

信州大学
大学院総合理工学研究科

修士論文

一般情報源の固定長符号化におけるレート・遅延理論

指導教員 西新 幹彦 准教授

専攻 工学専攻
分野 電子情報システム学分野
学籍番号 19W2026F
氏名 大橋 輝路

2021 年 2 月 18 日

目次

1	はじめに	1
2	符号化における遅延	2
3	入力長ごとに個別の符号を用いたときのレート・遅延関数	2
3.1	最大遅延制約のレート・遅延関数	2
3.2	平均遅延制約のレート・遅延関数	4
4	復号語の整合性を考慮したレート・遅延関数	10
4.1	最大遅延制約のレート・遅延関数	10
4.2	平均遅延制約のレート・遅延関数	11
5	二元定常無記憶情報源に対するレート・遅延関数	14
5.1	二元定常無記憶情報源に対する f_m -レート・遅延関数	14
5.2	二元定常無記憶情報源に対する f_a -レート・遅延関数	20
6	多元定常無記憶情報源に対するレート・遅延関数	21
6.1	多元定常無記憶情報源に対する f_m -レート・遅延関数	21
6.2	多元定常無記憶情報源に対する f_a -レート・遅延関数	25
7	まとめ	26
	謝辞	27
	参考文献	27
	付録 A 定理 1 の証明	28
	付録 B 定理 3 の証明	31

1 はじめに

近年の自然災害の増加などから、早く情報を伝えることがより必要になっており、低遅延通信の重要性が高まってきている。また、コストなどの問題から符号化レートも小さくしたい。そこで両者の関係を調べる必要がある。

一方、レート・歪み理論 [1] という理論がある。この理論は、歪みを許せば符号化レートを下げることができるというものである。例えば、実際の風景を写真としてデジタルデータに変換しようとするとき、色の違いなど連続的な値を完璧にデータに変換することは不可能である。そこで、人間に識別できない色の差を切り捨て離散的な色を用いることでデータに変換している。このとき、切り捨てられた部分を実際の風景とデータの間の歪みという。歪みを大きくする、すなわち、区別する色を減らすとそれぞれの色に割り当てられる符号語の数も減る。符号語の数が減れば符号化レートも下がる。このような歪みと符号化レートの関係を論じたものがレート・歪み理論である。

ここで、歪みと遅延の類似性を例を用いて指摘する。4つの情報源シンボル a, b, c, d にそれぞれ符号語 00, 01, 10, 11 が割り当てられているとする。 a と b, c と d を区別しないように歪みを許せば、2つの情報源シンボル $a(=b), c(=d)$ にそれぞれ符号語 0, 1 を割り当てることができる。一方、4つの情報源シンボル a, b, c, d を送信する際に、符号語 00, 01, 10, 11 の2番目のビットが送信されないとすれば受信側は符号語 0, 1 を受け取り a または b, c または d という情報を受け取る。2番目のビットは次の時刻に送信されるとみなせば、歪みと遅延はともに許すことで符号語数が減少していることになる。

このような遅延と歪みの類似性からレート・歪み理論を用いて符号化レートと遅延の関係について研究を行う。具体的には、遅延を入力と出力の系列長の差と定義し、符号化レートと遅延に対する達成可能性を定義することで、レート歪み理論と同様の情報スペクトル的手法を用いる。従来の研究では、与えられた遅延基準の範囲内で符号化レートをどこまで小さくできるかを表すレート・遅延関数についての定理が導かれている [5]。しかし、[5]における達成可能の定義のもとで遅延をある定数以下に抑えようとした場合、入力が非常に長くなった時にほぼ遅延を許さない通信が必要になってしまう。そこで本論文では、入力系列の長さに対する出力系列の不足分の長さの比を遅延として再定義し、[5]と同様の一般的な定理を示す。さらに、達成可能の定義における遅延基準を確率的上極限によるものでなく、期待値の上極限によるものとして定義し同様の定理を示す。その上で、二元定常無記憶情報源および多元定常無記憶情報源に対するレート・遅延関数を導出する。

2 符号化における遅延

本論文では一般情報源 [1] を考える．情報源アルファベットを $\mathcal{X}$ とする．一般情報源 X は $\mathcal{X}^n$ 上の任意の確率分布 P_{X^n} をもつ確率変数 X^n の列 $\{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ として定義される．一般に、各 n に対して X^n は個別の確率空間で定義される．

レート・歪み理論では情報源系列と復元系列の長さは等しいが、本研究では、遅延がある符号化を考えるために復元系列の長さが情報源系列の長さ以下になるようなモデルを作る．そこで、復元系列を可変長とし情報源アルファベットを $\mathcal{X}^n$ 、復元アルファベットを $\mathcal{X}^*$ とする．符号 (φ_n, ψ_n) とは、ある自然数 M_n に対して $\varphi_n : \mathcal{X}^n \rightarrow \{1, \dots, M_n\}$, $\psi_n : \{1, \dots, M_n\} \rightarrow \mathcal{X}^*$ かつ任意の $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n$ に対して $\psi_n(\varphi_n(\mathbf{x}))$ が $\mathbf{x}$ の語頭になっているものをいう．この制約は従来の符号にはない強い制約であることに注意されたい． φ_n を符号器、 ψ_n を復号器という． $\varphi_n(\mathbf{x})$ を $\mathbf{x}$ の符号語といい、 $\psi_n(m)$, $m = 1, \dots, M_n$ を復号語という． M_n は符号語数を表す．系列 $\mathbf{a}$ の長さを $\|\mathbf{a}\|$ と表し、 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n$ に対する $\mathbf{y} \in \mathcal{X}^*$ の遅延を

$$d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \triangleq \begin{cases} \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| & \mathbf{y} \text{ が } \mathbf{x} \text{ の語頭のとき} \\ \infty & \text{その他のとき} \end{cases} \quad (1)$$

と定義する．

従来研究 [5] では、レート R が遅延 D で達成可能とは、

$$\text{p-}\limsup_{n \rightarrow \infty} d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) \leq D \quad (2)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \leq R \quad (3)$$

となるような符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在することであると定義されていた．この定義のもとで、遅延をある定数以下に抑えようとした場合、入力が非常に長くなった時にほぼ遅延を許さない通信が必要になってしまう．そこで本論文では、達成可能の定義を入力系列の長さに対する出力系列の不足分の長さの比、すなわち $\frac{1}{n} d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n)))$ の確率的上極限が定数で抑えられているとして再定義し、[5] と同様の一般的な定理を示す．

3 入力長ごとに個別の符号を用いたときのレート・遅延関数

本章と次章では、レートと遅延の関係に関する一般的な定理を示す．

3.1 最大遅延制約のレート・遅延関数

まず、必要な定義を与える．

定義 1 実数値をとる任意の確率変数列 $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し,

$$\text{p-}\limsup_{n \rightarrow \infty} Z_n \triangleq \inf \left\{ \alpha \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\{Z_n > \alpha\} = 0 \right\} \quad (4)$$

と定め, 確率的上極限という [1].

定義 2 独立な符号列によってレート R が遅延 D で fm-達成可能とは,

$$\text{p-}\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) \leq D \quad (5)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \leq R \quad (6)$$

となるような符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在することである. 「独立な」という語は 4 章の「整合的な」と区別するためのものである

定義 3 遅延 D に対して

$$R_{fm1}(D) \triangleq \inf \{ R \mid \text{独立な符号列によって} \\ \text{レート } R \text{ が遅延 } D \text{ で fm-達成可能} \} \quad (7)$$

と定義し, $R_{fm1}(D)$ を fm-レート・遅延関数と呼ぶ.

定義 4 互いに相関のある情報源 $\mathbf{X}$ と確率変数列 $\mathbf{Y} = \{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$\bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \triangleq \text{p-}\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{P_{Y_n|X^n}(Y_n | X^n)}{P_{Y_n}(Y_n)} \quad (8)$$

とし $\mathbf{X}$ と $\mathbf{Y}$ の間の相互情報量スペクトル上限と呼ぶ [1].

定義 5 任意の $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ を考える. $\mathbf{Y} = \{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $Y_n \in \mathcal{X}^*$ であり, X^n と Y_n は相関があるものとする. これらに対し,

$$\bar{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \triangleq \text{p-}\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} d_n(X^n, Y_n) \quad (9)$$

と定義する.

以上の定義のもとで, 以下の定理が成り立つ.

定理 1

$$R_{fm1}(D) = \inf_{\mathbf{Y}: \bar{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D} \bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (10)$$

右辺の $\inf$ は, 条件 $\bar{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D$ を満たす確率変数 $\mathbf{Y}$ に関する下限である.

[5] では (2) を満たせば達成可能という定義であったが、定義 2 では入力系列の長さに対する出力系列の不足分の長さの比の確率的上極限が定数 D 以下であれば達成可能という定義に変わっている。この定義の変更に伴い $\overline{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ の定義を定義 5 のように定義しなおしている。これらのように再定義した場合でも、[5] と同様に証明できる。証明は付録 A に示す。

3.2 平均遅延制約のレート・遅延関数

定義 2 における遅延基準を確率的上極限によるものでなく、期待値の上極限によるものとして定義しなおし、定理 1 と同様の定理を示す。

定義 6 独立な符号列によってレート R が遅延 D で fa-達成可能とは、

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} [d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n)))] \leq D \quad (11)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \leq R \quad (12)$$

となるような符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在することである。

定義 7 遅延 D に対して

$$R_{fa1}(D) \triangleq \inf \{ R \mid \text{独立な符号列によって} \\ \text{レート } R \text{ が遅延 } D \text{ で fa-達成可能} \} \quad (13)$$

と定義し、 $R_{fa1}(D)$ を fa-レート・遅延関数と呼ぶ。

定義 8 任意の $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ を考える。 $\mathbf{Y} = \{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $Y_n \in \mathcal{X}^*$ であり、 X^n と Y_n は相関があるものとする。これらに対し、

$$D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \triangleq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} [d_n(X^n, Y_n)] \quad (14)$$

と定義する。

定理 2

$$R_{fa1}(D) = \inf_{\mathbf{Y}: D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D} \overline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (15)$$

右辺の $\inf$ は、条件 $D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D$ を満たす確率変数 $\mathbf{Y}$ に関する下限である。

ここで、定理の証明には次の補題を用いる。

補題 1[1] 情報源 $\mathbf{X} = \{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ が正数 M_n に対して

$$|\{x \in \mathcal{X}^n \mid P_{X^n}(x) > 0\}| \leq M_n \quad (16)$$

を満たせば、任意の定数 $\gamma > 0$ に対して、

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \geq \frac{1}{n} \log M_n + \gamma \right\} \leq e^{-n\gamma} \quad (17)$$

が成立する。

証明 順定理と逆定理に分けて証明される。

順定理では

$$R_{fa1}(D) \leq \inf_{\mathbf{Y}: D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D} \bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (18)$$

を、逆定理では

$$R_{fa1}(D) \geq \inf_{\mathbf{Y}: D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D} \bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (19)$$

を証明する。

1) 順定理

$D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D$ を満たす一般情報源 $\mathbf{Y} = \{Y_n\}_{n=1}^\infty$ が与えられたとき、

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}[d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n)))] \leq D \quad (20)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \leq \bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (21)$$

となるような符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^\infty$ が存在することを証明する。まず、 $\gamma > 0$ を任意の小さい定数、 u を $0 \leq u < 1$ を満たす任意の実数として

$$\mathcal{T}_n^{(1)} \triangleq \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{X}^n \times \mathcal{X}^* \left| \frac{1}{n} \log \frac{P_{Y_n|X^n}(\mathbf{y}|\mathbf{x})}{P_{Y_n}(\mathbf{y})} < \bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) + \gamma \right. \right\} \quad (22)$$

$$\mathcal{S}_n(u) \triangleq \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{X}^n \times \mathcal{X}^* \left| \frac{1}{n} d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq u \right. \right\} \quad (23)$$

$$\mathcal{T}_n(u) \triangleq \mathcal{T}_n^{(1)} \cap \mathcal{S}_n(u) \quad (24)$$

と定義すると、定義 4 から

$$\Pr \left\{ X^n Y_n \notin \mathcal{T}_n^{(1)} \right\} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (25)$$

が成り立つ。ここで、

$$M'_n \triangleq e^{nR} = e^{n(\bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) + 2\gamma)} \quad (26)$$

と定義し、 $\psi_n(1), \psi_n(2), \dots, \psi_n(M'_n)$ を分布 P_{Y_n} に従って独立に発生させる。さらに、 $\psi_n(0)$: 空列を用意し、 $\mathcal{C} = \{\psi_n(0), \psi_n(1), \psi_n(2), \dots, \psi_n(M'_n)\}$ と定める。ここで、符号器 φ_n を

$d_n(\mathbf{x}, \psi_n(k))$ ($0 \leq k \leq M'_n$) が最小となる k を用いて, $\varphi_n(\mathbf{x}) = k$ となるように定める. このように定義された (φ_n, ψ_n) に対して

$$\overline{P}_e^{(n)}(u) \triangleq \Pr \left\{ \frac{1}{n} d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) > u \right\} \quad (27)$$

と定義する. $\frac{1}{n} d_n(\mathbf{x}, \psi_n(0)) = 1$ となることから,

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} d_n(\mathbf{x}, \psi_n(0)) > u \right\} = 1 \quad (28)$$

が成り立つ. よって, $\psi_n(1), \dots, \psi_n(M'_n)$ は同一の分布 P_{Y_n} に従って独立であることから (27) は

$$\begin{aligned} \overline{P}_e^{(n)}(u) &= \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n} P_{X^n}(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^{M'_n} \Pr \left\{ \frac{1}{n} d_n(\mathbf{x}, \psi_n(i)) > u \right\} \\ &= \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n} P_{X^n}(\mathbf{x}) \left(\Pr \left\{ \frac{1}{n} d_n(\mathbf{x}, Y_n) > u \right\} \right)^{M'_n} \\ &= \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n} P_{X^n}(\mathbf{x}) \left(1 - \Pr \left\{ \frac{1}{n} d_n(\mathbf{x}, Y_n) \leq u \right\} \right)^{M'_n} \\ &= \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n} P_{X^n}(\mathbf{x}) \left(1 - \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{X}^*} P_{Y_n}(\mathbf{y}) \mathbf{1} \left[\frac{1}{n} d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq u \right] \right)^{M'_n} \end{aligned} \quad (29)$$

と変形でき, (23)(24) より,

$$\overline{P}_e^{(n)}(u) \leq \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n} P_{X^n}(\mathbf{x}) \left(1 - \sum_{\mathbf{y}: (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{T}_n(u)} P_{Y_n}(\mathbf{y}) \right)^{M'_n} \quad (30)$$

となる. (22)(24) より, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{T}_n(u)$ ならば

$$P_{Y_n}(\mathbf{y}) \geq e^{-n(\bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) + \gamma)} P_{Y_n|X^n}(\mathbf{y} | \mathbf{x}) \quad (31)$$

が成り立つ. よって,

$$\overline{P}_e^{(n)}(u) \leq \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n} P_{X^n}(\mathbf{x}) \left(1 - e^{-n(\bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) + \gamma)} \sum_{\mathbf{y}: (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{T}_n(u)} P_{Y_n|X^n}(\mathbf{y} | \mathbf{x}) \right)^{M'_n} \quad (32)$$

を得る. ここで, 不等式

$$(1 - x)^y \leq e^{-xy} \quad (0 \leq x \leq 1, y \geq 0) \quad (33)$$

を用い, $M'_n = e^{n(\bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) + 2\gamma)}$ を代入すると,

$$\overline{P}_e^{(n)}(u) \leq \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n} P_{X^n}(\mathbf{x}) e^{-\left(e^{n\gamma} \sum_{\mathbf{y}: (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{T}_n(u)} P_{Y_n|X^n}(\mathbf{y} | \mathbf{x}) \right)} \quad (34)$$

が成り立つ. さらに不等式

$$e^{-xy} \leq 1 - y + e^{-x} \quad (x \geq 0, 0 \leq y \leq 1) \quad (35)$$

を用いると,

$$\begin{aligned} \overline{P}_e^{(n)}(u) &\leq 1 - \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n} P_{X^n}(\mathbf{x}) \sum_{\mathbf{y}: (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{T}_n(u)} P_{Y_n|X^n}(\mathbf{y} | \mathbf{x}) + e^{-e^{n\gamma}} \\ &= 1 - \Pr\{X^n Y_n \in \mathcal{T}_n(u)\} + e^{-e^{n\gamma}} \\ &= \Pr\{X^n Y_n \notin \mathcal{T}_n(u)\} + e^{-e^{n\gamma}} \end{aligned} \quad (36)$$

となる. よって, (22)(23)(24) より

$$\begin{aligned} \overline{P}_e^{(n)}(u) &\leq \Pr\{X^n Y_n \notin \{\mathcal{T}_n^{(1)} \cap \mathcal{S}_n(u)\}\} + e^{-e^{n\gamma}} \\ &\leq \Pr\{X^n Y_n \notin \mathcal{T}_n^{(1)}\} + \Pr\{X^n Y_n \notin \mathcal{S}_n(u)\} + e^{-e^{n\gamma}} \\ &= \Pr\left\{\frac{1}{n}d_n(X^n, Y_n) > u\right\} + \Pr\{X^n Y_n \notin \mathcal{T}_n^{(1)}\} + e^{-e^{n\gamma}} \end{aligned} \quad (37)$$

となる. 一方, $\overline{P}_e^{(n)}(u)$ の定義と部分積分の公式より

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \mathbb{E}_{\mathcal{C}} \mathbb{E}[d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n)))] &= \sum_{\mathcal{C}} \Pr\{\mathcal{C}\} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n} P_{X^n}(\mathbf{x}) \frac{d_n(\mathbf{x}, \psi_n(\varphi_n(\mathbf{x})))}{n} \\ &= \sum_{\mathcal{C}} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n} \Pr\{\mathcal{C}\} P_{X^n}(\mathbf{x}) \frac{d_n(\mathbf{x}, \psi_n(\varphi_n(\mathbf{x})))}{n} \\ &= \int_0^\infty \overline{P}_e^{(n)}(u) du - \lim_{u \rightarrow \infty} (u \overline{P}_e^{(n)}(u)) \\ &= \int_0^1 \overline{P}_e^{(n)}(u) du \end{aligned} \quad (38)$$

となる. ここで, $\mathbb{E}_{\mathcal{C}}$ はランダム符号に対する期待値, $\mathbb{E}$ は情報源に対する期待値を示している. さらに部分積分の公式を用いると

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \Pr\left\{\frac{1}{n}d_n(X^n, Y_n) > u\right\} du &= \sum_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{X}^n \times \mathcal{X}^*} P_{X^n Y_n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{n} \\ &= \frac{1}{n} \mathbb{E}[d_n(X^n, Y_n)] \end{aligned} \quad (39)$$

となる。よって、(37)(38)(39) より

$$\frac{1}{n} \mathbb{E}_{\mathcal{C}} \mathbb{E}[d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n)))] \leq \frac{1}{n} \mathbb{E}[d_n(X^n, Y_n)] + \Pr \left\{ X^n Y_n \notin \mathcal{T}_n^{(1)} \right\} + e^{-e^{n\gamma}} \quad (40)$$

が成り立つ。したがって、

$$\frac{1}{n} \mathbb{E}[d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n)))] \leq \frac{1}{n} \mathbb{E}[d_n(X^n, Y_n)] + \Pr \left\{ X^n Y_n \notin \mathcal{T}_n^{(1)} \right\} + e^{-e^{n\gamma}} \quad (41)$$

を満たすランダムでない符号 (φ_n, ψ_n) が少なくとも 1 つ存在する。よって、 $e^{-e^{n\gamma}} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) となることと (25) より、

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}[d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n)))] &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}[d_n(X^n, Y_n)] \\ &= D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D \end{aligned} \quad (42)$$

を得る。また、(26) より、

$$\frac{1}{n} \log M'_n \leq \bar{I}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + 2\gamma \quad (43)$$

が自明に成立する。ここで、符号語数 M_n とおけば $M_n = M'_n + 1$ なので

$$\frac{1}{n} \log(M_n - 1) \leq \bar{I}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + 2\gamma \quad (44)$$

となる。よって (44) より、

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left((M_n - 1) \frac{M_n}{M_n - 1} \right) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \log(M_n - 1) + \frac{1}{n} \log \left(1 + \frac{1}{M_n - 1} \right) \right) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(M_n - 1) \\ &\leq \bar{I}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + 2\gamma \end{aligned} \quad (45)$$

となる。ここで、 $\gamma_k = \frac{1}{k}$ とし $\gamma = \gamma_k$ とおいて $k = 1, k = 2, \dots$ の順に同様の議論を繰り返せば、(20)(21) を満たす符号 (φ_n, ψ_n) が存在することになり

$$R_{fa1}(D) \leq \inf_{\mathbf{Y}: D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D} \bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (46)$$

が結論される (対角線論法)。よって、(18) が示された。

2) 逆定理

ここでは、補題 1 を用いて証明する。

レート R が遅延 D で fa-達成可能と仮定すると,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}[d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n)))] \leq D \quad (47)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \leq R \quad (48)$$

を満たす符号 (φ_n, ψ_n) が存在することになる. $Y_n = \psi_n(\varphi_n(X^n))$ とおいて $\mathbf{Y} = \{Y_n\}_{n=1}^\infty$ とすると, (47) より

$$D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D \quad (49)$$

と書ける. 次に

$$\bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \leq R \quad (50)$$

を示す. ここで, 任意の $\gamma > 0$ を用いると $|\psi_n(\varphi_n(X^n))| \leq M_n$ であることから 補題 1 より

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{Y_n}(Y_n)} \geq \frac{1}{n} \log M_n + \gamma \right\} \leq e^{-n\gamma} \quad (51)$$

が成り立つ. また,

$$\frac{1}{n} \log \frac{P_{Y_n|X^n}(\mathbf{y} | \mathbf{x})}{P_{Y_n}(\mathbf{y})} \leq \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{Y_n}(\mathbf{y})}$$

であるから, (51) より

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{P_{Y_n|X^n}(Y_n | X^n)}{P_{Y_n}(Y_n)} \geq \frac{1}{n} \log M_n + \gamma \right\} \leq e^{-n\gamma} \quad (52)$$

となる. ところが,

$$\frac{1}{n} \log M_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n + \gamma \quad (\forall n \geq n_0)$$

であるので, (48) より

$$\begin{aligned} \text{p-lim sup}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{P_{Y_n|X^n}(Y_n | X^n)}{P_{Y_n}(Y_n)} &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n + 2\gamma \\ &\leq R + 2\gamma \end{aligned} \quad (53)$$

が成り立つ. よって,

$$\bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \leq R + 2\gamma \quad (54)$$

となる. $\gamma > 0$ は任意であったので, $\bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \leq R$ が示される. よって, (49) より

$$R_{fa1}(D) \geq \inf_{\mathbf{Y}: D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D} \bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (55)$$

が結論される. よって (19) が示された. $\square$

4 復号語の整合性を考慮したレート・遅延関数

前章では、出力が入力の語頭になっている符号を考えた。この符号を用いて通信を行い、入力の情報源系列の長さが n 、出力された復元系列の長さが m だとする。前章では、入力系列を 1 文字追加し入力系列の長さが $n+1$ となったとき、出力が入力の語頭になるという条件のみを満たした符号器と復号器を新たに作るため、入力の符号語長が $n+1$ と長くなったのにも関わらず、出力の符号語長が m より短くなる可能性がある。情報源系列の長さが長くなったのにも関わらず、復元系列の長さが短くなることは、実際の通信では起こらない。そこで、情報源系列の長さが長くなった際に復元系列の長さがそのままもしくは長くなるような制約を加える。そのため、符号の拡大を定義する。

定義 9 (φ_n, ψ_n) が $(\varphi_{n-1}, \psi_{n-1})$ の拡大であるとは、長さ n の系列 $x^n = x_1 x_2 \cdots x_n$ に対して $\psi_{n-1}(\varphi_{n-1}(x^{n-1}))$ が $\psi_n(\varphi_n(x^n))$ の語頭になることである。さらに、任意の 2 以上の自然数 k に対し (φ_k, ψ_k) が $(\varphi_{k-1}, \psi_{k-1})$ の拡大となる符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ を整合的な符号の列と呼ぶ。

4.1 最大遅延制約のレート・遅延関数

さらに、以下を定義する。

定義 10 整合的な符号列によってレート R が遅延 D で fm-達成可能とは、

$$\text{p-}\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) \leq D \quad (56)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \leq R \quad (57)$$

となる整合的な符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在することである。

定義 11 遅延 D に対して

$$R_{fm2}(D) \triangleq \inf \{ R \mid \text{整合的な符号列によって} \\ \text{レート } R \text{ が遅延 } D \text{ で fm-達成可能} \} \quad (58)$$

とし、 $R_{fm2}(D)$ を fm-レート・遅延関数と呼ぶ。

これらの定義より以下の定理が成り立つ。

定理 3

$$R_{fm2}(D) = \inf_{\mathbf{Y}: \overline{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D} \overline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (59)$$

右辺の $\inf$ は、条件 $\overline{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D$ を満たす確率変数 $\mathbf{Y}$ に関する下限である。

定理 3 では符号の整合性を考慮しているため、定理 1 より達成可能の条件が厳しくなっているにも関わらずレート・遅延関数は同じ式になっている。定理 1 と同様に定義 5, 定義 10 が変更されていることに注意すると、[5] と同じように証明できる。証明は付録 B に示す。

4.2 平均遅延制約のレート・遅延関数

3.2 節と同様に定義 10 における遅延基準を確率的上極限によるものでなく、期待値の上極限によるものとして定義しなおし、定理 3 と同様の定理を示す。

定義 12 整合的な符号列によってレート R が遅延 D で fa-達成可能とは、

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} [d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n)))] \leq D \quad (60)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \leq R \quad (61)$$

となる整合的な符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在することである。

定義 13 遅延 D に対して

$$R_{fa2}(D) \triangleq \inf \{ R \mid \text{整合的な符号列によって} \\ \text{レート } R \text{ が遅延 } D \text{ で fa-達成可能} \} \quad (62)$$

と定義し、 $R_{fa2}(D)$ を fa-レート・遅延関数と呼ぶ。

定理 4

$$R_{fa2}(D) = \inf_{\mathbf{Y}: D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D} \overline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (63)$$

右辺の $\inf$ は、条件 $D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D$ を満たす確率変数 $\mathbf{Y}$ に関する下限である。

証明 順定理と逆定理に分けて証明される。

順定理では

$$R_{fa2}(D) \leq \inf_{\mathbf{Y}: D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D} \overline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (64)$$

を、逆定理では

$$R_{fa2}(D) \geq \inf_{\mathbf{Y}: D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D} \overline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (65)$$

を証明する。

1) 順定理

$D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D$ を満たす一般情報源 $\mathbf{Y} = \{Y_n\}_{n=1}^\infty$ が与えられたとき,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}[d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n)))] \leq D \quad (66)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \leq \bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (67)$$

となるような整合的な符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^\infty$ が存在することを証明する. まず, $\gamma > 0$ を任意の小さい定数, u を $0 \leq u < 1$ を満たす任意の実数として

$$\mathcal{T}_n^{(1)} \triangleq \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{X}^n \times \mathcal{X}^* \left| \frac{1}{n} \log \frac{P_{Y_n|X^n}(\mathbf{y}|\mathbf{x})}{P_{Y_n}(\mathbf{y})} < \bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) + \gamma \right. \right\} \quad (68)$$

$$\mathcal{S}_n(u) \triangleq \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{X}^n \times \mathcal{X}^* \left| \frac{1}{n} d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq u \right. \right\} \quad (69)$$

$$\mathcal{T}_n(u) \triangleq \mathcal{T}_n^{(1)} \cap \mathcal{S}_n(u) \quad (70)$$

と定義すると, 定義 4 から

$$\Pr \left\{ X^n Y_n \notin \mathcal{T}_n^{(1)} \right\} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (71)$$

が成り立つ. ここで,

$$M'_n \triangleq \sum_{k=1}^n e^{kR} = \sum_{k=1}^n e^{k(\bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) + 2\gamma)} \quad (72)$$

と定義する. 復号語を分布 P_{Y_n} に従って独立に e^{nR} 個発生させ, $\psi_{n-1}(1), \dots, \psi_{n-1}(\sum_{k=1}^{n-1} e^{kR})$ に加えて $\psi_n(1), \psi_n(2), \dots, \psi_n(M'_n)$ とする. さらに, $\psi_n(0)$: 空列を用意し, $\mathcal{C} = \{\psi_n(0), \psi_n(1), \psi_n(2), \dots, \psi_n(M'_n)\}$ と定める. ここで, 符号器 φ_n を $d_n(\mathbf{x}, \psi_n(k))$ ($0 \leq k \leq M'_n$) が最小となる k を用いて, $\varphi_n(\mathbf{x}) = k$ となるように定める. 定義 9 より, このように定義された (φ_n, ψ_n) は整合的な符号である. この符号 (φ_n, ψ_n) に対して

$$\overline{P}_e^{(n)}(u) \triangleq \Pr \left\{ \frac{1}{n} d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) > u \right\} \quad (73)$$

と定義する. $\frac{1}{n} d_n(\mathbf{x}, \psi_n(0)) = 1$ となることから,

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} d_n(\mathbf{x}, \psi_n(0)) > u \right\} = 1 \quad (74)$$

が成り立つ. よって, e^{nR} 個の符号語は同一の分布 P_{Y_n} に従って独立であり, 確率は常に 1

以下であることから (73) は

$$\begin{aligned}
\overline{P}_e^{(n)}(u) &= \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n} P_{X^n}(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^{M'_n} \Pr \left\{ \frac{1}{n} d_n(\mathbf{x}, \psi_n(i)) > u \right\} \\
&= \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n} P_{X^n}(\mathbf{x}) \prod_{k=1}^n \left(\Pr \left\{ \frac{1}{n} d_n(\mathbf{x}, Y_k) > u \right\} \right)^{e^{kR}} \\
&\leq \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n} P_{X^n}(\mathbf{x}) \left(\Pr \left\{ \frac{1}{n} d_n(\mathbf{x}, Y_n) > u \right\} \right)^{e^{nR}} \\
&= \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n} P_{X^n}(\mathbf{x}) \left(1 - \Pr \left\{ \frac{1}{n} d_n(\mathbf{x}, Y_n) \leq u \right\} \right)^{e^{nR}} \\
&= \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n} P_{X^n}(\mathbf{x}) \left(1 - \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{X}^*} P_{Y_n}(\mathbf{y}) \mathbf{1} \left[\frac{1}{n} d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq u \right] \right)^{e^{nR}} \tag{75}
\end{aligned}$$

で抑えられる．ここで， $e^{nR} = e^{n(\bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) + 2\gamma)}$ を代入し，(29) から (41) と同様の議論をすると

$$\frac{1}{n} \mathbb{E}[d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n)))] \leq \frac{1}{n} \mathbb{E}[d_n(X^n, Y_n)] + \Pr \left\{ X^n Y_n \notin \mathcal{T}_n^{(1)} \right\} + e^{-e^{n\gamma}} \tag{76}$$

を満たすランダムでない整合的な符号 (φ_n, ψ_n) が少なくとも 1 つ存在することになる．よって， $e^{-e^{n\gamma}} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) となることと (71) より，

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}[d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n)))] &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}[d_n(X^n, Y_n)] \\
&= D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D \tag{77}
\end{aligned}$$

を得る．また，(72) より，

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M'_n &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log (e^R + e^{2R} + \dots + e^{nR}) \\
&= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log e^{nR} (1 + e^{-R} + \dots + e^{-(n-1)R}) \\
&= R + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log (1 + e^{-R} + \dots + e^{-(n-1)R}) \\
&= R + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{1 - e^{-nR}}{1 - e^{-R}} \\
&\leq R + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{1}{1 - e^{-R}} \\
&= R = \bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) + 2\gamma \tag{78}
\end{aligned}$$

が成立する．ここで，符号語数 M_n とおけば $M_n = M'_n + 1$ なので

$$\frac{1}{n} \log(M_n - 1) \leq \bar{I}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + 2\gamma \tag{79}$$

となる．(45)と同様に式変形すると，(79)より，

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(M_n - 1) \\ &\leq \bar{I}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + 2\gamma \end{aligned} \quad (80)$$

となる．ここで， $\gamma_k = \frac{1}{k}$ とし $\gamma = \gamma_k$ とおいて $k = 1, k = 2, \dots$ の順に同様の議論を繰り返せば，(66)，(67)を満たす整合的な符号 (φ_n, ψ_n) が存在することになり

$$R_{fa2}(D) \leq \inf_{\mathbf{Y}: \bar{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D} \bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (81)$$

が結論される (対角線論法)．よって (64) が示された．

2) 逆定理

レート R が遅延 D で fa-達成可能な整合的な符号 (φ_n, ψ_n) が存在すると仮定すれば定理 2 の逆定理と同様にして

$$R_{fa2}(D) \geq \inf_{\mathbf{Y}: \bar{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D} \bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (82)$$

が結論される．よって (65) が示された．□

5 二元定常無記憶情報源に対するレート・遅延関数

定理 3，定理 4 は一般的な定理であるので，閉じた式で表現されていない．本章では情報源を二元定常無記憶情報源としたときのレート・遅延関数を閉じた式として導出する．

5.1 二元定常無記憶情報源に対する fm-レート・遅延関数

定理 5 生起確率が $\Pr\{X = 0\} = 1 - p, \Pr\{X = 1\} = p$ である二元情報源 X に対する fm-レート・遅延関数 $R_{fm2}(D)$ は，

$$R_{fm2}(D) = (1 - D)H_2(p) \quad (83)$$

となる．ただし，

$$H_2(p) \triangleq p \log \frac{1}{p} + (1 - p) \log \frac{1}{1 - p} \quad (84)$$

$$0 \log \frac{1}{0} \triangleq 0 \quad (85)$$

とする．

証明 順定理と逆定理によって証明される．順定理では

$$R_{fm2}(D) \leq (1 - D)H_2(p) \quad (86)$$

を示し，逆定理では，

$$R_{fm2}(D) \geq (1 - D)H_2(p) \quad (87)$$

を示す．

順定理

$p = 0$ もしくは $p = 1$ であるとき，自明に成立する． $0 < p < 1$ であるとき，各 n について $Y_n \triangleq \psi_n(\varphi_n(X^n)) = X_1 X_2 \cdots X_{\lceil (1-D)n \rceil}$ となるような符号 (ψ_n, φ_n) を考える．すると，符号列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^\infty$ は整合的であり， $\bar{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D$ を満たす．このときの $\bar{I}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ を求める．ここで， $\mathbf{y}(\mathbf{x}) \triangleq \psi_n(\varphi_n(\mathbf{x}))$ と定義すると $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = x_1 x_2 \cdots x_{\lceil (1-D)n \rceil}$ となる． $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ の定義から， $\mathbf{x}$ が決定されれば， $\mathbf{y}$ も一意に決まる．よって，

$$\begin{aligned} P_{X^n Y_n}(\mathbf{x}, Y_n) &= P_{X^n Y_n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x})) \\ &= P_{X^n}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (88)$$

が成り立つ．よって，

$$\begin{aligned} P_{Y_n|X^n}(Y_n|\mathbf{x}) &= P_{Y_n|X^n}(\mathbf{y}(\mathbf{x})|\mathbf{x}) \\ &= \frac{P_{X^n Y_n}(\mathbf{x}, Y_n)}{P_{X^n}(\mathbf{x})} \\ &= \frac{P_{X^n}(\mathbf{x})}{P_{X^n}(\mathbf{x})} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (89)$$

となる．また， $\mathbf{c}(\mathbf{x}) \triangleq x_1 + x_2 + \cdots + x_{\lceil (1-D)n \rceil}$ とすると， $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ は $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ に含まれる 1 の数と一致することから，

$$\begin{aligned} P_{Y_n}(\mathbf{y}(\mathbf{x})) &= \sum_{\mathbf{x}'} P_{X^n}(\mathbf{x}') P_{Y_n|X^n}(\mathbf{y}(\mathbf{x})|\mathbf{x}') \\ &= \sum_{\mathbf{x}'} P_{X^n}(\mathbf{x}') \mathbf{1} \left\{ \mathbf{y}(\mathbf{x}) = x'_1 x'_2 \cdots x'_{\lceil (1-D)n \rceil} \right\} \\ &= \Pr \left\{ \mathbf{y}(\mathbf{x}) = X_1 X_2 \cdots X_{\lceil (1-D)n \rceil} \right\} \\ &= \prod_{i=1}^{\lceil (1-D)n \rceil} P_{X_i}(x_i) \\ &= p^{\mathbf{c}(\mathbf{x})} (1 - p)^{\lceil (1-D)n \rceil - \mathbf{c}(\mathbf{x})} \end{aligned} \quad (90)$$

となる．ここで，任意の定数 $\gamma > 0$ に対し， δ を

$$\delta \triangleq \frac{\gamma}{\log \frac{1}{p} + \log \frac{1}{1-p}} \quad (91)$$

と定義すると， $\delta > 0$ となる．さらに，この正数 δ に対し，

$$\mathcal{T}_1^n \triangleq \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{X}^n \left| \left| \frac{c(\mathbf{x})}{\lceil (1-D)n \rceil} - p \right| < \delta \right. \right\} \quad (92)$$

と定義すると，

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= 1 \times p + 0 \times (1-p) \\ &= p \end{aligned} \quad (93)$$

となることから大数の法則より，

$$\Pr\{X^n \in \mathcal{T}_1^n\} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (94)$$

が成り立つ。ここで、以下の確率を求めると

$$\begin{aligned}
& \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{P_{Y_n|X^n}(Y_n|X^n)}{P_{Y_n}(Y_n)} > \alpha \right\} \\
&= \sum_{\mathbf{x}} P_{X^n}(\mathbf{x}) \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{P_{Y_n|X^n}(Y_n|\mathbf{x})}{P_{Y_n}(Y_n)} > \alpha \middle| X^n = \mathbf{x} \right\} \\
&\stackrel{(89)}{=} \sum_{\mathbf{x}} P_{X^n}(\mathbf{x}) \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{Y_n}(\mathbf{y}(\mathbf{x}))} > \alpha \middle| X^n = \mathbf{x} \right\} \\
&\stackrel{(90)}{=} \sum_{\mathbf{x}} P_{X^n}(\mathbf{x}) \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{1}{p^{\mathbf{c}(\mathbf{x})} (1-p)^{\lceil (1-D)n \rceil - \mathbf{c}(\mathbf{x})}} > \alpha \middle| X^n = \mathbf{x} \right\} \\
&= \sum_{\mathbf{x}} P_{X^n}(\mathbf{x}) \\
&\Pr \left\{ \frac{1}{n} \left(\mathbf{c}(\mathbf{x}) \log \frac{1}{p} + (\lceil (1-D)n \rceil - \mathbf{c}(\mathbf{x})) \log \frac{1}{1-p} \right) > \alpha \middle| X^n = \mathbf{x} \right\} \\
&= \sum_{\mathbf{x}} P_{X^n}(\mathbf{x}) \Pr \left\{ \frac{\lceil (1-D)n \rceil}{n} \left(\frac{\mathbf{c}(\mathbf{x})}{\lceil (1-D)n \rceil} \log \frac{1}{p} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(1 - \frac{\mathbf{c}(\mathbf{x})}{\lceil (1-D)n \rceil} \right) \log \frac{1}{1-p} \right) > \alpha \middle| X^n = \mathbf{x} \right\} \\
&= \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{T}_1^n} P_{X^n}(\mathbf{x}) \Pr \left\{ \frac{\lceil (1-D)n \rceil}{n} \left(\frac{\mathbf{c}(\mathbf{x})}{\lceil (1-D)n \rceil} \log \frac{1}{p} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(1 - \frac{\mathbf{c}(\mathbf{x})}{\lceil (1-D)n \rceil} \right) \log \frac{1}{1-p} \right) > \alpha \middle| X^n = \mathbf{x} \right\} \\
&+ \sum_{\mathbf{x} \notin \mathcal{T}_1^n} P_{X^n}(\mathbf{x}) \Pr \left\{ \frac{\lceil (1-D)n \rceil}{n} \left(\frac{\mathbf{c}(\mathbf{x})}{\lceil (1-D)n \rceil} \log \frac{1}{p} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(1 - \frac{\mathbf{c}(\mathbf{x})}{\lceil (1-D)n \rceil} \right) \log \frac{1}{1-p} \right) > \alpha \middle| X^n = \mathbf{x} \right\} \tag{95}
\end{aligned}$$

となる。 $\mathbf{x} \in \mathcal{T}_1^n$ であるとき、

$$\begin{aligned}
& \frac{\lceil (1-D)n \rceil}{n} \left(\frac{\mathbf{c}(\mathbf{x})}{\lceil (1-D)n \rceil} \log \frac{1}{p} + \left(1 - \frac{\mathbf{c}(\mathbf{x})}{\lceil (1-D)n \rceil} \right) \log \frac{1}{1-p} \right) \\
&\stackrel{(92)}{\leq} \frac{(1-D)n+1}{n} \left((p+\delta) \log \frac{1}{p} + (1-p+\delta) \log \frac{1}{1-p} \right) \\
&\stackrel{(84)}{=} \left((1-D) + \frac{1}{n} \right) \left(H_2(p) + \delta \left(\log \frac{1}{p} + \log \frac{1}{1-p} \right) \right) \\
&\stackrel{(91)}{=} \left((1-D) + \frac{1}{n} \right) (H_2(p) + \gamma) \tag{96}
\end{aligned}$$

となることから, (95), (96) より,

$$\begin{aligned}
& \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{P_{Y_n|X^n}(Y_n|X^n)}{P_{Y_n}(Y_n)} > \alpha \right\} \\
& \leq \mathbf{1} \left[\left((1-D) + \frac{1}{n} \right) (H_2(p) + \gamma) > \alpha \right] \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{T}_1^n} P_{X^n}(\mathbf{x}) \\
& \quad + \sum_{\mathbf{x} \notin \mathcal{T}_1^n} P_{X^n}(\mathbf{x}) \\
& = \mathbf{1} \left[\left((1-D) + \frac{1}{n} \right) (H_2(p) + \gamma) > \alpha \right] \Pr \{X^n \in \mathcal{T}_1^n\} \\
& \quad + \Pr \{X^n \notin \mathcal{T}_1^n\} \\
& \rightarrow \mathbf{1} [(1-D)(H_2(p) + \gamma) > \alpha] \quad (n \rightarrow \infty)
\end{aligned} \tag{97}$$

が成り立つ. したがって,

$$\begin{aligned}
& \bar{I}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \\
& = \text{p-} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{P_{Y_n|X^n}(Y_n|X^n)}{P_{Y_n}(Y_n)} \\
& = \inf \left\{ \alpha \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{P_{Y_n|X^n}(Y_n|X^n)}{P_{Y_n}(Y_n)} > \alpha \right\} = 0 \right\} \\
& = (1-D)(H_2(p) + \gamma)
\end{aligned} \tag{98}$$

となる. γ が任意であったことに加え, 定義された Y_n が整合的であり, $\bar{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D$ を満たすことから, 定理 3 より,

$$\begin{aligned}
R_{fm2}(D) & = \inf_{\mathbf{Y}: \bar{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D} \bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \\
& \leq \bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \\
& \leq (1-D)H_2(p)
\end{aligned} \tag{99}$$

が成り立つ.

逆定理

レート R が遅延 D で fm-達成可能な任意の整合的な符号列 $\{\varphi_n, \psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $\mathbf{y}(\mathbf{x}) \triangleq \psi_n(\varphi_n(\mathbf{x})), Y_n \triangleq \mathbf{y}(X^n)$ と定義すると,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \log M_n & \geq \frac{1}{n} H(Y_n) \\
& \geq \frac{1}{n} (H(Y_n) - H(Y_n|X^n)) \\
& = \frac{1}{n} I(X^n; Y_n) \\
& = \frac{1}{n} (nH(X) - H(X^n|Y_n))
\end{aligned} \tag{100}$$

となる． よって, (84) より

$$\begin{aligned}
H(X^n|Y_n) &= \sum_{\mathbf{y}(\mathbf{x})} P_{Y_n}(\mathbf{y}(\mathbf{x})) H(X^n|Y_n = \mathbf{y}(\mathbf{x})) \\
&= \sum_{\mathbf{y}(\mathbf{x})} P_{Y_n}(\mathbf{y}(\mathbf{x})) (d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x})) H(X)) \\
&= H(X) \sum_{\mathbf{y}(\mathbf{x})} P_{Y_n}(\mathbf{y}(\mathbf{x})) d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x})) \\
&= H_2(p) \mathbb{E}[d_n(X^n, Y_n)]
\end{aligned} \tag{101}$$

が成り立ち, (100)(101) より, 任意の定数 $\gamma > 0$ を用いて,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n} \log M_n \\
&\geq H_2(p) - \frac{1}{n} \mathbb{E}[d_n(X^n, Y_n)] H_2(p) \\
&= \left(1 - \mathbb{E} \left[\frac{1}{n} d_n(X^n, Y_n) \right] \right) H_2(p) \\
&= H_2(p) \left(1 - \sum_{\mathbf{x}} P_{X^n}(\mathbf{x}) \frac{1}{n} d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x})) \right) \\
&= H_2(p) \left(1 - \sum_{\mathbf{x}: \frac{1}{n} d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x})) \leq \overline{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \gamma} P_{X^n}(\mathbf{x}) \frac{1}{n} d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x})) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{\mathbf{x}: 1 \geq \frac{1}{n} d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x})) > \overline{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \gamma} P_{X^n}(\mathbf{x}) \frac{1}{n} d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x})) \right) \\
&\geq H_2(p) \\
&\quad \left(1 - (\overline{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \gamma) \Pr \left\{ \frac{1}{n} d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x})) \leq \overline{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \gamma \right\} \right. \\
&\quad \left. - \Pr \left\{ \frac{1}{n} d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x})) > \overline{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \gamma \right\} \right)
\end{aligned} \tag{102}$$

となる． ここで, 確率的上極限の定義より

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x})) \leq \overline{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \gamma \right\} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty) \tag{103}$$

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x})) > \overline{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \gamma \right\} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \tag{104}$$

となり,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq H_2(p) (1 - (\overline{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \gamma)) \tag{105}$$

が成り立つ． γ は任意であったので，

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq (1 - \bar{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))H_2(p) \quad (106)$$

となり，符号が (56) を満たすことから，

$$\begin{aligned} R_{fa2}(D) &\geq (1 - \bar{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))H_2(p) \\ &\geq (1 - D)H_2(p) \end{aligned} \quad (107)$$

が成り立つ．□

5.2 二元定常無記憶情報源に対する fa-レート・遅延関数

定理 6 生起確率が $\Pr\{X = 0\} = 1 - p, \Pr\{X = 1\} = p$ である二元情報源 X に対する fa-レート・遅延関数 $R_{fa2}(D)$ は，

$$R_{fa2}(D) = (1 - D)H_2(p) \quad (108)$$

となる．

証明 順定理と逆定理によって証明される．順定理では

$$R_{fa2}(D) \leq (1 - D)H_2(p) \quad (109)$$

を示し，逆定理では，

$$R_{fa2}(D) \geq (1 - D)H_2(p) \quad (110)$$

を示す．

順定理

$p = 0$ もしくは $p = 1$ であるとき，自明に成立する． $0 < p < 1$ であるとき，各 n について $Y_n \triangleq \psi_n(\varphi_n(X^n)) = X_1 X_2 \cdots X_{\lceil (1-D)n \rceil}$ となるような符号 (ψ_n, φ_n) を考える．すると，符号列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は整合的であり， $D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D$ を満たす．ここで， $\mathbf{y}(\mathbf{x}) \triangleq \psi_n(\varphi_n(\mathbf{x}))$ と定義する．このときの $\bar{I}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ を求めると，任意の定数 $\gamma > 0$ を用いて，定理 5 の順定理の証明と同様に

$$\bar{I}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = (1 - D)(H_2(p) + \gamma) \quad (111)$$

となる． γ が任意であったことに加え，定義された Y_n が整合的であり， $D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D$ を満たすことから，定理 4 より，

$$\begin{aligned} R_{fa2}(D) &= \inf_{\mathbf{Y}: D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D} \bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \\ &\leq \bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \\ &\leq (1 - D)H_2(p) \end{aligned} \quad (112)$$

が成り立つ.

逆定理

レート R が遅延 D で fa-達成可能な任意の整合的な符号列 $\{\varphi_n, \psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $\mathbf{y}(\mathbf{x}) \triangleq \psi_n(\varphi_n(\mathbf{x})), Y_n \triangleq \mathbf{y}(X^n)$ と定義すると, (100)(101) より,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \log M_n &\geq H_2(p) - \frac{1}{n} \mathbb{E}[d_n(X^n, Y_n)] H_2(p) \\ &= \left(1 - \mathbb{E} \left[\frac{1}{n} d_n(X^n, Y_n) \right] \right) H_2(p) \end{aligned} \quad (113)$$

となる. よって, 任意の定数 $\gamma > 0$ を用いて,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq H_2(p) (1 - (D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \gamma)) \quad (114)$$

が成り立つ. γ は任意であったので,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq (1 - D(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) H_2(p) \quad (115)$$

となり, 符号が (60) を満たすことから,

$$\begin{aligned} R_{fm2}(D) &\geq (1 - D(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) H_2(p) \\ &\geq (1 - D) H_2(p) \end{aligned} \quad (116)$$

が成り立つ. $\square$

6 多元定常無記憶情報源に対するレート・遅延関数

本章では, 5 章で求めた二元定常無記憶情報源に対するレート・遅延関数をより一般的に拡張し, 多元定常無記憶情報源に対するレート・遅延関数を導出する.

6.1 多元定常無記憶情報源に対する fm-レート・遅延関数

定理 7 生起確率が $\Pr\{X = i\} = p_i$, $\sum_{i \in \mathcal{X}} p_i = 1$ である多元情報源 X に対する fm-レート・遅延関数 $R_{fm2}(D)$ は,

$$R_{fm2}(D) = (1 - D) H(X) \quad (117)$$

となる. ただし,

$$H(X) \triangleq \sum_{i \in \mathcal{X}} p_i \log \frac{1}{p_i} \quad (118)$$

$$(119)$$

とする.

証明 順定理と逆定理によって証明される. 順定理では

$$R_{fm2}(D) \leq (1 - D)H(X) \quad (120)$$

を示し, 逆定理では,

$$R_{fm2}(D) \geq (1 - D)H(X) \quad (121)$$

を示す.

順定理

各 n について $Y_n \triangleq \psi_n(\varphi_n(X^n)) = X_1 X_2 \cdots X_{\lceil (1-D)n \rceil}$ となるような符号 (ψ_n, φ_n) を考える. すると, 符号列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^\infty$ は整合的であり, $\overline{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D$ を満たす. このときの $\overline{I}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ を求める. ここで, $\mathbf{y}(\mathbf{x}) \triangleq \psi_n(\varphi_n(\mathbf{x}))$ と定義すると $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = x_1 x_2 \cdots x_{\lceil (1-D)n \rceil}$ となる. $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ の定義から, $\mathbf{x}$ が決定されれば, $\mathbf{y}$ も一意に決まる. よって, (88)(89) と同様に

$$P_{Y_n|X^n}(Y_n|\mathbf{x}) = 1 \quad (122)$$

となる. また,

$$c_i(x) \triangleq \mathbf{1}[x = i] \quad (123)$$

$$\mathbf{c}_i(\mathbf{x}) \triangleq \sum_{l=1}^{\lceil (1-D)n \rceil} c_i(x_l) \quad (124)$$

と定義すると, $\mathbf{c}_i(\mathbf{x})$ は $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ に含まれる $i \in \mathcal{X}$ の数に等しいことから, $0^0 \triangleq 1$ とすると

$$\begin{aligned} P_{Y_n}(\mathbf{y}(\mathbf{x})) &= \sum_{\mathbf{x}'} P_{X^n}(\mathbf{x}') P_{Y_n|X^n}(\mathbf{y}(\mathbf{x})|\mathbf{x}') \\ &= \sum_{\mathbf{x}'} P_{X^n}(\mathbf{x}') \mathbf{1} \left\{ \mathbf{y}(\mathbf{x}) = x'_1 x'_2 \cdots x'_{\lceil (1-D)n \rceil} \right\} \\ &= \Pr \left\{ \mathbf{y}(\mathbf{x}) = X_1 X_2 \cdots X_{\lceil (1-D)n \rceil} \right\} \\ &= \prod_{l=1}^{\lceil (1-D)n \rceil} P_{X_l}(x_l) \\ &= \prod_{i \in \mathcal{X}} p_i^{\mathbf{c}_i(\mathbf{x})} \end{aligned} \quad (125)$$

となる. ここで,

$$\mathcal{X}' \triangleq \{i \in \mathcal{X} \mid p_i \neq 0\} \quad (126)$$

と定義すると、任意の $i \notin \mathcal{X}'$ において、 $p_i = 0$ 、 $\mathbf{c}_i(\mathbf{x}) = 0$ となることから

$$\begin{aligned} P_{Y_n}(\mathbf{y}(\mathbf{x})) &= \prod_{i \in \mathcal{X}} p_i^{\mathbf{c}_i(\mathbf{x})} \\ &= \prod_{i \in \mathcal{X}'} p_i^{\mathbf{c}_i(\mathbf{x})} \end{aligned} \quad (127)$$

が成り立つ。さらに、(118), (85) より、

$$\begin{aligned} H(X) &\triangleq \sum_{i \in \mathcal{X}} p_i \log \frac{1}{p_i} \\ &= \sum_{i \in \mathcal{X}'} p_i \log \frac{1}{p_i} + \sum_{i \notin \mathcal{X}'} p_i \log \frac{1}{p_i} \\ &= \sum_{i \in \mathcal{X}'} p_i \log \frac{1}{p_i} \end{aligned} \quad (128)$$

となる。また、任意の定数 $\gamma > 0$ に対し、 δ を

$$\delta \triangleq \frac{\gamma}{\sum_{i \in \mathcal{X}'} \log \frac{1}{p_i}} \quad (129)$$

と定義すると、 $\delta > 0$ となる。さらに、この正数 δ に対し、

$$\mathcal{T}_2^n(i) \triangleq \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{X}^n \mid \left| \frac{\mathbf{c}_i(\mathbf{x})}{\lceil (1-D)n \rceil} - p_i \right| < \delta \right\} \quad (130)$$

$$\mathcal{T}_2^n \triangleq \bigcap_{i \in \mathcal{X}'} \mathcal{T}_2^n(i) \quad (131)$$

と定義すると、各 i について

$$\mathbb{E}[c_i(X)] = 1 \times p_i + 0 \times (1 - p_i) = p_i \quad (132)$$

となることから、大数の法則より、

$$\Pr\{X^n \in \mathcal{T}_2^n(i)\} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (133)$$

が成り立つ。よって $\mathcal{T}_2^n$ の定義より、

$$\begin{aligned} \Pr\{X^n \notin \mathcal{T}_2^n\} &= \Pr\left\{X^n \notin \bigcap_{i \in \mathcal{X}'} \mathcal{T}_2^n(i)\right\} \\ &\leq \sum_{i \in \mathcal{X}'} \Pr\{X^n \notin \mathcal{T}_2^n(i)\} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (134)$$

が成り立つ。ここで、以下の確率を求めると

$$\begin{aligned}
& \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{P_{Y_n|X^n}(Y_n|X^n)}{P_{Y_n}(Y_n)} > \alpha \right\} \\
&= \sum_{\mathbf{x}} P_{X^n}(\mathbf{x}) \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{P_{Y_n|X^n}(Y_n|\mathbf{x})}{P_{Y_n}(Y_n)} > \alpha \middle| X^n = \mathbf{x} \right\} \\
&\stackrel{(122)}{=} \sum_{\mathbf{x}} P_{X^n}(\mathbf{x}) \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{Y_n}(\mathbf{y}(\mathbf{x}))} > \alpha \middle| X^n = \mathbf{x} \right\} \\
&\stackrel{(127)}{=} \sum_{\mathbf{x}} P_{X^n}(\mathbf{x}) \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{1}{\prod_{i \in \mathcal{X}'} p_i^{c_i(\mathbf{x})}} > \alpha \middle| X^n = \mathbf{x} \right\} \\
&= \sum_{\mathbf{x}} P_{X^n}(\mathbf{x}) \Pr \left\{ \frac{1}{n} \left(\sum_{i \in \mathcal{X}'} c_i(\mathbf{x}) \log \frac{1}{p_i} \right) > \alpha \middle| X^n = \mathbf{x} \right\} \\
&= \sum_{\mathbf{x}} P_{X^n}(\mathbf{x}) \Pr \left\{ \frac{\lceil (1-D)n \rceil}{n} \left(\sum_{i \in \mathcal{X}'} \frac{c_i(\mathbf{x})}{\lceil (1-D)n \rceil} \log \frac{1}{p_i} \right) > \alpha \middle| X^n = \mathbf{x} \right\} \\
&= \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{T}_2^n} P_{X^n}(\mathbf{x}) \Pr \left\{ \frac{\lceil (1-D)n \rceil}{n} \left(\sum_{i \in \mathcal{X}'} \frac{c_i(\mathbf{x})}{\lceil (1-D)n \rceil} \log \frac{1}{p_i} \right) > \alpha \middle| X^n = \mathbf{x} \right\} \\
&+ \sum_{\mathbf{x} \notin \mathcal{T}_2^n} P_{X^n}(\mathbf{x}) \Pr \left\{ \frac{\lceil (1-D)n \rceil}{n} \left(\sum_{i \in \mathcal{X}'} \frac{c_i(\mathbf{x})}{\lceil (1-D)n \rceil} \log \frac{1}{p_i} \right) > \alpha \middle| X^n = \mathbf{x} \right\} \quad (135)
\end{aligned}$$

となる。 $\mathbf{x} \in \mathcal{T}_2^n$ であるとき、

$$\begin{aligned}
& \frac{\lceil (1-D)n \rceil}{n} \left(\sum_{i \in \mathcal{X}'} \frac{c_i(\mathbf{x})}{\lceil (1-D)n \rceil} \log \frac{1}{p_i} \right) \stackrel{(130)(131)}{\leq} \frac{(1-D)n+1}{n} \left(\sum_{i \in \mathcal{X}'} (p_i + \delta) \log \frac{1}{p_i} \right) \\
&\stackrel{(128)}{=} \left((1-D) + \frac{1}{n} \right) \left(H(X) + \delta \sum_{i \in \mathcal{X}'} \log \frac{1}{p_i} \right) \\
&\stackrel{(129)}{=} \left((1-D) + \frac{1}{n} \right) (H(X) + \gamma) \quad (136)
\end{aligned}$$

となることから、(135), (136) より、

$$\begin{aligned}
& \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{P_{Y_n|X^n}(Y_n|X^n)}{P_{Y_n}(Y_n)} > \alpha \right\} \\
&\leq \mathbf{1} \left[\left((1-D) + \frac{1}{n} \right) (H(X) + \gamma) > \alpha \right] \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{T}_2^n} P_{X^n}(\mathbf{x}) + \sum_{\mathbf{x} \notin \mathcal{T}_2^n} P_{X^n}(\mathbf{x}) \\
&= \mathbf{1} \left[\left((1-D) + \frac{1}{n} \right) (H_2(p) + \gamma) > \alpha \right] \Pr \{X^n \in \mathcal{T}_2^n\} + \Pr \{X^n \notin \mathcal{T}_2^n\} \\
&\rightarrow \mathbf{1} [(1-D) (H(X) + \gamma) > \alpha] \quad (n \rightarrow \infty) \quad (137)
\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned}
& \bar{I}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \\
&= \text{p-}\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{P_{Y_n|X^n}(Y_n|X^n)}{P_{Y_n}(Y_n)} \\
&= \inf \left\{ \alpha \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{P_{Y_n|X^n}(Y_n|X^n)}{P_{Y_n}(Y_n)} > \alpha \right\} = 0 \right\} \\
&= (1 - D)(H(X) + \gamma)
\end{aligned} \tag{138}$$

となる。 γ が任意であったことに加え、定義された Y_n が整合的であり、 $\bar{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D$ を満たすことから、定理 3 より、

$$\begin{aligned}
R_{fm2}(D) &= \inf_{\mathbf{Y}: \bar{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D} \bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \\
&\leq \bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \\
&\leq (1 - D)H(X)
\end{aligned} \tag{139}$$

が成り立つ。

逆定理

レート R が遅延 D で fm-達成可能な任意の整合的な符号列 $\{\varphi_n, \psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して、 $\mathbf{y}(\mathbf{x}) \triangleq \psi_n(\varphi_n(\mathbf{x})), Y_n \triangleq \mathbf{y}(X^n)$ と定義すると、定理 5 の逆定理の証明と同様にして、

$$R_{fm2}(D) \geq (1 - D)H(X) \tag{140}$$

が成り立つ。□

6.2 多元定常無記憶情報源に対する fa-レート・遅延関数

定理 8 生起確率が $\Pr\{X = i\} = p_i$, $\sum_{i \in \mathcal{X}} p_i = 1$ である多元情報源 X に対する fa-レート・遅延関数 $R_{fa2}(D)$ は、

$$R_{fa2}(D) = (1 - D)H(X) \tag{141}$$

となる。

証明 順定理と逆定理によって証明される。順定理では

$$R_{fa2}(D) \leq (1 - D)H(X) \tag{142}$$

を示し、逆定理では、

$$R_{fa2}(D) \geq (1 - D)H(X) \tag{143}$$

を示す.

順定理

各 n について $Y_n \triangleq \psi_n(\varphi_n(X^n)) = X_1 X_2 \cdots X_{\lceil (1-D)n \rceil}$ となるような符号 (ψ_n, φ_n) を考える. すると, 符号列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^\infty$ は整合的であり, $D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D$ を満たす. ここで, $\mathbf{y}(\mathbf{x}) \triangleq \psi_n(\varphi_n(\mathbf{x}))$ と定義する. このときの $\bar{I}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ を求めると, 任意の定数 $\gamma > 0$ を用いて, 定理 7 の順定理の証明と同様に

$$\bar{I}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = (1 - D) (H(X) + \gamma) \quad (144)$$

となる. γ が任意であったことに加え, 定義された Y_n が整合的であり, $D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D$ を満たすことから, 定理 4 より,

$$\begin{aligned} R_{fa2}(D) &= \inf_{\mathbf{Y}: D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D} \bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \\ &\leq \bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \\ &\leq (1 - D)H(X) \end{aligned} \quad (145)$$

が成り立つ.

逆定理

レート R が遅延 D で fa-達成可能な任意の整合的な符号列 $\{\varphi_n, \psi_n\}_{n=1}^\infty$ に対して, $\mathbf{y}(\mathbf{x}) \triangleq \psi_n(\varphi_n(\mathbf{x})), Y_n \triangleq \mathbf{y}(X^n)$ と定義すると, 定理 6 の逆定理の証明と同様にして,

$$R_{fa2}(D) \geq (1 - D)H(X) \quad (146)$$

が成り立つ. $\square$

7 まとめ

本研究では, 達成可能性を [5] と少し異なるものに定義し直し, 符号器への入力に対してその先頭部分が復号器から出力されるような特殊な符号を考えることで, レート・歪み理論と同様の情報スペクトルの手法を用いて, 与えられた遅延基準の範囲内で符号化レートをどこまで小さくできるかを定式化することができた. さらに, 達成可能の定義における遅延基準を確率的上極限によるものでなく, 期待値の上極限によるものとして定義し同様の定理を示すことができた. その上で, 二元定常無記憶情報源および多元定常無記憶情報源に対するレート・遅延関数を求めることができた. 今後の課題として, 記憶のある情報源に対するレート・遅延関数についても検討したい. また, 本研究では符号器から復号器へ送られる符号語の整合性 [3][4] については考慮されていないため, 符号語の整合性についても考慮した定式化を行いたい.

謝辞

本研究を行うにあたり，丁寧なご指導を賜りました指導教員の西新幹彦准教授に感謝の意を表する。

参考文献

- [1] 韓太舜，情報理論における情報スペクトル的方法，培風館，1998.
- [2] 伊藤佑樹，西新幹彦，「ランダム符号化を用いない一般情報源に対するレート・歪み理論の順定理」，第 41 回情報理論とその応用シンポジウム（SITA2018），予稿集，pp.137–142，Dec. 2018.
- [3] 西新幹彦，「逐次符号による情報源の変換と符号化」，第 23 回情報理論とその応用シンポジウム（SITA2000），予稿集，pp.339–342，Oct. 2000.
- [4] 西新幹彦，「最大復号レートを達成する逐次符号化順定理」，第 33 回情報理論とその応用シンポジウム（SITA2010），予稿集，pp.345–348，Dec. 2010.
- [5] 大橋輝路，西新幹彦，「レート・遅延理論に関する基礎的検討」，信学技報，IT2019–18，pp.17–21，July 2019.

付録 A 定理 1 の証明

まず証明に必要な補題を与える.

補題 2 任意の一般情報源 $\mathbf{X} = \{X^n\}_{n=1}^\infty$ に対し, それと相関のある $\mathbf{Y} = \{Y_n\}_{n=1}^\infty$ を考える. R, γ を任意に与えられた正の定数とし, 各 $\mathbf{y} \in \mathcal{X}^*$ に対して $\mathcal{S}_n(\mathbf{y})$ を $\mathcal{X}^n$ の任意の部分集合とする. このとき

$$\hat{W}^n(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \triangleq \Pr\{X^n = \mathbf{x} | Y_n = \mathbf{y}\} \quad (147)$$

$$\mathcal{B}_n(\mathbf{y}) \triangleq \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{X}^n \mid \frac{1}{n} \log \frac{\hat{W}^n(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{P_{X^n}(\mathbf{x})} \leq R - \gamma \right\} \quad (148)$$

とおくと,

$$\frac{1}{n} \log(M_n - 1) \leq R \quad (149)$$

$$\Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n(\psi_n(\varphi_n(X^n)))\} \leq \Pr\{X^n \notin \mathcal{B}_n(Y_n)\} + \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n(Y_n)\} + e^{-n\gamma} \quad (150)$$

を満たす符号 (φ_n, ψ_n) が存在する. ただし, M_n は符号語数である. この補題は [2] をわずかに変更したものになっている.

定理 1 の証明を以下に示す.

証明 順定理と逆定理に分けて証明される.

順定理では

$$R_{fm1}(D) \leq \inf_{\mathbf{Y}: \bar{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D} \bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (151)$$

を, 逆定理では

$$R_{fm1}(D) \geq \inf_{\mathbf{Y}: \bar{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D} \bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (152)$$

を証明する.

1) 順定理

ここでは補題 2 を用いて証明する.

まず,

$$R_0 \triangleq \inf_{\mathbf{Y}: \bar{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D} \bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (153)$$

とおく. $R > R_0$ なる任意の R を考える. するとある $\gamma > 0$ に対して

$$\overline{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D \quad (154)$$

$$R - \gamma > \overline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (155)$$

を満たす $\mathbf{Y}$ が存在する. すると (154) より任意の自然数 k に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} d_n(X^n, Y_n) > D + \frac{1}{k} \right\} = 0 \quad (156)$$

が成り立つ. したがって十分大きなすべての n で

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} d_n(X^n, Y_n) > D + \frac{1}{k} \right\} < \frac{1}{k} \quad (157)$$

となる. このことから, 各 n に対して (157) を満たす最大の k が存在する. そこで, $\gamma_n = \frac{1}{k}$ とおくと $\gamma_n \rightarrow 0$ かつ

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} d_n(X^n, Y_n) > D + \gamma_n \right\} < \gamma_n \quad (158)$$

が成り立つ (対角線論法).

ここで

$$\mathcal{S}_n(\mathbf{y}) \triangleq \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{X}^n \mid \frac{1}{n} d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq D + \gamma_n \right\} \quad (159)$$

とおいて補題 2 を用いると

$$\frac{1}{n} \log(M_n - 1) \leq R \quad (160)$$

$$\begin{aligned} & \Pr \left\{ \frac{1}{n} d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) > D + \gamma_n \right\} \\ & \leq \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{\hat{W}_n(X^n | Y_n)}{P_{X^n}(X^n)} > R - \gamma \right\} + \Pr \{ d_n(X^n, Y_n) > D + \gamma_n \} + e^{-n\gamma} \end{aligned} \quad (161)$$

を満たす符号 (φ_n, ψ_n) が存在する. ただし M_n はこの符号の符号語数である. すると (160) より

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left((M_n - 1) \frac{M_n}{M_n - 1} \right) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \log(M_n - 1) + \frac{1}{n} \log \left(1 + \frac{1}{M_n - 1} \right) \right) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(M_n - 1) \\ &\leq R \end{aligned} \quad (162)$$

となる．また，(187) の右辺の第 1 項は (155) より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{\hat{W}_n(X^n | Y_n)}{P_{X^n}(X^n)} > R - \gamma \right\} = 0 \quad (163)$$

となり，第 2 項は (184) より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} d_n(X^n, Y_n) > D + \gamma_n \right\} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0 \quad (164)$$

となる．したがって (187) より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) > D + \gamma_n \right\} = 0 \quad (165)$$

であるが，これは

$$\text{p-lim sup}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) - \gamma_n \right) = \text{p-lim sup}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) \leq D \quad (166)$$

を意味する．したがって R は D で fm-達成可能である．ここで R が $R > R_0$ なる任意の数だったことに注意すれば， R_0 より大きい R が D で fm-達成可能であることが分かる．したがって

$$R_{fm1}(D) \leq R_0 \quad (167)$$

が成り立つ．これで (151) が示された．

2) 逆定理

ここでは，補題 1 を用いて証明する．

レート R が遅延 D で fm-達成可能と仮定すると，

$$\text{p-lim sup}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) \leq D \quad (168)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \leq R \quad (169)$$

を満たす符号 (φ_n, ψ_n) が存在することになる． $Y_n = \psi_n(\varphi_n(X^n))$ とおいて $\mathbf{Y} = \{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ とすると，(168) より

$$\overline{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D \quad (170)$$

と書ける．次に

$$\overline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \leq R \quad (171)$$

を示す．ここで，任意の $\gamma > 0$ を用いると $|\psi_n(\varphi_n(\mathcal{X}^n))| \leq M_n$ であることから 補題 1 より

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{Y_n}(Y_n)} \geq \frac{1}{n} \log M_n + \gamma \right\} \leq e^{-n\gamma} \quad (172)$$

が成り立つ．また，

$$\frac{1}{n} \log \frac{P_{Y_n|X^n}(\mathbf{y} | \mathbf{x})}{P_{Y_n}(\mathbf{y})} \leq \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{Y_n}(\mathbf{y})}$$

であるから， (172) より

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{P_{Y_n|X^n}(Y_n | X^n)}{P_{Y_n}(Y_n)} \geq \frac{1}{n} \log M_n + \gamma \right\} \leq e^{-n\gamma} \quad (173)$$

となる．ところが，

$$\frac{1}{n} \log M_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n + \gamma \quad (\forall n \geq n_0)$$

であるので， (169) より

$$\begin{aligned} \mathbf{p}\text{-}\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{P_{Y_n|X^n}(Y_n | X^n)}{P_{Y_n}(Y_n)} &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n + 2\gamma \\ &\leq R + 2\gamma \end{aligned} \quad (174)$$

が成り立つ．よって，

$$\bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \leq R + 2\gamma \quad (175)$$

となる． $\gamma > 0$ は任意であったので， $\bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \leq R$ が示される． よって， (170) より

$$R_{fm1}(D) \geq \inf_{\mathbf{Y}: \bar{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D} \bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (176)$$

が結論される． よって (152) が示された． $\square$

付録 B 定理 3 の証明

証明 順定理と逆定理に分けて証明される．

順定理では

$$R_{fm2}(D) \leq \inf_{\mathbf{Y}: \bar{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D} \bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (177)$$

を，逆定理では

$$R_{fm2}(D) \geq \inf_{\mathbf{Y}: \bar{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D} \bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (178)$$

を証明する.

1) 順定理

ここでは補題 2 を用いて証明する.

まず,

$$R_0 \triangleq \inf_{\mathbf{Y}: \overline{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D} \overline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (179)$$

とおく. $R > R_0$ なる任意の R を考える. するとある $\gamma > 0$ に対して

$$\overline{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D \quad (180)$$

$$R - \gamma > \overline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (181)$$

を満たす $\mathbf{Y}$ が存在する. すると (180) より任意の自然数 k に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} d_n(X^n, Y_n) > D + \frac{1}{k} \right\} = 0 \quad (182)$$

が成り立つ. したがって十分大きなすべての n で

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} d_n(X^n, Y_n) > D + \frac{1}{k} \right\} < \frac{1}{k} \quad (183)$$

となる. このことから, 各 n に対して (183) を満たす最大の k が存在する. そこで, $\gamma_n = \frac{1}{k}$ とおくと $\gamma_n \rightarrow 0$ かつ

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} d_n(X^n, Y_n) > D + \gamma_n \right\} < \gamma_n \quad (184)$$

が成り立つ (対角線論法).

ここで

$$\mathcal{S}_n(\mathbf{y}) \triangleq \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{X}^n \mid \frac{1}{n} d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq D + \gamma_n \right\} \quad (185)$$

とおいて補題 2 を用いると

$$\frac{1}{n} \log(M'_n - 1) \leq R \quad (186)$$

$$\begin{aligned} & \Pr \left\{ \frac{1}{n} d_n(X^n, \psi'_n(\varphi'_n(X^n))) > D + \gamma_n \right\} \\ & \leq \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{\hat{W}_n(X^n | Y_n)}{P_{X^n}(X^n)} > R - \gamma \right\} + \Pr \left\{ \frac{1}{n} d_n(X^n, Y_n) > D + \gamma_n \right\} + e^{-n\gamma} \end{aligned} \quad (187)$$

を満たす符号 (φ'_n, ψ'_n) が存在する．ただし M'_n はこの符号の符号語数である．すると (186) より

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M'_n &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left((M'_n - 1) \frac{M'_n}{M'_n - 1} \right) \\
&= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \log(M'_n - 1) + \frac{1}{n} \log \left(1 + \frac{1}{M'_n - 1} \right) \right) \\
&= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(M'_n - 1) \\
&\leq R
\end{aligned} \tag{188}$$

が成り立つ．ここで，符号 (φ_n, ψ_n) を用意し，この符号の符号語数を M_n とする．また，符号 (φ'_k, ψ'_k) において $k = 1, 2, \dots, n$ とし復号語を作り、その全てを (φ_n, ψ_n) の復号語とすれば，この符号は整合的である．よって $M_n = \sum_{k=1}^n M'_k$ とすれば (188), $\frac{1}{x} \log x \rightarrow 0 (x \rightarrow \infty)$ より

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{k=1}^n M'_k \\
&\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(n M'_n) \\
&= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \log M'_n + \frac{1}{n} \log n \right) \\
&= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M'_n \\
&\leq R
\end{aligned} \tag{189}$$

となる．また，以上のように (φ_n, ψ_n) を作ったとすると

$$\frac{1}{n} d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) \leq \frac{1}{n} d_n(X^n, \psi'_n(\varphi'_n(X^n))) \tag{190}$$

となるので，

$$\begin{aligned}
\Pr \left\{ \frac{1}{n} d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) > D + \gamma_n \right\} &\leq \Pr \left\{ \frac{1}{n} d_n(X^n, \psi'_n(\varphi'_n(X^n))) > D + \gamma_n \right\} \\
&\leq \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{\hat{W}_n(X^n|Y_n)}{P_{X^n}(X^n)} > R - \gamma \right\} + \Pr \left\{ \frac{1}{n} d_n(X^n, Y_n) > D + \gamma_n \right\} + e^{-n\gamma}
\end{aligned} \tag{191}$$

が成り立つ．(191) の右辺の第 1 項は (181) より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{\hat{W}_n(X^n|Y_n)}{P_{X^n}(X^n)} > R - \gamma \right\} = 0 \tag{192}$$

となり，第 2 項は (184) より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} d_n(X^n, Y_n) > D + \gamma_n \right\} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0 \quad (193)$$

となる．したがって (191) より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) > D + \gamma_n \right\} = 0 \quad (194)$$

であるが，これは

$$\text{p-lim sup}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) - \gamma_n \right) = \text{p-lim sup}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) \leq D \quad (195)$$

を意味する．したがって R は D で fm-達成可能である．ここで R が $R > R_0$ なる任意の数だったことに注意すれば， R_0 より大きい R が D で fm-達成可能であることが分かる．したがって

$$R_{fm2}(D) \leq R_0 \quad (196)$$

が成り立つ．よって，(177) が示された．

2) 逆定理

レート R が遅延 D で fm-達成可能である整合的な符号 (φ_n, ψ_n) が存在すると仮定すれば，定理 1 の逆定理の証明と同様にして

$$R_{fm2}(D) \geq \inf_{\mathbf{Y}: \overline{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D} \bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (197)$$

が結論される．よって (178) が示された．□