \quad (4)$$

とおく．式 (3) を確率的上極限、式 (4) を確率的下極限とよぶ．

次に、二つの確率変数列 $\mathbf{X} = \{X^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\mathbf{Y} = \{Y^n\}_{n=1}^{\infty}$ について、次を定義する．

定義 2 確率変数列に対して

$$\underline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \triangleq p\text{-}\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n | X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} \quad (5)$$

とし、これを $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ の相互情報量スペクトル下限と呼ぶ．

定義 3 確率変数列に対して

$$\underline{I}_{\varepsilon}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \triangleq \sup \left\{ \theta \left| \limsup_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n | X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} < \theta \right\} \leq \varepsilon \right. \right\} \quad (6)$$

とする．なお、 $\varepsilon = 0$ のとき式 (5) と式 (6) は一致する．

2.1 一般通信路における Γ -通信路容量

定義 4 任意の非負実数 R , Γ に対し、レート R が Γ -達成可能とは

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \quad (7)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq R \quad (8)$$

$$\frac{1}{n} c_n(\varphi_n(m)) \leq \Gamma \quad (\forall n \in \mathbb{N}, m = 1, 2, \dots, M_n) \quad (9)$$

を満たすような符号の列 $\{\varphi_n, \psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在することである.

定義 5 Γ -通信路容量 $C(\Gamma)$ を

$$C(\Gamma) \triangleq \sup \{ R | R \text{ が } \Gamma\text{-達成可能} \} \quad (10)$$

と定義する.

このとき以下の定理が成立することが知られている.

定理 1([1]) 一般通信路における Γ -通信路容量 $C(\Gamma)$ は

$$\mathcal{X}^n(\Gamma) \triangleq \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{X}^n \mid \frac{1}{n} c_n(\mathbf{x}) \leq \Gamma \right\} \quad (11)$$

として, すべての $n = 1, 2, \dots$ に対して,

$$\Pr \{ X^n \in \mathcal{X}^n(\Gamma) \} = 1 \quad (12)$$

を満たす入力過程 $\mathbf{X} = \{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ の全体を $\mathcal{S}_{\Gamma}$ で表し, $\mathbf{X}$ に対応する通信路 $\mathbf{W}$ の出力過程を $\mathbf{Y}$ とすると, 相互情報量スペクトル下限 $\underline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$ を用いて

$$C(\Gamma) = \sup_{\mathbf{X} \in \mathcal{S}_{\Gamma}} \underline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (13)$$

で与えられる.

また, 関数

$$c(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n c(x_i) \quad (14)$$

で表されるコストを加法的コストと呼ぶ. 加法的コストのもとでは, 定理 1 の特別な場合として, 次の定理が導かれることが示されている.

定理 2([1]) 加法的コスト制約のもとでの定常無記憶通信路 $\mathbf{W} = \{W\}$ の Γ -通信路容量 $C(\Gamma)$ は

$$C(\Gamma) = \sup_{X: E[c(X)] \leq \Gamma} I(X; Y) \quad (15)$$

で与えられる.

ここで, コスト制約と通信路容量の関係性を明瞭にするために, コストを導入した BSC モデルの例を通じてコスト制約の変化に伴う通信路容量のふるまいを確認する.

例 1 入力シンボル $\{0, 1\}$, 反転確率 f の二元対称通信路について. 入力コストが加法的で $c(0) = 1, c(1) = 2$ と与えられた際の, 変数 Γ におけるコスト制約付き通信路容量 $C(\Gamma)$ を考える. またこの例では, 底が 2 の対数を用いている. 二元対称通信路の通信路容量は, バイナリーエントロピー

$$h(f) \triangleq -f \log_2 f - (1 - f) \log_2 (1 - f) \quad (16)$$

を用いて

$$\begin{aligned} C(\Gamma) &= \sup_{X:c(x) \leq \Gamma} I(X; Y) \\ &= \max_{X:c(x) \leq \Gamma} H(Y) - h(f) \end{aligned} \quad (17)$$

と表される．このとき，出力 Y のエントロピーの $P_X(0)$ に関する一次導関数と二次導関数は，

$$\begin{aligned} H(Y) &= -P_Y(0) \log_2 P_Y(0) - P_Y(1) \log_2 P_Y(1) \\ &= -\{P_X(0)(1-f) + (1-P_X(0))f\} \log_2 \{P_X(0)(1-f) + (1-P_X(0))f\} \\ &\quad -\{P_X(0)f + (1-P_X(0))(1-f)\} \log_2 \{P_X(0)f + (1-P_X(0))(1-f)\} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{dH(Y)}{dP_X(0)} = (1-2f) \log_2 \frac{P_X(0)f + (1-P_X(0))(1-f)}{P_X(0)(1-f) + (1-P_X(0))f} \quad (19)$$

$$\frac{d^2 H(Y)}{dP_X^2(0)} = -\frac{(1-2f)^2}{\log_e 2} \left(\frac{1}{P_X(0)f + (1-P_X(0))(1-f)} + \frac{1}{P_X(0)(1-f) + (1-P_X(0))f} \right) \quad (20)$$

であるため， $P_X(0)$ に対する $H(Y)$ の概形は $P_X(0) = \frac{1}{2}$ で最大値 1 を取るような上に凸のグラフになる．例えば $f = 0.1$ とすると，出力エントロピー $H(Y)$ と $P_X(0)$ の関係は図 1 のようになる．

従って， $C(\Gamma)$ は Γ の値によって以下のように求まる．

$\Gamma < 1$ の場合，送信可能なシンボルは存在せず， $C(\Gamma) = 0$ になる． $1 \leq \Gamma < 1.5$ の場合，式 (17) および，先に求めた $H(Y)$ の概形から， Γ の増加に伴って $H(Y)$ の軌跡を描くように $C(\Gamma)$ が増加し， $\Gamma = 1.5$ で最大値をとる． $\Gamma \geq 1.5$ の場合， $P_X(0) = \frac{1}{2}$ で $H(Y)$ は最大値 1 をとることから $C(\Gamma) = 1 - h(f)$ となる．

例えば $f = 0.1$ とすると， $C(\Gamma)$ と Γ の関係は図 2 のようになる．

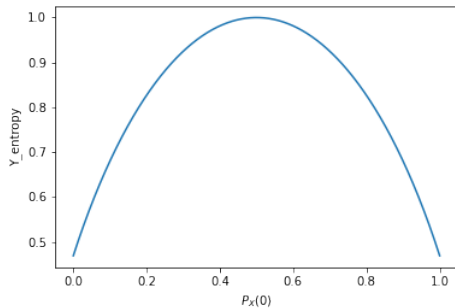


図 1 出力エントロピー

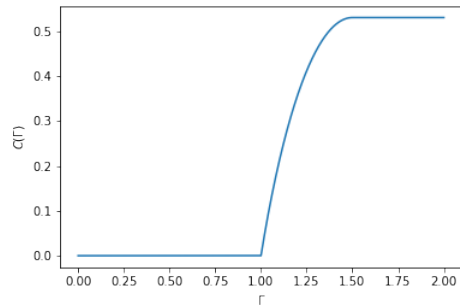


図 2 コスト制約付き通信路容量

2.2 一般通信路における (ε, Γ) -通信路容量

定理 1 を拡張し、誤り確率を任意の定数 $0 \leq \varepsilon < 1$ まで許容した問題設定についても既に考えられている。

定義 6 任意の非負実数 $R, \Gamma, 0 \leq \varepsilon < 1$ に対し、レート R が (ε, Γ) -達成可能とは、

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n \leq \varepsilon \quad (21)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq R \quad (22)$$

$$\frac{1}{n} c_n(\varphi_n(m)) \leq \Gamma \quad (\forall n \in \mathbb{N}, m = 1, 2, \dots, M_n) \quad (23)$$

を満たすような符号の列 $\{\varphi_n, \psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在することである。

定義 7 (ε, Γ) -通信路容量 $C(\varepsilon, \Gamma)$ を

$$C(\varepsilon, \Gamma) \triangleq \sup \{R | R \text{ が } (\varepsilon, \Gamma)\text{-達成可能} \} \quad (24)$$

と定義する。

このとき、以下の定理が成立することが知られている。

定理 3([1]) 一般通信路における (ε, Γ) -通信路容量 $C(\varepsilon, \Gamma)$ は、 $\underline{I}_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$ を用いて

$$C(\varepsilon, \Gamma) = \sup_{\mathbf{X} \in \mathcal{S}_\Gamma} \underline{I}_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (25)$$

で与えられる。

また、定理 1、定理 3 の証明にあたり以下の補題が用いられている。この補題は Feinstein の補題として知られている。

補題 1([2]) X^n を任意の通信路入力とし、それに対応する通信路 W^n の出力を Y^n とする。任意に与えられた正整数 M_n 、定数 $\gamma > 0$ に対して、

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}) \triangleq \left\{ \mathbf{y} \in \mathcal{Y}^n \mid \frac{1}{n} \log \frac{W^n(\mathbf{y} | \mathbf{x})}{P_{Y^n}(\mathbf{y})} \geq \frac{1}{n} \log M_n + \gamma \right\} \quad (26)$$

を定義する。このとき、

$$\varepsilon_n \leq \Pr \{Y^n \notin \mathcal{B}(X^n)\} + e^{-n\gamma} \quad (27)$$

が成り立つような符号が存在する。

本研究ではこの補題を拡張した新たな補題を導いており、その詳細について次の章で述べる。

3 Feinstein の補題の拡張

定理 1 や定理 3 のさらなる拡張として、コスト超過を確率的に許容するような問題設定が考えられる。しかし、補題 1 のままではコストに関する操作が行えず、制約の緩和が困難である。そこで本研究では、補題 1 を拡張した新たな補題を証明した。

補題 2 X^n を任意の通信路入力とし、それに対応する通信路 W^n の出力を Y^n とする。任意に与えられた正整数 M_n 、定数 $\gamma > 0$ に対して、

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}) \triangleq \left\{ \mathbf{y} \in \mathcal{Y}^n \left| \frac{1}{n} \log \frac{W^n(\mathbf{y}|\mathbf{x})}{P_{Y^n}(\mathbf{y})} \geq \frac{1}{n} \log M_n + \gamma \right. \right\} \quad (28)$$

を定義する。このとき、空でない部分集合 $\mathcal{S}_n \subset \mathcal{X}^n$ に対して以下を満たす符号が存在する。

$$\varepsilon_n \leq \Pr \{Y^n \notin \mathcal{B}(X^n)\} + (1 + \Pr \{X^n \in \mathcal{S}_n\})e^{-n\gamma} \quad (29)$$

が成り立ち、さらに、 M_n 個の符号語のうち $P_{X^n}(\mathcal{S}_n)M_n$ 個が $\mathcal{S}_n$ に含まれる。

(証明)

通信路に対する符号 (φ_n, ψ_n) を、一段階目として $x \in \mathcal{S}_n$ から逐次的に構成し、さらに二段階目として $x \notin \mathcal{S}_n$ から逐次的に構成する。この際、 $\Pr \{X^n \in \mathcal{S}_n\} = 0$ であれば一段階目を、 $\Pr \{X^n \in \mathcal{S}_n\} = 1$ であれば二段階目を省略する。

(一段階目)

$\Pr \{X^n \in \mathcal{S}_n\} > 0$ を満たす場合を考える。

$$\lambda'_n \triangleq \Pr \{Y^n \notin \mathcal{B}(X^n) | X^n \in \mathcal{S}_n\} + e^{-n\gamma} \quad (30)$$

に対して、最初の符号語 $\varphi_n(1)$ として $W^n(\mathcal{B}(\mathbf{x})|\mathbf{x}) \geq 1 - \lambda'_n$ を満たす $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_n$ を任意に選び、その復号領域を $\psi_n^{-1}(1) \triangleq \mathcal{B}(\mathcal{S}_n, \varphi_n(1))$ と定義する。次に、 m 番目の符号語 $\varphi_n(m)$ として

$$W^n(\mathcal{B}(\mathbf{x}) \setminus \bigcup_{m' < m} \psi_n^{-1}(m') | \mathbf{x}) \geq 1 - \lambda'_n \quad (31)$$

を満たす $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_n$ を任意に選び、その復号領域を $\psi_n^{-1}(m) \triangleq \mathcal{B}(\varphi_n(m)) \setminus \bigcup_{m' < m} \psi_n^{-1}(m')$ と

する。この操作を繰り返し、式 (31) を満たすような符号語が L'_n 個選べたならば、 $\mathcal{D}' \triangleq \bigcup_{m \leq L'_n} \psi_n^{-1}(m)$ と定義する。このとき、自明に $\lambda'_n < 1$ が成り立つ。

ここで、 L'_n について評価するため、恒等式

$$\begin{aligned} \Pr \{Y^n \in \mathcal{B}(X^n), X^n \in \mathcal{S}_n\} &= \Pr \{Y^n \in \mathcal{B}(X^n) \cap \mathcal{D}', X^n \in \mathcal{S}_n\} \\ &\quad + \Pr \{Y^n \in \mathcal{B}(X^n) \setminus \mathcal{D}', X^n \in \mathcal{S}_n\} \end{aligned} \quad (32)$$

の右辺について考える。 $\mathcal{B}(\mathbf{x})$ の定義より、 $\mathbf{y} \in \mathcal{B}(\mathbf{x})$ であれば

$$\begin{aligned} \log \frac{W^n(\mathbf{y}|\mathbf{x})}{P_{Y^n}(\mathbf{y})} &\geq \log M_n + n\gamma \\ \Leftrightarrow P_{Y^n}(\mathbf{y}) &\leq \frac{W^n(\mathbf{y}|\mathbf{x})}{M_n} e^{-n\gamma} \end{aligned} \quad (33)$$

が成り立つため、式 (32) の右辺第 1 項に関しては、

$$\begin{aligned} \Pr \{Y^n \in \mathcal{B}(X^n) \cap \mathcal{D}', X^n \in \mathcal{S}_n\} &\leq \Pr \{Y^n \in \mathcal{D}', X^n \in \mathcal{S}_n\} \\ &= \sum_{m \leq L'_n} \Pr \{Y^n \in \psi_n^{-1}(m), X^n \in \mathcal{S}_n\} \\ &\leq \sum_{m \leq L'_n} \Pr \{Y^n \in \mathcal{B}(\varphi_n(m)), X^n \in \mathcal{S}_n\} \\ &\leq \sum_{m \leq L'_n} \Pr \{Y^n \in \mathcal{B}(\varphi_n(m))\} \\ &= \sum_{m \leq L'_n} \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{B}(\varphi_n(m))} P_{Y^n}(\mathbf{y}) \\ &\leq \sum_{m \leq L'_n} \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{B}(\varphi_n(m))} \frac{W^n(\mathbf{y}|\varphi_n(m))}{M_n} e^{-n\gamma} \\ &\leq \frac{L'_n}{M_n} e^{-n\gamma} \end{aligned} \quad (34)$$

と表せる。また、式 (32) の右辺第 2 項に関しては、 $\mathcal{D}'$ の定義より、すべての $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_n$ に対して $W^n(\mathcal{B}(\mathbf{x}) \setminus \mathcal{D}'|\mathbf{x}) < 1 - \lambda'_n$ が成り立つことから

$$\begin{aligned} \Pr \{Y^n \in \mathcal{B}(X^n) \setminus \mathcal{D}', X^n \in \mathcal{S}_n\} &= \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}_n} P_{X^n}(\mathbf{x}) W^n(\mathcal{B}(\mathbf{x}) \setminus \mathcal{D}'|\mathbf{x}) \\ &\leq \Pr \{X^n \in \mathcal{S}_n\} (1 - \lambda'_n) \end{aligned} \quad (35)$$

と表せ、式 (32) に対して式 (34)、式 (35) を用いると

$$\Pr \{Y^n \in \mathcal{B}(X^n), X^n \in \mathcal{S}_n\} \leq \frac{L'_n}{M_n} e^{-n\gamma} + \Pr \{X^n \in \mathcal{S}_n\} (1 - \lambda'_n) \quad (36)$$

となり、

$$\begin{aligned} \Pr \{Y^n \in \mathcal{B}(X^n) | X^n \in \mathcal{S}_n\} &\leq \frac{L'_n}{\Pr \{X^n \in \mathcal{S}_n\} M_n} e^{-n\gamma} + 1 - \lambda'_n \\ &= \frac{L'_n}{\Pr \{X^n \in \mathcal{S}_n\} M_n} e^{-n\gamma} \\ &\quad + 1 - \Pr \{Y^n \notin \mathcal{B}(X^n) | X^n \in \mathcal{S}_n\} - e^{-n\gamma} \end{aligned} \quad (37)$$

となる。ゆえに

$$\Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\} M_n \leq L'_n \quad (38)$$

が得られる。

また、符号語が無限大に選べる場合には、自明に式 (31) を満たすような符号語が $\Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\} M_n$ 個選べる。ここで、符号 $\{\varphi_n(1), \varphi_n(2), \dots, \varphi_n(\Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\} M_n)\}$ を正式な符号として採用する。なお、 $\Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\} M_n$ が整数でない場合には、切り上げた数までを符号語として採用するが、切り上げに伴う証明の変化は見られないため、以降 $\Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\} M_n$ を切り上げた数として扱う。

(二段階目)

$\Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\} < 1$ を満たす場合、 $m > \Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\} M_n$,

$$\lambda_n \triangleq \Pr\{Y^n \notin \mathcal{B}(X^n) | X^n \notin \mathcal{S}_n\} + \frac{e^{-n\gamma}}{\Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n\}} \quad (39)$$

に対し、 m 番目の符号語 $\varphi_n(m)$ として

$$\begin{aligned} & W^n(\mathcal{B}(\varphi_n(m)) \setminus (\bigcup_{m' \leq \Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\} M_n} \mathcal{B}(\varphi_n(m')) \\ & \cup \bigcup_{\Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\} M_n < m' < m} \mathcal{B}(\varphi_n(m')) | \mathbf{x}) \geq 1 - \lambda_n \end{aligned} \quad (40)$$

を満たす $\mathbf{x} \notin \mathcal{S}_n$ を任意に選び、その復号領域を $\psi_n^{-1}(m) \triangleq \mathcal{B}(\varphi_n(m)) \setminus \bigcup_{m' < m} \psi_n^{-1}(m')$ とする。この操作を繰り返し、(40) を満たすような符号語が $\Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\} M_n$ と合わせて L_n 個まで選べたならば、 $\mathcal{D} \triangleq \bigcup_{m \leq L_n} \psi_n^{-1}(m)$ と定義する。このとき自明に $\lambda_n < 1$ が成り立つ。また、 $\Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\} = 0$ の場合にも上記の手順に則って符号語を構成する。

ここで、 L_n の評価のために恒等式

$$\begin{aligned} \Pr\{Y^n \in \mathcal{B}(X^n), X^n \notin \mathcal{S}_n\} &= \Pr\{Y^n \in \mathcal{B}(X^n) \cap \mathcal{D}, X^n \notin \mathcal{S}_n\} \\ &+ \Pr\{Y^n \in \mathcal{B}(X^n) \setminus \mathcal{D}, X^n \notin \mathcal{S}_n\} \end{aligned} \quad (41)$$

の右辺について考える。 $B(\mathbf{x})$ の定義より、上式の右辺第 1 項に関しては

$$\begin{aligned}
\Pr\{Y^n \in \mathcal{B}(X^n) \cap \mathcal{D}, X^n \notin \mathcal{S}_n\} &\leq \Pr\{Y^n \in \mathcal{D}, X^n \notin \mathcal{S}_n\} \\
&= \sum_{m \leq L_n} \Pr\{Y^n \in \psi_n^{-1}(m), X^n \notin \mathcal{S}_n\} \\
&\leq \sum_{m \leq L_n} \Pr\{Y^n \in \mathcal{B}(\varphi_n(m)), X^n \notin \mathcal{S}_n\} \\
&\leq \sum_{m \leq L_n} \Pr\{Y^n \in \mathcal{B}(\varphi_n(m))\} \\
&\leq \sum_{m \leq L_n} \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{B}(\varphi_n(m))} P_{Y^n}(\mathbf{y}) \\
&\leq \sum_{m \leq L_n} \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{B}(\varphi_n(m))} \frac{W^n(\mathbf{y}|\varphi_n(m))}{M_n} e^{-n\gamma} \\
&\leq \frac{L_n}{M_n} e^{-n\gamma}
\end{aligned} \tag{42}$$

と表せ、右辺第 2 項に関しては、 $\mathcal{D}$ の定義より、すべての $\mathbf{x} \notin \mathcal{S}_n$ に対して $W^n(\mathcal{B}(\mathbf{x}) \setminus \mathcal{D}|\mathbf{x}) < 1 - \lambda_n$ が成り立つことから

$$\begin{aligned}
\Pr\{Y^n \in \mathcal{B}(X^n) \setminus \mathcal{D}, X^n \notin \mathcal{S}_n\} &= \sum_{\mathbf{x} \notin \mathcal{S}_n} P_{X^n}(\mathbf{x}) W^n(\mathcal{B}(\mathbf{x}) \setminus \mathcal{D}|\mathbf{x}) \\
&< \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n\} (1 - \lambda_n)
\end{aligned} \tag{43}$$

と表せることから

$$\Pr\{Y^n \in \mathcal{B}(X^n), X^n \notin \mathcal{S}_n\} \leq \frac{L_n}{M_n} e^{-n\gamma} + \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n\} (1 - \lambda_n) \tag{44}$$

となり、

$$\begin{aligned}
&\Pr\{Y^n \in \mathcal{B}(X^n) | X^n \notin \mathcal{S}_n\} \\
&\leq \frac{L_n}{M_n \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n\}} e^{-n\gamma} + 1 - \Pr\{Y^n \notin \mathcal{B}(X^n) | X^n \notin \mathcal{S}_n\} - \frac{e^{-n\gamma}}{\Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n\}}
\end{aligned} \tag{45}$$

となる。ゆえに

$$M_n \leq L_n \tag{46}$$

が得られる。

また、符号語が無限大に選べる場合には、自明に式 (40) を満たすような符号語が M_n 個選べる。

よって、符号 $\mathcal{C}_n = \{\varphi_n(1), \varphi_n(2), \dots, \varphi_n(L_n)\}$ からサイズ M_n の部分符号 $\mathcal{C}_n^* = \{\varphi_n(1), \varphi_n(2), \dots, \varphi_n(M_n)\}$ が取り出せることが分かる。

さて、この部分符号 $\mathcal{C}_n^*$ の復号誤り確率 ε_n は $0 < P_{X^n}(\mathcal{S}_n) < 1$ の場合、

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n &\triangleq 1 - \frac{1}{M_n} \sum_{m \in \mathcal{M}_n} W^n(\psi_n^{-1}(m) | \varphi_n(m)) \\
&\leq 1 - \frac{1}{M_n} \left\{ \sum_{m=1}^{\Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\} M_n} (1 - \lambda'_n) + \sum_{m=\Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\} M_n + 1}^{M_n} (1 - \lambda_n) \right\} \\
&\leq 1 - \frac{1}{M_n} \{ \Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\} M_n (1 - \lambda'_n) + \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n\} M_n (1 - \lambda_n) \} \\
&= \Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\} \lambda'_n + \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n\} \lambda_n \\
&= \Pr\{Y^n \notin \mathcal{B}(X^n), X^n \in \mathcal{S}_n\} + \Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\} e^{-n\gamma} \\
&\quad + \Pr\{Y^n \notin \mathcal{B}(X^n), X^n \notin \mathcal{S}_n\} + e^{-n\gamma} \\
&= \Pr\{Y^n \notin \mathcal{B}(X^n)\} + (1 + \Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\}) e^{-n\gamma}
\end{aligned} \tag{47}$$

と表せる。また、 $P_{X^n}(\mathcal{S}_n) = 1$ の場合、

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n &\triangleq 1 - \frac{1}{M_n} \sum_{m \in \mathcal{M}_n} W^n(\psi_n^{-1}(m) | \varphi_n(m)) \\
&\leq 1 - \frac{1}{M_n} \sum_{m=1}^{M_n} (1 - \lambda'_n) \\
&= \lambda'_n \\
&= \Pr\{Y^n \notin \mathcal{B}(X^n) | X^n \in \mathcal{S}_n\} + e^{-n\gamma} \\
&\leq \Pr\{Y^n \notin \mathcal{B}(X^n)\} + (1 + \Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\}) e^{-n\gamma}
\end{aligned} \tag{48}$$

$P_{X^n}(\mathcal{S}_n) = 0$ の場合、

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n &\triangleq 1 - \frac{1}{M_n} \sum_{m \in \mathcal{M}_n} W^n(\psi_n^{-1}(m) | \varphi_n(m)) \\
&\leq 1 - \frac{1}{M_n} \sum_{m=1}^{M_n} (1 - \lambda_n) \\
&= \lambda_n \\
&= \Pr\{Y^n \notin \mathcal{B}(X^n) | X^n \notin \mathcal{S}_n\} + e^{-n\gamma} \\
&\leq \Pr\{Y^n \notin \mathcal{B}(X^n)\} + (1 + \Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\}) e^{-n\gamma}
\end{aligned} \tag{49}$$

と表せるため補題の主張が成立する。 □

なお、補題 2 は $\mathcal{S}_n$ を空集合とすれば補題 1 に帰着する形になっている。

4 復号誤りとコスト超過を許容したコスト制約付き通信路符号化定理

補題 2 で扱う S_n をコスト制約を満たすような集合として適用することで、コスト制約を満たす符号語の割合を制御できる。これを用いて、復号誤りとコスト超過を許容した一般通信路におけるコスト制約付き通信路符号化定理を示す。まずは、諸定義を用意する。

定義 8 通信路入力 $\mathbf{X} = \{X^n\}_{n=1}^\infty$ と $\mathbf{X}$ に対応する通信路出力 $\mathbf{Y} = \{Y^n\}_{n=1}^\infty$ 、任意の非負実数 $R, \Gamma, 0 \leq \varepsilon < 1, 0 \leq \beta < 1$ に対し、レート R が $(\varepsilon, \beta, \Gamma)$ -達成可能とは、

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n \leq \varepsilon \quad (50)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq R \quad (51)$$

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(U_{M_n})) > \Gamma \right\} \leq \beta \quad (\forall n \in \mathbb{N}, m = 1, 2, \dots, M_n) \quad (52)$$

を満たすような符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^\infty$ が存在することである。ただし、 U_{M_n} はメッセージ全体に一様に分布する確率変数である。

定義 9 コスト超過と復号誤りを許容した $(\varepsilon, \beta, \Gamma)$ -通信路容量 $C(\varepsilon, \beta, \Gamma)$ を

$$C(\varepsilon, \beta, \Gamma) \triangleq \sup \{R | R \text{ が } (\varepsilon, \beta, \Gamma)\text{-達成可能} \} \quad (53)$$

と定義する。

このとき、次の定理が成立する。

定理 4 一般通信路における $(\varepsilon, \beta, \Gamma)$ -通信路容量 $C(\varepsilon, \beta, \Gamma)$ は、

$$C(\varepsilon, \beta, \Gamma) = \sup_{\mathbf{X}: \Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(X^n)) > \Gamma \right\} \leq \beta} I_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (54)$$

で与えられる。

4.1 証明

証明は順定理

$$C(\varepsilon, \beta, \Gamma) \geq \sup_{\mathbf{X}: \Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(X^n)) > \Gamma \right\} \leq \beta} I_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (55)$$

と逆定理

$$C(\varepsilon, \beta, \Gamma) \leq \sup_{\mathbf{X}: \Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(X^n)) > \Gamma \right\} \leq \beta} I_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (56)$$

に分けられる.

順定理

$$R < \sup_{\mathbf{X}: \Pr\{\frac{1}{n}c_n(\varphi_n(X^n)) > \Gamma\} \leq \beta} \underline{I}_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$$

なる任意の R を考える.

$$R = \sup_{\mathbf{X}: \Pr\{\frac{1}{n}c_n(\varphi_n(X^n)) > \Gamma\} \leq \beta} \underline{I}_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) - 2\gamma \quad (57)$$

とすると, $\Pr\{\frac{1}{n}c_n(\varphi_n(U_{M_n})) > \Gamma\} \leq \beta$ であるようなある入力 $\mathbf{X} = \{X^n\}_{n=1}^\infty$ が存在して

$\underline{I}_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) > R + \gamma$ となる. 一方, $M_n = e^{nR}$ とおくと $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq R$ が成立する.

また, $\mathbf{Y} = \{Y^n\}_{n=1}^\infty$ を $\mathbf{X}$ の通信路出力とする. ここで, $\mathcal{S}_n \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n \mid \frac{1}{n}c_n(\mathbf{x}) \leq \Gamma\}$ と定め, 補題 2 を適用すると, 符号語のうち $\Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\} M_n$ 個が $\mathcal{S}_n$ に含まれるような

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &\leq \Pr\{Y^n \notin \mathcal{B}(X^n)\} + (1 + \Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\})e^{-n\gamma} \\ &= \Pr\left\{\frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n|X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} < R + \gamma\right\} + (1 + \Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\})e^{-n\gamma} \end{aligned} \quad (58)$$

を満たす符号が存在する. 今 $\underline{I}_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) > R + \gamma$ であるから, 式 (58) の両辺の上極限をとると, $\underline{I}_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$ の定義より,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n \leq \varepsilon \quad (59)$$

となる.

また, 入力 $\mathbf{X}$ の範囲から

$$\Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\} \geq 1 - \beta \quad (60)$$

が成り立ち, さらに, 少なくとも $\Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\} M_n$ 個の符号語が $\mathcal{S}_n$ に含まれるため,

$$\begin{aligned} \Pr\left\{\frac{1}{n}c_n(\varphi_n(U_{M_n})) > \Gamma\right\} &= \frac{1}{M_n} \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \mathbb{1}\left\{\frac{1}{n}c_n(\varphi_n(m)) > \Gamma\right\} \\ &= \frac{1}{M_n} \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \mathbb{1}\{\varphi_n(m) \notin \mathcal{S}_n\} \\ &\leq \frac{1}{M_n} \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n\} M_n \\ &= \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n\} \\ &\leq \beta \end{aligned} \quad (61)$$

が得られる．よって R は $(\varepsilon, \beta, \Gamma)$ -達成可能．すなわち

$$C(\varepsilon, \beta, \Gamma) \geq \sup_{\mathbf{X}: \Pr\left\{\frac{1}{n}c_n(\varphi_n(X^n)) > \Gamma\right\} \leq \beta} \underline{I}_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) - 2\gamma \quad (62)$$

となるが、 $\gamma > 0$ は任意だったので

$$C(\varepsilon, \beta, \Gamma) \geq \sup_{\mathbf{X}: \Pr\left\{\frac{1}{n}c_n(\varphi_n(X^n)) > \Gamma\right\} \leq \beta} \underline{I}_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (63)$$

となり、順定理が示せた。□

逆定理 逆定理の証明のため、次の補題を使う。

補題 3 ([3]) メッセージの集合 $\mathcal{M}_n$ のサイズが M_n 、誤り確率が ε_n である符号 (φ_n, ψ_n) に対し、 $X^n \triangleq \varphi_n(U_{M_n})$ とし、 X^n を入力とする通信路 W^n の出力を Y^n とすると、各 $n = 1, 2, \dots$ に対して

$$\varepsilon_n \geq \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n | X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} \leq \frac{1}{n} \log M_n - \gamma \right\} - e^{-n\gamma} \quad (64)$$

が成立する．ただし、 $\gamma > 0$ は任意の定数である．

逆定理の証明

R が $(\varepsilon, \beta, \Gamma)$ -達成可能であるとする．すなわち、定義 7 を満たすような符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^\infty$ が存在したとする． $X^n \triangleq \varphi_n(U_{M_n})$ とし、 X^n を入力とする通信路 W^n の出力を Y^n として、 $\mathbf{X} = \{X^n\}_{n=1}^\infty$ 、 $\mathbf{Y} = \{Y^n\}_{n=1}^\infty$ とおく．定義 7 より $\mathbf{X}$ は $\Pr \left\{ \frac{1}{n}c_n(\varphi_n(X^n)) > \Gamma \right\} \leq \beta$ を満たす．ここで、 $\gamma > 0$ を任意の定数とすれば、補題 3 より

$$\varepsilon_n \geq \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n | X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} \leq \frac{1}{n} \log M_n - \gamma \right\} - e^{-n\gamma} \quad (65)$$

が成立する．また、 $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq R$ より、十分大きなすべての n で $\frac{1}{n} \log M_n \geq R - \gamma$ が成り立ち、

$$\varepsilon_n \geq \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n | X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} \leq R - 2\gamma \right\} - e^{-n\gamma} \quad (66)$$

と表せる．さらに両辺の上極限をとると

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n | X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} \leq R - 2\gamma \right\} \quad (67)$$

が得られ、 R は $(\varepsilon, \beta, \Gamma)$ -達成可能であるため、

$$\varepsilon \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n | X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} \leq R - 2\gamma \right\} \quad (68)$$

が成り立つ．さらに， $\underline{I}_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$ の定義より

$$R - 2\gamma \leq \underline{I}_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (69)$$

となり， $\gamma > 0$ は任意なので

$$R \leq \underline{I}_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (70)$$

と表せる．いま， $\mathbf{X}$ は $\Pr\left\{\frac{1}{n}c_n(\varphi_n(X^n)) > \Gamma\right\} \leq \beta$ を満たすので

$$R \leq \sup_{\mathbf{X}: \Pr\left\{\frac{1}{n}c_n(\varphi_n(X^n)) > \Gamma\right\} \leq \beta} \underline{I}_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (71)$$

が成り立ち， R は $(\varepsilon, \beta, \Gamma)$ -達成可能なため， $(\varepsilon, \beta, \Gamma)$ -通信路容量 $C(\varepsilon, \beta, \Gamma)$ は

$$C(\varepsilon, \beta, \Gamma) \leq \sup_{\Pr\left\{\frac{1}{n}c_n(\varphi_n(X^n)) > \Gamma\right\} \leq \beta} \underline{I}_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (72)$$

となる．よって，逆定理が示せた． $\square$

4.2 復号誤りとコスト超過の許容による通信路容量向上の例

ここで，復号誤りとコスト超過を同時に許容した場合にみられる，興味深い例を挙げる．

例 2 雑音の無い二元通信路を考える．そして，入力系列を 2 進数 $\mathbf{x}_{(2)}$ と見做し，このときの値が $\mathbf{x}_{(2)} \leq 2^{\frac{n}{2}}$ であればコスト $c_n(\mathbf{x}) = n$ を， $\mathbf{x}_{(2)} > 2^{\frac{n}{2}}$ であればコスト $c_n(\mathbf{x}) = 2n$ をとるとする．さらに，コスト制約 Γ が $1 < \Gamma < 2$ の定数で与えられ，コスト超過確率 β ，復号誤り確率 ε を許容するとして，このときの通信路容量について考える．

いま，通信路に雑音が無いことに注意すると，定理 4 より通信路容量は

$$\begin{aligned} C(\varepsilon, \beta, \Gamma) &= \sup_{\mathbf{X}: \Pr\left\{\frac{1}{n}c_n(\varphi_n(X^n)) > \Gamma\right\} \leq \beta} \underline{I}_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \\ &= \sup_{\mathbf{X}: \Pr\left\{\frac{1}{n}c_n(\varphi_n(X^n)) > \Gamma\right\} \leq \beta} \sup \left\{ \theta \left| \limsup_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log_2 \frac{W^n(Y^n|X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} < \theta \right\} \leq \varepsilon \right. \right\} \\ &= \sup_{\mathbf{X}: \Pr\left\{\frac{1}{n}c_n(\varphi_n(X^n)) > \Gamma\right\} \leq \beta} \sup \left\{ \theta \left| \limsup_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log_2 \frac{1}{P_{X^n}(X^n)} < \theta \right\} \leq \varepsilon \right. \right\} \\ &= \sup_{\mathbf{X}: \Pr\left\{\frac{1}{n}c_n(\varphi_n(X^n)) > \Gamma\right\} \leq \beta} \underline{H}_\varepsilon(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (73)$$

と表せる．このとき， $\beta = 0$ の場合には，符号語は全てコスト n の入力系列となり，その一様分布を考えれば，

$$\frac{1}{n} \log_2 \frac{1}{P_{X^n}(\mathbf{x})} = \frac{1}{2} \quad (74)$$

と表せるため,

$$\begin{aligned} C(\varepsilon, \beta, \Gamma) &= \sup_{\mathbf{X}: \Pr\left\{\frac{1}{n}c_n(\varphi_n(X^n)) > \Gamma\right\} \leq \beta} \sup \left\{ \theta \left| \limsup_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{2} < \theta \right\} \leq \varepsilon \right. \right\} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (75)$$

が得られる.

一方, $\beta > 0$ の場合, コスト n の系列の総確率が $1 - \beta$ になるような一様分布を考えると,

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} \log_2 \frac{1}{P_{X^n}(X^n)} = \frac{1}{2} \right\} = 1 - \beta \quad (76)$$

となる. このとき, $\beta > 1 - \varepsilon$ が成り立つならば, 式 (73) より

$$C(\varepsilon, \beta, \Gamma) \geq 1 \quad (77)$$

が得られ, $\beta = 0$ の場合より通信路容量が増加する.

一見すると, 雑音の無い通信路に対して復号誤りを許容すること自体が不可解に思えるかもしれない. しかしながらこれは, 復号誤りが許容される分だけエンコーダーが敢えて誤りながらも低コストの系列を送信することで通信路容量の向上を果たしているのだと考えられる.

従ってこの例は, コスト超過と復号誤りを許容した問題設定におけるエンコーダーの設計では, 自ら誤った通信を行い, コストの均衡を保つような機構を組み込むことで, 伝送レートの向上が図れる場合があることを示唆している.

5 漸近的成本制約付き通信路符号化定理

今までのコスト制約の定義では, 全ての符号語長でコスト制約を満たすことを要請している. しかしながら, 一文字当たりのコストが符号語長の増加に伴って指数関数的に減衰する場合など, 問題設定によっては制約の緩和が必要となる. そこで, コスト制約を, 十分大きな符号語長で制約を満たす確率が漸近的に 1 に近づくような定義に変更した, 漸近的成本制約付き通信路符号化問題を考える.

以下, 復号誤りとコスト超過を許容した一般通信路における漸近的成本制約付き通信路符号化定理を示すための諸定義を用意する.

定義 10 任意の $0 \leq \beta < 1$ に対して, 次を定義する.

$$\bar{c}_\beta(\mathbf{X}) \triangleq \inf \left\{ \theta \left| \limsup_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n}c_n(X^n) > \theta \right\} \leq \beta \right. \right\} \quad (78)$$

定義 11 任意の非負実数 $R, \Gamma, 0 \leq \varepsilon < 1, 0 \leq \beta < 1$ に対し, レート R が漸近的に $(\varepsilon, \beta, \Gamma)$ -達成可能とは,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n \leq \varepsilon \quad (79)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq R \quad (80)$$

$$\bar{c}_\beta(\{\varphi_n(U_{M_n})\}_{n=1}^\infty) \leq \Gamma \quad (81)$$

を満たすような符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^\infty$ が存在することである. ただし, U_{M_n} はメッセージ全体に一樣に分布する確率変数である.

定義 12 コスト超過と復号誤りを許容した漸近的 $(\varepsilon, \beta, \Gamma)$ -通信路容量 $C_a(\varepsilon, \beta, \Gamma)$ を

$$C_a(\varepsilon, \beta, \Gamma) \triangleq \sup \{R \mid R \text{ が漸近的に } (\varepsilon, \beta, \Gamma)\text{-達成可能} \} \quad (82)$$

と定義する.

このとき, 次の定理が成立する.

定理 5 一般通信路における漸近的 $(\varepsilon, \beta, \Gamma)$ -通信路容量 $C_a(\varepsilon, \beta, \Gamma)$ は,

$$C_a(\varepsilon, \beta, \Gamma) = \sup_{\mathbf{X}: \bar{c}_\beta(\mathbf{X}) \leq \Gamma} \underline{I}_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (83)$$

で与えられる.

5.1 証明

証明は順定理

$$C_a(\varepsilon, \beta, \Gamma) \geq \sup_{\mathbf{X}: \bar{c}_\beta(\mathbf{X}) \leq \Gamma} \underline{I}_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (84)$$

と逆定理

$$C_a(\varepsilon, \beta, \Gamma) \leq \sup_{\mathbf{X}: \bar{c}_\beta(\mathbf{X}) \leq \Gamma} \underline{I}_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (85)$$

に分けられる.

順定理

$$R < \sup_{\mathbf{X}: \bar{c}_\beta(\mathbf{X}) \leq \Gamma} \underline{I}_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$$

なる任意の R を考える.

$$R = \sup_{\mathbf{X}: \bar{c}_\beta(\mathbf{X}) \leq \Gamma} \underline{I}_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) - 2\gamma \quad (86)$$

とすると, $\bar{c}_\beta(\mathbf{X}) \leq \Gamma$ であるようなある入力 $\mathbf{X} = \{X^n\}_{n=1}^\infty$ が存在して $\underline{I}_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) > R + \gamma$

となる. 一方, $M_n = e^{nR}$ とおくと $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq R$ が成立する.

また, $\mathbf{Y} = \{Y^n\}_{n=1}^\infty$ を $\mathbf{X}$ の通信路出力とする. $\bar{c}_\beta(\mathbf{X})$ の定義より, $\forall k \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(X^n) > \Gamma + \frac{1}{k} \right\} \leq \beta \quad (87)$$

となり, 十分大きな全ての n で

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(X^n) > \Gamma + \frac{1}{k} \right\} < \beta + \frac{1}{k} \quad (88)$$

となる. このとき各 n に対して上式を満たす最大の k が決まる. その k を用いて $\gamma_n \triangleq \frac{1}{k}$ とおくと, $n \rightarrow \infty$ で $\gamma_n \rightarrow 0$ かつ

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(X^n) > \Gamma + \gamma_n \right\} \leq \beta \quad (89)$$

となる. ここで,

$$\mathcal{S}_n \triangleq \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{X}^n \mid \frac{1}{n} c_n(\mathbf{x}) \leq \Gamma + \gamma_n \right\} \quad (90)$$

と定義する.

補題 2 を適用すると, 符号語のうち $\Pr \{X^n \in \mathcal{S}_n\} M_n$ 個が $\mathcal{S}_n$ に含まれるような

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &\leq \Pr \{Y^n \notin \mathcal{B}(X^n)\} + (1 + \Pr \{X^n \in \mathcal{S}_n\}) e^{-n\gamma} \\ &= \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n | X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} < R + \gamma \right\} + (1 + \Pr \{X^n \in \mathcal{S}_n\}) e^{-n\gamma} \end{aligned} \quad (91)$$

を満たす符号が存在する. 今 $\underline{I}_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) > R + \gamma$ であるから, 式 (91) の両辺の上極限をとると, $\underline{I}_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$ の定義より,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n \leq \varepsilon \quad (92)$$

となる.

また, 式 (89) より

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \Pr \{X^n \in \mathcal{S}_n\} \geq 1 - \beta \quad (93)$$

となり, 任意の $\delta_1 > 0$ を用いると, 十分大きなすべての n で

$$\Pr \{X^n \in \mathcal{S}_n\} \geq 1 - \beta - \delta_1 \quad (94)$$

となる．さらに，少なくとも $\Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\} M_n$ 個の符号語が $\mathcal{S}_n$ に含まれるため，

$$\begin{aligned}
\Pr\left\{\frac{1}{n}c_n(\varphi_n(U_{M_n})) > \Gamma + \gamma_n\right\} &= \frac{1}{M_n} \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \mathbb{1}\left\{\frac{1}{n}c_n(\varphi_n(m)) > \Gamma + \gamma_n\right\} \\
&= 1 - \frac{1}{M_n} \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \mathbb{1}\left\{\frac{1}{n}c_n(\varphi_n(m)) \leq \Gamma + \gamma_n\right\} \\
&= 1 - \frac{1}{M_n} \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \mathbb{1}\{\varphi_n(m) \in \mathcal{S}_n\} \\
&\leq 1 - \frac{1}{M_n} \Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\} M_n \\
&= 1 - \Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\} \\
&\leq \beta + \delta_1
\end{aligned} \tag{95}$$

と表せる．ここで任意の $\delta > 0$ に対して，十分大きなすべての n で $\delta > \gamma_n$ であるから，

$$\begin{aligned}
&\Pr\left\{\frac{1}{n}c_n(\varphi_n(U_{M_n})) > \Gamma + \delta\right\} \\
&\leq \Pr\left\{\frac{1}{n}c_n(\varphi_n(U_{M_n})) > \Gamma + \gamma_n\right\} \leq \beta + \delta_1
\end{aligned} \tag{96}$$

が言える．さらに $\delta_1 > 0$ は任意だったので

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}c_n(\varphi_n(U_{M_n})) > \Gamma + \delta\right\} \leq \beta \tag{97}$$

となる．このとき

$$\bar{c}_\beta(\{\varphi_n(U_{M_n})\}_{n=1}^\infty) \leq \Gamma + \delta \tag{98}$$

が成り立つが， $\delta > 0$ は任意だったので

$$\bar{c}_\beta(\{\varphi_n(U_{M_n})\}_{n=1}^\infty) \leq \Gamma \tag{99}$$

が言える．よって R は漸近的に $(\varepsilon, \beta, \Gamma)$ -達成可能．すなわち

$$C_a(\varepsilon, \beta, \Gamma) \geq \sup_{\mathbf{X}: \bar{c}_\beta(\mathbf{X}) \leq \Gamma} \underline{I}_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) - 2\gamma \tag{100}$$

となるが， $\gamma > 0$ は任意だったので

$$C_a(\varepsilon, \beta, \Gamma) \geq \sup_{\mathbf{X}: \bar{c}_\beta(\mathbf{X}) \leq \Gamma} \underline{I}_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \tag{101}$$

となり，順定理が示せた． $\square$

逆定理 $\mathbf{X}$ の入力範囲を $\bar{c}_\beta(\mathbf{X}) \leq \Gamma$ に制限した上で定理 4 の逆定理の証明と同様の手順を辿れば容易に証明できる． $\square$

5.2 既存のコスト超過の定義との比較

先行の研究 [4] には、入力に対して確率的に相関があるコストを考えたものがあり、これは本研究で扱うコストを拡張したものとなっている。また、コストの制約も本研究より強い規準を用いている。具体的には、通信路への入力 $\mathbf{x}$ に対して 1 文字あたりのコストが θ より大きくなる確率を $V^n(\theta|\mathbf{x})$ と表し、

$$\bar{c}'_{\beta}(\mathbf{X}) \triangleq \inf \left\{ \theta \left| p\text{-}\limsup_{n \rightarrow \infty} V^n(\theta|X^n) \leq \beta \right. \right\} \quad (102)$$

と定めたうえで

$$\bar{c}'_{\beta}(\mathbf{X}) \leq \Gamma \quad (103)$$

によってコストを制約している。さらに、式 (80) におけるコスト制約を上式のように変更した際の漸近的 (β, Γ) 通信路容量を $C'_a(\beta, \Gamma)$ と表し、これについて以下の定理が成り立つことが示されている。

定理 6

$$C'_a(\beta, \Gamma) = \sup_{\mathbf{X}: \bar{c}'_{\beta}(\mathbf{X}) \leq \Gamma} \underline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (104)$$

が成り立つ。

ここでは、本研究のコスト制約式 (81) が式 (103) より緩い制約になっていることを確認し、また、この制約の緩和によって (β, Γ) -通信路容量 ($\varepsilon = 0$ における $C_a(\varepsilon, \beta, \Gamma)$ -通信路容量) が真に大きくなる場合があることを示す。

本研究では、コストは入力 $\mathbf{x}$ の関数 $c_n(\mathbf{x})$ と表されるため、これに合わせると

$$V^n(\theta|X^n) = \mathbb{1} \left\{ \frac{1}{n} c_n(X^n) > \theta \right\} \quad (105)$$

と表される。従って、制約の緩和を確認するためには

$$p\text{-}\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1} \left\{ \frac{1}{n} c_n(X^n) > \theta \right\} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(X^n) > \theta \right\} \quad (106)$$

を示せばよい。準備として、

$$Z_n = \mathbb{1} \left\{ \frac{1}{n} c_n(X^n) > \theta \right\} \quad (107)$$

とおけば、式 (106) は

$$p\text{-}\limsup_{n \rightarrow \infty} Z_n \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \Pr \{Z_n = 1\} \quad (108)$$

と書けることに注意しておく．

まず， $\limsup_{n \rightarrow \infty} \Pr \{Z_n = 1\} = 0$ の場合について考える．任意の $\xi \geq 0$ に対して， $\Pr \{Z_n > \xi\} \leq \Pr \{Z_n = 1\}$ より，

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \Pr \{Z_n > \xi\} = 0 \quad (109)$$

である．一方，任意の $\xi < 0$ に対して自明に

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \Pr \{Z_n > \xi\} = 1 \quad (110)$$

となる．従ってこれらのことから

$$p\text{-}\limsup_{n \rightarrow \infty} Z_n = 0 \quad (111)$$

となり，(108) が等号で成り立つ．次に， $\limsup_{n \rightarrow \infty} \Pr \{Z_n = 1\} > 0$ の場合について考える．任意の $\xi < 1$ に対して， $\Pr \{Z_n > \xi\} \geq \Pr \{Z_n = 1\}$ より

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \Pr \{Z_n > \xi\} > 0 \quad (112)$$

となる．一方， $\xi \geq 1$ に対しては，自明に

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \Pr \{Z_n > \xi\} = 0 \quad (113)$$

である．従って，

$$p\text{-}\limsup_{n \rightarrow \infty} Z_n = 1 \quad (114)$$

となり，式 (108) が成り立つ．

以上より制約の緩和が確認できた．

次に，コスト制約を緩和することで通信路容量が真に大きくなる場合があることを示す．そのような場合とは，

$$C(\beta, \Gamma) = \sup_{\mathbf{X}: \bar{c}_\beta(\mathbf{X}) \leq \Gamma} I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (115)$$

を達成する

$$\bar{c}_\beta(\mathbf{X}) = \Gamma \quad (116)$$

なる $\mathbf{X}$ が

$$p\text{-}\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} c_n(X^n) > \Gamma \quad (117)$$

となる場合である．実際にこれを満たすコスト関数が存在することは，式 (116)，式 (117) をそれぞれ

$$\inf \left\{ \theta \left| \limsup_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(X^n) > \theta \right\} \leq \beta \right. \right\} = \Gamma \quad (118)$$

$$\inf \left\{ \theta \left| \limsup_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(X^n) > \theta \right\} = 0 \right. \right\} > \Gamma \quad (119)$$

と書き換えることで容易にわかる．

このコスト関数に対して，式 (103) に従ってコストを制約した場合の通信路容量 $C'_a(\beta, \Gamma)$ について考える．

いま $\mathbf{X}$ は，式 (117) を満たすため，ある $\delta > 0$ を用いて

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(X^n) > \Gamma + \delta \right\} > 0 \quad (120)$$

が成り立ち，よって任意の $\xi < 1$ に対して，

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \mathbb{1} \left\{ \frac{1}{n} c_n(X^n) > \Gamma + \delta \right\} > \xi \right\} > 0$$

となる．これは

$$p\text{-}\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1} \left\{ \frac{1}{n} c_n(X^n) > \Gamma + \delta \right\} \geq 1 \quad (121)$$

を意味する．ここで $0 \leq \beta < 1$ であったことを思い出せば

$$p\text{-}\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1} \left\{ \frac{1}{n} c_n(X^n) > \Gamma + \delta \right\} > \beta \quad (122)$$

が得られ，

$$\bar{c}'_\beta(\mathbf{X}) = \inf \left\{ \theta \left| p\text{-}\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1} \left\{ \frac{1}{n} c_n(X^n) > \theta \right\} \leq \beta \right. \right\} \geq \Gamma + \delta > \Gamma \quad (123)$$

となる．すなわち $\mathbf{X}$ は，制約 $\bar{c}'_\beta(\mathbf{X})$ を満たさない．よってこの $\mathbf{X}$ は $\sup_{\mathbf{X}: \bar{c}'_\beta(\mathbf{X}) \leq \Gamma} \underline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$ を達成する $\mathbf{X}$ には成り得ない．従って式 (104) から

$$\begin{aligned} C'_a(\beta, \Gamma) &= \sup_{\mathbf{X}: \bar{c}'_\beta(\mathbf{X}) \leq \Gamma} \underline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \\ &< \sup_{\mathbf{X}: \bar{c}_\beta(\mathbf{X}) \leq \Gamma} \underline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) = C_a(\beta, \Gamma) \end{aligned} \quad (124)$$

となる．

5.3 定常無記憶通信路における漸近的 Γ 通信路容量

加法的コストの下で、復号誤りとコスト超過を許容しなければ、定理 5 の特別な場合として以下の定理が成り立つことを示す。

定理 7 加法的コスト制約のもとでの定常無記憶通信路 W における漸近的 Γ 通信路容量は、入力 X 、通信路 W の出力 Y を用いて

$$C_a(\Gamma) = \sup_{X: E[c(X)] \leq \Gamma} I(X; Y) \quad (125)$$

で与えられる。

(証明) 定理 5 より、証明のためには

$$\sup_{X: E[c(X)] \leq \Gamma} I(X; Y) = \sup_{\mathbf{X}: \bar{c}(\mathbf{X}) \leq \Gamma} \underline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (126)$$

が成り立つことを示せばよい。そこで、順定理と逆定理からなる二つの不等式を示すことで証明する。

順定理

$$\sup_{X: E[c(X)] \leq \Gamma} I(X; Y) \geq \sup_{\mathbf{X}: \bar{c}(\mathbf{X}) \leq \Gamma} \underline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (127)$$

を示す。まず、 $\bar{c}(\mathbf{X}) \leq \Gamma$ を満たす $\mathbf{X}$ を考える。一様確率変数 U_n を用いて $\overline{X}_n \triangleq X_{U_n}^{(n)}$ と定義する。このとき、コストは加法的であるため、

$$\begin{aligned} E[c(\overline{X}_n)] &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} E[c(X_i^{(n)})] \\ &= E\left[\frac{1}{n} c_n(X^n)\right] \end{aligned} \quad (128)$$

と表せ、さらに一様可積分性から、

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} E[c(\overline{X}_n)] &= \limsup_{n \rightarrow \infty} E\left[\frac{1}{n} c(X^n)\right] \\ &\leq p\text{-}\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} c_n(X^n) \\ &= \bar{c}(\mathbf{X}) \leq \Gamma \end{aligned} \quad (129)$$

となる．一方，

$$\begin{aligned} \underline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I(\overline{X}_n; Y_n | U_n) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I(\overline{X}_n; Y_n) \end{aligned} \quad (130)$$

が成り立っている．ここで， $E[c(\overline{X}_n)]$ が収束するような $\{\overline{X}_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列を考える．このとき集積点の一つを X と置くと，

$$E[c(X)] \leq \Gamma \quad (131)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} I(\overline{X}_n; Y_n) \leq I(X; Y) \quad (132)$$

が成り立ち，

$$\underline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \leq \sup_{X: E[c(X)] \leq \Gamma} I(X; Y) \quad (133)$$

と表せる． $\bar{c}(\mathbf{X}) \leq \Gamma$ を満たす任意の $\mathbf{X}$ でこれが成立し，

$$\sup_{\mathbf{X}: \bar{c}(\mathbf{X}) \leq \Gamma} \underline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \leq \sup_{X: E[c(X)] \leq \Gamma} I(X; Y) \quad (134)$$

が得られる．

逆定理

$$\sup_{\mathbf{X}: \bar{c}(\mathbf{X}) \leq \Gamma} \underline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \leq \sup_{X: E[c(X)] \leq \Gamma} I(X; Y) \quad (135)$$

を示す． $\overline{X}$ を $\sup_{X: E[c(X)] \leq \Gamma} I(X; Y)$ を達成する X とし， $\overline{X}^n = (\overline{X}_1^{(n)}, \overline{X}_2^{(n)}, \dots, \overline{X}_n^{(n)})$ を $\overline{X}$ の IID コピーとする．ここで， $\mathbf{X} \triangleq \{\overline{X}^n\}_{n=1}^{\infty}$ と定めると，ヒンチンの大数の法則 [5] から，

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{X}: \bar{c}(\mathbf{X}) \leq \Gamma} \underline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) &= I(\overline{X}; Y) \\ &\leq \sup_{X: E[c(X)] \leq \Gamma} I(X; Y) \end{aligned} \quad (136)$$

が得られる． □

定理 7 より，このときの通信路容量は，定理 2 に示したコスト制約付き通信路符号化定理の特別な場合と一致しており，加法的コスト制約のもとでの定常無記憶通信路においては，コスト制約の定義による通信路容量の差異は見られないことが分かる．

6 まとめ

本論文では、一般通信路におけるコスト制約付き通信路符号化定理に対して、定理の拡張と、制約の緩和を行い、その証明にあたって、Feinstein の補題を拡張した新たな補題を示した。定理の拡張については、既存のコスト制約に対して、コスト超過を確率的に許容した問題設定を考え、コスト超過と復号誤りの許容により通信路容量が向上する例を挙げた。制約の緩和では、コスト制約を十分大きな符号語長で漸近的に満たすような問題設定を考えた。

また、補題 2 で示した Feinstein の補題を拡張した新たな補題の $\mathcal{S}_n$ は、任意の集合で成り立つため、本論文で適用したようなコスト制約を満たす集合以外の集合に対しても適用でき、今後この補題を用いた新たな定理の証明が期待される。

さらに、この補題自体も $\mathcal{S}_n$ の種類を増やすといった拡張の余地があり、コスト制約の条件式を増やすことで、コストの分布のより柔軟な操作が期待できる。

7 謝辞

本研究を進めるにあたり、丁寧なご指導を頂いた西新幹彦准教授に感謝の意を表する。

参考文献

- [1] 韓太舜, 情報理論における情報スペクトル的方法, 培風館, 1998.
- [2] A.Feinstein, “A new basic theorem of information theory,” IRE Trans. PGIT, vol.4, pp.2-22, 1954.
- [3] S.Verdú and T.S.Han, “A general formula for channel capacity,” IEEE Transactions on Information Theory, vol.IT-40, no.40, pp.1147-1157, 1994.
- [4] M.Nishiara, “Channel Coding with Cost Paid on Delivery,” IEICE TRANSACTIONS on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, Vol.E105-A, No.3, pp.345-352, March 2022.
- [5] 西尾真喜子, 確率論, 実教出版, p.143, 1978.