

信州大学工学部

学士論文

一般通信路に対する
漸近的成本制約付き通信路符号化定理

指導教員 西新 幹彦 准教授

学科 電気電子工学科
学籍番号 15T2084B
氏名 堀 真樹

2020 年 3 月 31 日

目次

1	はじめに	2
2	先行研究	2
2.1	一般通信路における Γ -通信路容量	3
2.2	一般通信路における (ε, Γ) -通信路容量	4
3	一般通信路における漸近的成本制約 Γ -通信路容量	4
3.1	逆定理	6
3.2	順定理	8
4	一般通信路における漸近的成本制約 (ε, Γ) -通信路容量	12
4.1	逆定理	13
4.2	順定理	14
5	まとめと今後の課題	16
	謝辞	16
	参考文献	16

1 はじめに

通信路符号化問題では送り手と受け手の間の通信路の存在を仮定し、送り手から送られたメッセージを受け手が正しく受け取るための伝送レートと復号誤り確率の関係について取り扱う。

メッセージの送信には、電力や時間といった何らかのコストが必要となる。コストは一般に入力系列によって異なり、符号語が指定のコスト制約を満たす通信路符号化問題をコスト制約付き通信路符号化問題という。例を挙げると、AWGN 通信路では入力シンボルが任意の実数値をとり、一般にその二乗がコストとして扱われる。このとき入力コストの最大値には限界があるため、これはコスト制約付き通信路符号化問題として扱える。また、一般に通信路容量は条件の緩和によって増加することが期待される。従来のコスト制約付き通信路符号化定理 [1] ではすべての符号語長でコスト制約を満たすことを要請しており、この条件を緩和した場合には通信路容量が増加すると考えられる。そこで本論文では従来のコスト制約の条件を緩和した、一般通信路における漸近的成本制約付き通信路符号化問題を定義し、その通信路容量である漸近的成本制約 Γ -通信路容量について明らかにした。漸近的成本制約付き通信路符号化定理ではコスト制約を満たす確率が漸近的に 1 に近づくことを要請しており、従来のコスト制約をより弱めたものになっている。

加えて、誤り確率 ε を許容した場合の通信路容量である漸近的成本制約 (ε, Γ) -通信路容量についても明らかにした。

2 先行研究

はじめに、本論文の先行研究となる、コスト制約付き通信路符号化定理について復習する。

送り手が選ぶ M_n 個のメッセージの集合を $\mathcal{M}_n = \{1, 2, \dots, M_n\}$ とし、通信路への入力および出力はそれぞれ入力アルファベット $\mathcal{X}$ ($\mathcal{X}$ は有限集合)、出力アルファベット $\mathcal{Y}$ の要素とする。このとき一般的な通信路は、系列長 n の入力系列 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{X}^n$ 、出力系列 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathcal{Y}^n$ を用いて、条件付き確率 $\mathbf{W} \triangleq \{W^n(\mathbf{y}|\mathbf{x})\}_{n=1}^{\infty}$ でモデル化される。

また、任意の入力系列 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n$ に対してある実数 $c_n(\mathbf{x}) > 0$ が与えられるとき、 $c_n(\mathbf{x})$ を $\mathbf{x}$ のコストと定める。

メッセージは符号器 $\varphi_n : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{X}^n$ で符号化され、出力系列 $\mathbf{y}$ は復号器 $\psi_n : \mathcal{Y}^n \rightarrow \mathcal{M}_n$ で復号化される場合を考える。このとき、 $\varphi_n(m)$ を $m \in \mathcal{M}_n$ の符号語、 $\psi_n(\mathbf{y})$ を $\mathbf{y}$ の復号語という。 n と M_n が与えられたとき、符号 (φ_n, ψ_n) の伝送レート R は、 $R \triangleq \frac{1}{n} \log M_n$ で与えられ、復号誤り確率 ε_n は $\varepsilon_n \triangleq \frac{1}{M_n} \sum_{m \in \mathcal{M}_n} W^n(\psi_n^{-1}(m)^c | \varphi_n(m))$ で与えられる。また、

以降本論文では $\mathbb{N}$ は自然数全体の集合を表す.

二つの確率変数列 $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ について, 次を定義する.

定義 1 確率変数列に対して

$$I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \triangleq p\text{-}\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n | X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} \quad (1)$$

とし, $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ の相互情報量スペクトル下限と呼ぶ.

定義 2 確率変数列に対して

$$I_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \triangleq \sup \left\{ \theta \left| \limsup_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n | X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} < \theta \right\} \leq \varepsilon \right. \right\} \quad (2)$$

とする. なお, $\varepsilon = 0$ のとき式 (1) と式 (2) は一致する.

2.1 一般通信路における Γ -通信路容量

定義 3 任意の非負実数 R, Γ に対し, レート R が Γ -達成可能とは

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \quad (3)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq R \quad (4)$$

$$\frac{1}{n} c_n(\varphi_n(m)) \leq \Gamma \quad (\forall n \in \mathbb{N}, m = 1, 2, \dots, M_n) \quad (5)$$

を満たすような符号の列 $\{\varphi_n, \psi_n\}_{n=1}^\infty$ が存在することである.

定義 4(Γ -コスト通信路容量) Γ -通信路容量 $C(\Gamma)$ を

$$C(\Gamma) \triangleq \sup \{ R | R \text{ が } \Gamma\text{-達成可能} \} \quad (6)$$

と定義する.

このとき以下の定理が成立することが知られている.

定理 1[1] 一般通信路における Γ -通信路容量 $C(\Gamma)$ は

$$\mathcal{X}^n(\Gamma) \triangleq \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{X}^n \left| \frac{1}{n} c_n(\mathbf{x}) \leq \Gamma \right. \right\} \quad (7)$$

とすると, すべての $n = 1, 2, \dots$ に対して,

$$\Pr\{X^n \in \mathcal{X}^n(\Gamma)\} = 1 \quad (8)$$

を満たす入力過程 $\mathbf{X} = \{X^n\}_{n=1}^\infty$ の全体を $\mathcal{S}_\Gamma$ で表し、 $\mathbf{X}$ に対応する通信路 $\mathbf{W}$ の出力過程を $\mathbf{Y}$ とすると、相互情報量スペクトル下限 $\underline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$ を用いて

$$C(\Gamma) = \sup_{\mathbf{X} \in \mathcal{S}_\Gamma} \underline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (9)$$

で与えられる。

2.2 一般通信路における (ε, Γ) -通信路容量

一般通信路における Γ -通信路符号化定理を拡張し、任意の固定した定数 $0 \leq \varepsilon < 1$ に対して、誤り確率を ε まで許容した通信路容量である (ε, Γ) -通信路容量を考える。

定義 5 任意の非負実数 $R, \Gamma, 0 \leq \varepsilon < 1$ に対し、レート R が (ε, Γ) -達成可能とは、

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n \leq \varepsilon \quad (10)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq R \quad (11)$$

$$\frac{1}{n} c_n(\varphi_n(m)) \leq \Gamma \quad (\forall n \in \mathbb{N}, m = 1, 2, \dots, M_n) \quad (12)$$

を満たすような符号の列 $\{\varphi_n, \psi_n\}_{n=1}^\infty$ が存在することである。

定義 6 (ε, Γ) -コスト通信路容量 (ε, Γ) -通信路容量 $C(\varepsilon, \Gamma)$ を

$$C(\varepsilon, \Gamma) \triangleq \sup \{R | R \text{ が } (\varepsilon, \Gamma)\text{-達成可能} \} \quad (13)$$

と定義する。

このとき、以下の定理が成立することが知られている。

定理 2[1] 一般通信路における (ε, Γ) -通信路容量 $C(\varepsilon, \Gamma)$ は、 $\underline{I}_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$ を用いて

$$C(\varepsilon, \Gamma) = \sup_{\mathbf{X} \in \mathcal{S}_\Gamma} \underline{I}_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (14)$$

で与えられる。

3 一般通信路における漸近的成本制約 Γ -通信路容量

Γ -達成可能の条件として、式 (5), 式 (12) が全ての n で成立することを要請している。本研究ではこの条件を緩和させ、コスト制約を満たす確率が漸近的に 1 となることを要請した場合を考える。本論文ではこれを漸近的成本制約と呼ぶ。

定義 5 任意の非負実数 R, Γ に対し, レート R が漸近的に Γ -達成可能とは

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \quad (15)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq R \quad (16)$$

$$p\text{-}\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(U_{M_n})) \leq \Gamma \quad (17)$$

を満たすような符号の列 $\{\varphi_n, \psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在することである. ただし, U_{M_n} は符号上の一様分布に従う確率変数である.

定義 6 漸近的 Γ - 通信路容量 $C(\Gamma)$ を

$$C(\Gamma) \triangleq \sup\{R | R \text{ が漸近的に } \Gamma\text{-達成可能} \} \quad (18)$$

と定義する.

このとき, 次の定理が成立する.

定理 3 一般通信路における漸近的 Γ -通信路容量 $C(\Gamma)$ は,

$$p\text{-}\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} c_n(X^n) \leq \Gamma \quad (19)$$

を満たす入力過程 $\mathbf{X} = \{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ の全体を S'_Γ で表すとき,

$$C(\Gamma) = \sup_{\mathbf{X} \in S'_\Gamma} \underline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (20)$$

で与えられる.

本章の以降では, 順定理

$$C(\Gamma) \geq \sup_{\mathbf{X} \in S'_\Gamma} \underline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (21)$$

及び, 逆定理

$$C(\Gamma) \leq \sup_{\mathbf{X} \in S'_\Gamma} \underline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (22)$$

を示すことで定理 3 を証明する. なお, 逆定理から先に証明する.

3.1 逆定理

逆定理の証明のため、次の補題を用意する。

補題 1 メッセージの集合 $\mathcal{M}_n$ のサイズが M_n 、誤り確率が ε_n である符号 $\mathcal{C}_n$ に対し、 $\mathcal{C}_n$ 上の一様分布に従う確率変数を X^n とし、 X^n を入力とする通信路 W^n の出力を Y^n とすると、各 $n = 1, 2, \dots$ に対して

$$\varepsilon_n \geq \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n|X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} \leq \frac{1}{n} \log M_n - \gamma \right\} - e^{-n\gamma} \quad (23)$$

が成立する。ただし、 $\gamma > 0$ は任意の定数である。

(証明)

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \log \frac{W^n(\mathbf{y}|\mathbf{x})}{P_{Y^n}(\mathbf{y})} &= \frac{1}{n} \log \frac{P_{Y^n|X^n}(\mathbf{y}|\mathbf{x})}{P_{Y^n}(\mathbf{y})} \\ &= \frac{1}{n} \log \frac{P_{X^n Y^n}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{P_{X^n}(\mathbf{x}) P_{Y^n}(\mathbf{y})} \\ &= \frac{1}{n} \log \frac{P_{X^n|Y^n}(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{P_{X^n}(\mathbf{x})} \end{aligned} \quad (24)$$

と変形し、 X^n が符号上の一様分布に従う確率変数であることに注意すると、

$$\frac{1}{n} \log \frac{W^n(\mathbf{y}|\mathbf{x})}{P_{Y^n}(\mathbf{y})} = \frac{1}{n} \log M_n + \frac{1}{n} \log P_{X^n|Y^n}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \quad (25)$$

と表せることから、式 (23) の右辺第 1 項は

$$\begin{aligned} \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n|X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} \leq \frac{1}{n} \log M_n - \gamma \right\} &= \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log P_{X^n|Y^n}(X^n|Y^n) \leq -\gamma \right\} \\ &= \Pr \{ P_{X^n|Y^n}(X^n|Y^n) \leq e^{-n\gamma} \} \end{aligned} \quad (26)$$

と書き換えられる。よって補題 1 を示すには、

$$\Pr \{ P_{X^n|Y^n}(X^n|Y^n) \leq e^{-n\gamma} \} \leq \varepsilon_n + e^{-n\gamma} \quad (27)$$

が成り立つことを示せばよい。そこで、メッセージ $m (m = 1, 2, \dots, M_n)$ に対して

$$B_m \triangleq \{ \mathbf{y} \in \mathcal{Y}^n | P_{X^n|Y^n}(\varphi_n(m)|\mathbf{y}) \leq e^{-n\gamma} \} \quad (28)$$

と定義して、式 (26) を変形すると

$$\begin{aligned}
\Pr \{P_{X^n|Y^n}(X^n|Y^n) \leq e^{-n\gamma}\} &= \sum_{m=1}^{M_n} \Pr \{X^n = \varphi_n(m), P_{X^n|Y^n}(\varphi_n(m)|Y^n) \leq e^{-n\gamma}\} \\
&= \sum_{m=1}^{M_n} \Pr \{X^n = \varphi_n(m), Y^n \in B_m\} \\
&= \sum_{m=1}^{M_n} \Pr \{X^n = \varphi_n(m), Y^n \in B_m \cap \psi_n^{-1}(m)\} \\
&\quad + \sum_{m=1}^{M_n} \Pr \{X^n = \varphi_n(m), Y^n \in B_m \cap \psi_n^{-1}(m)^c\} \quad (29)
\end{aligned}$$

となる．ここで式 (29) の右辺第 1 項については

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{M_n} \Pr \{X^n = \varphi_n(m), Y^n \in B_m \cap \psi_n^{-1}(m)\} &= \sum_{m=1}^{M_n} \sum_{\mathbf{y} \in B_m \cap \psi_n^{-1}(m)} P_{Y^n}(\mathbf{y}) P_{X^n|Y^n}(\varphi_n(m)|\mathbf{y}) \\
&\leq e^{-n\gamma} \sum_{m=1}^{M_n} \sum_{\mathbf{y} \in B_m \cap \psi_n^{-1}(m)} P_{Y^n}(\mathbf{y}) \\
&\leq e^{-n\gamma} \sum_{m=1}^{M_n} P_{Y^n}(\psi_n^{-1}(m)) \\
&= e^{-n\gamma} \quad (30)
\end{aligned}$$

となり、式 (29) の右辺第 2 項については

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{M_n} \Pr \{X^n = \varphi_n(m), Y^n \in B_m \cap \psi_n^{-1}(m)^c\} &\leq \sum_{m=1}^{M_n} \Pr \{X^n = \varphi_n(m), Y^n \in \psi_n^{-1}(m)^c\} \\
&= \sum_{m=1}^{M_n} P_{X^n}(\varphi_n(m)) P_{Y^n|X^n}(\psi_n^{-1}(m)^c | \varphi_n(m)) \\
&= \frac{1}{M_n} \sum_{m=1}^{M_n} W^n(\psi_n^{-1}(m)^c | \varphi_n(m)) \quad (31)
\end{aligned}$$

$$= \varepsilon_n \quad (32)$$

となるため、式 (29) は

$$\Pr \{P_{X^n|Y^n}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \leq e^{-n\gamma}\} \leq \varepsilon_n + e^{-n\gamma} \quad (33)$$

と表せ、これは (27) と一致するため補題は示された．□

逆定理の証明

R が漸近的に Γ -達成可能であるとする．すなわち，定義 5 を満たすような符号の列 $\{\varphi_n, \psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在したとすると，この符号上の一様分布に従う確率変数を X^n とし， X^n を入力とする通信路 W^n の出力を Y^n として， $\mathbf{X} = \{X^n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{S}'_{\Gamma}$ ， $\mathbf{Y} = \{Y^n\}_{n=1}^{\infty}$ とおく．ここで， $\gamma > 0$ を任意の定数とすれば，補題 1 より

$$\varepsilon_n \geq \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n|X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} \leq \frac{1}{n} \log M_n - \gamma \right\} - e^{-n\gamma} \quad (34)$$

が成立する．また， $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq R$ より，十分大きなすべての n で $\frac{1}{n} \log M_n \geq R - \gamma$ が成り立ち，

$$\varepsilon_n \geq \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n|X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} \leq R - 2\gamma \right\} - e^{-n\gamma} \quad (35)$$

と表せる．さらに両辺の極限をとると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n|X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} \leq R - 2\gamma \right\} = 0 \quad (36)$$

が得られ， $\underline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$ の定義より

$$R - 2\gamma \leq \underline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (37)$$

となり， $\gamma > 0$ は任意なので

$$R \leq \underline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (38)$$

と表せる．いま， $\mathbf{X} \in \mathcal{S}'_{\Gamma}$ であるから

$$R \leq \sup_{\mathbf{X} \in \mathcal{S}'_{\Gamma}} \underline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (39)$$

が成り立ち， R は漸近的に Γ -達成可能なため，漸近的 Γ -通信路容量 $C(\Gamma)$ は

$$C(\Gamma) \leq \sup_{\mathbf{X} \in \mathcal{S}'_{\Gamma}} \underline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (40)$$

となる．よって，逆定理が示せた．□

3.2 順定理

順定理の証明のため，次の補題を用意する．

補題 2 X^n を任意の通信路入力とし、それに対応する通信路 W^n の出力を Y^n とする。 M_n を任意に与えられた正整数として、 $\mathcal{X}^n$ の任意の部分集合 $\mathcal{S}_n \subset \mathcal{X}^n$ が与えられた場合、その符号語が $\mathcal{S}_n$ に含まれるような

$$\varepsilon_n \leq \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n|X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} \leq \frac{1}{n} \log M_n + \gamma \right\} + \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n\} + e^{-n\gamma} \quad (41)$$

を満たす符号が存在する。ただし、 $\gamma > 0$ は任意の定数である。

(証明)

はじめに

$$B(\mathbf{x}) \triangleq \left\{ \mathbf{y} \in \mathcal{Y}^n \left| \log \frac{W^n(\mathbf{y}|\mathbf{x})}{P_{Y^n}(\mathbf{y})} \geq \log M_n + n\gamma \right. \right\} \quad (42)$$

$$\lambda_n \triangleq \Pr\{Y^n \notin B(X^n)\} + \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n\} + e^{-n\gamma} \quad (43)$$

とおく。補題の主張を満たすためには $\varepsilon_n \leq \lambda_n$ を満たす符号が存在することを示せばよい。 $\lambda_n \geq 1$ の場合は自明に成立するため、以下 $\lambda_n < 1$ の場合を考える。

通信路に対する符号 $\mathcal{C}_n$ を次のように逐次的に構成する。まず、最初の符号語 $\varphi_n(1)$ として $W^n(B(\mathbf{x})|\mathbf{x}) \geq 1 - \lambda_n$ を満たす $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_n$ を任意に選び、その復号領域を $\psi_n^{-1}(1) \triangleq B(\varphi_n(1))$ と定義する。次に、 m 番目の符号語 $\varphi_n(m)$ として

$$W^n(B(\mathbf{x}) \setminus \bigcup_{m' < m} \psi_n^{-1}(m')|\mathbf{x}) \geq 1 - \lambda_n \quad (44)$$

を満たす $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_n$ を任意に選び、その復号領域を $\psi_n^{-1}(m) \triangleq B(\varphi_n(m)) \setminus \bigcup_{m' < m} \psi_n^{-1}(m')$ とする。この操作を繰り返し、式 (44) を満たすような符号語が L_n 個まで選べたとして、

$$\mathcal{D} \triangleq \bigcup_{m \leq L_n} \psi_n^{-1}(m) \quad (45)$$

と定義する。さて、 $\Pr\{Y^n \in B(X^n)\}$ は

$$\begin{aligned} \Pr\{Y^n \in B(X^n)\} &= \Pr\{Y^n \in B(X^n) \cap \mathcal{D}\} + \Pr\{Y^n \in B(X^n) \setminus \mathcal{D}, X^n \in \mathcal{S}_n\} \\ &\quad + \Pr\{Y^n \in B(X^n) \setminus \mathcal{D}, X^n \notin \mathcal{S}_n\} \end{aligned} \quad (46)$$

と表せる。ここで $B(\mathbf{x})$ の定義より、 $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x})$ であれば

$$\begin{aligned} \log \frac{W^n(\mathbf{y}|\mathbf{x})}{P_{Y^n}(\mathbf{y})} &\geq \log M_n + n\gamma \\ \Leftrightarrow P_{Y^n}(\mathbf{y}) &\leq \frac{W^n(\mathbf{y}|\mathbf{x})}{M_n e^{n\gamma}} \end{aligned} \quad (47)$$

が成り立つことに注意すると、式 (46) の右辺第 1 項に関しては、

$$\begin{aligned}
\Pr\{Y^n \in B(X^n) \cap \mathcal{D}\} &\leq \Pr\{Y^n \in \mathcal{D}\} = \sum_{m \leq L_n} P_{Y^n}(\psi_n^{-1}(m)) \\
&\leq \sum_{m \leq L_n} P_{Y^n}(B(\varphi_n(m))) = \sum_{m \leq L_n} \sum_{\mathbf{y} \in B(\varphi_n(m))} P_{Y^n}(\mathbf{y}) \\
&\leq \sum_{m \leq L_n} \sum_{\mathbf{y} \in B(\varphi_n(m))} \frac{W^n(\mathbf{y}|\varphi_n(m))}{M_n e^{n\gamma}} \\
&\leq \frac{L_n}{M_n e^{n\gamma}}
\end{aligned} \tag{48}$$

と表せる．式 (46) の右辺第 2 項に関しては、 L_n の定義よりすべての $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_n$ に対して $W^n(B(\mathbf{x}) \setminus \mathcal{D}|\mathbf{x}) < 1 - \lambda_n$ が成り立つことから

$$\begin{aligned}
\Pr\{Y^n \in B(X^n) \setminus \mathcal{D}, X^n \in \mathcal{S}_n\} &= \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}_n} P_{X^n}(\mathbf{x}) W^n(B(\mathbf{x}) \setminus \mathcal{D}|\mathbf{x}) \\
&< \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}_n} P_{X^n}(\mathbf{x}) (1 - \lambda_n) \\
&\leq 1 - \lambda_n
\end{aligned} \tag{49}$$

と表せ、式 (46) の右辺第 3 項に関しては

$$\Pr\{Y^n \in B(X^n) \setminus \mathcal{D}, X^n \notin \mathcal{S}_n\} \leq \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n\} \tag{50}$$

と表せることから、式 (46) に対して、式 (48)、式 (49)、式 (50) を用いると

$$\begin{aligned}
\Pr\{Y^n \in B(X^n)\} &< \frac{L_n}{M_n} e^{-n\gamma} + 1 - \lambda_n + \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n\} \\
&= \frac{L_n}{M_n} e^{-n\gamma} + 1 - \Pr\{Y^n \notin B(X^n)\} - e^{-n\gamma} \\
M_n &< L_n
\end{aligned} \tag{51}$$

が得られ、符号 $\mathcal{C}_n = \{\varphi_n(1), \varphi_n(2), \dots, \varphi_n(L_n)\}$ からサイズが M_n の部分符号 $\mathcal{C}_n^* = \{\varphi_n(1), \varphi_n(2), \dots, \varphi_n(M_n)\}$ が取り出せることが分かる．この部分符号の誤り確率 ε_n は

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n &\triangleq \frac{1}{M_n} \sum_{m \in \mathcal{M}_n} W^n(\psi_n^{-1}(m)^c | \varphi_n(m)) \\
&\leq 1 - \frac{1}{M_n} \sum_{m \in \mathcal{M}_n} W^n(\psi_n^{-1}(m) | \varphi_n(m)) \\
&\leq 1 - \frac{1}{M_n} \sum_{m \in \mathcal{M}_n} (1 - \lambda_n) = \lambda_n
\end{aligned}$$

であるため、補題の主張が成立する。□

順定理の証明

$R < \sup_{\mathbf{X} \in \mathcal{S}'_\Gamma} \underline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$ なる任意の R を考える。 $R = \sup_{\mathbf{X} \in \mathcal{S}'_\Gamma} \underline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) - 2\gamma$ とすると、ある入力 $\mathbf{X} = \{X^n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{S}'_\Gamma$ が存在して $\underline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) > R + \gamma$ となる。一方、 $M_n = e^{nR}$ とおくと $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq R$ が成立する。 $\mathbf{Y} = \{Y^n\}_{n=1}^\infty$ を $\mathbf{X} = \{X^n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{S}'_\Gamma$ の通信路出力とすれば、 $\mathcal{S}'_\Gamma$ の定義より、 $\forall k \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(X^n) > \Gamma + \frac{1}{k} \right\} = 0 \quad (52)$$

となり、十分大きな全ての n で

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(X^n) > \Gamma + \frac{1}{k} \right\} < \frac{1}{k} \quad (53)$$

となる。このとき n に対して上式を満たす最大の k が決まる。その k を用いて $\gamma_n \triangleq \frac{1}{k}$ とおくと、 $n \rightarrow \infty$ で $\gamma_n \rightarrow 0$ かつ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(X^n) > \Gamma + \gamma_n \right\} = 0 \quad (54)$$

となる。ここで、 $\mathcal{S}_n \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n \mid \frac{1}{n} c_n(\mathbf{x}) \leq \Gamma + \gamma_n\}$ と定義して補題 2 を適用すると、符号語が $\mathcal{S}_n$ に含まれるような

$$\varepsilon_n \leq \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n | X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} \leq R + \gamma \right\} + \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n\} + e^{-n\gamma} \quad (55)$$

を満たす符号が存在する。さらに、上式の両辺の極限をとると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n | X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} \leq R + \gamma \right\} + \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n\} \quad (56)$$

となり、 $\underline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$ と $\mathcal{S}_n$ の定義より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \quad (57)$$

が成り立つ。また, $\varphi_n(m) \in \mathcal{S}_n$ であるので,

$$\begin{aligned}
\Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(U_{M_n})) > \Gamma + \gamma_n \right\} &= \frac{1}{M_n} \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(m)) > \Gamma + \gamma_n \right\} \\
&= 1 - \frac{1}{M_n} \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(m)) \leq \Gamma + \gamma_n \right\} \\
&= 1 - \frac{1}{M_n} \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \Pr \{ \varphi_n(m) \in \mathcal{S}_n \} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{58}$$

となり

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(U_{M_n})) - \gamma_n > \Gamma \right\} = 0 \tag{59}$$

となる。ここで

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(U_{M_n})) - \gamma_n > \theta \right\} = 0 \tag{60}$$

を満たす任意の実数 θ を考えると, $\Gamma \geq \inf \theta$ が成り立つため, $p\text{-}\limsup_{n \rightarrow \infty}$ の定義より

$$\begin{aligned}
\therefore \Gamma &\geq p\text{-}\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(U_{M_n})) - \gamma_n \right\} \\
&= p\text{-}\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(U_{M_n})) \right\}
\end{aligned} \tag{61}$$

が成立する。よって R は漸近的に Γ -達成可能。すなわち

$$C(\Gamma) \geq \sup_{\mathbf{X} \in \mathcal{S}'_\Gamma} \underline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \tag{62}$$

となり, 順定理が示せた。□

4 一般通信路における漸近的成本制約 (ε, Γ) -通信路容量

一般通信路における漸近的成本付き Γ -通信路符号化定理を拡張し, 任意の固定した定数 $0 \leq \varepsilon < 1$ に対して, 誤り確率を ε まで許容した通信路容量である漸近的 (ε, Γ) -通信路容量を考える。

定義 7 任意の非負実数 $R, \Gamma, 0 \leq \varepsilon < 1$ に対し, レート R が漸近的に (ε, Γ) -達成可能とは

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n \leq \varepsilon \quad (63)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq R \quad (64)$$

$$p\text{-}\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(U_{M_n})) \leq \Gamma \quad (65)$$

を満たすような符号の列 $\{\varphi_n, \psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在することである.

定義 8 漸近的 (ε, Γ) -通信路容量 $C(\varepsilon, \Gamma)$ を

$$C(\varepsilon, \Gamma) \triangleq \sup\{R | R \text{ が漸的に } (\varepsilon, \Gamma)\text{-達成可能}\} \quad (66)$$

と定義する.

このとき次の定理が成立する.

定理 4 漸近的 (ε, Γ) -通信路容量 $C(\varepsilon, \Gamma)$ は,

$$C(\varepsilon, \Gamma) = \sup_{\mathbf{X} \in \mathcal{S}'_{\Gamma}} \underline{I}_{\varepsilon}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (67)$$

で与えられる.

本章の以降では, 順定理

$$C(\varepsilon, \Gamma) \geq \sup_{\mathbf{X} \in \mathcal{S}'_{\Gamma}} \underline{I}_{\varepsilon}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (68)$$

及び, 逆定理

$$C(\varepsilon, \Gamma) \leq \sup_{\mathbf{X} \in \mathcal{S}'_{\Gamma}} \underline{I}_{\varepsilon}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (69)$$

を示すことで定理 4 を証明する. なお, 逆定理から先に証明する.

4.1 逆定理

R が漸的に (ε, Γ) -達成可能であるとする. すなわち, 定義 7 を満たすような符号の列 $\{\varphi_n, \psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在したとすると, この符号上の一様分布に従う確率変数を X^n とし, X^n を入力とする通信路 W^n の出力を Y^n として, $\mathbf{X} = \{X^n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{S}'_{\Gamma}$, $\mathbf{Y} = \{Y^n\}_{n=1}^{\infty}$ とおく. ここで, $\gamma > 0$ を任意の定数とすれば, 補題 1 より

$$\varepsilon_n \geq \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n | X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} \leq \frac{1}{n} \log M_n - \gamma \right\} - e^{-n\gamma} \quad (70)$$

が成立する．また， $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq R$ より，十分大きなすべての n で $\frac{1}{n} \log M_n \geq R - \gamma$ が成り立ち，上式は

$$\varepsilon_n \geq \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n|X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} \leq R - 2\gamma \right\} - e^{-n\gamma} \quad (71)$$

と表せる．さらに両辺の上極限をとると

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n|X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} \leq R - 2\gamma \right\} \quad (72)$$

が得られ， R は漸近的に (ε, Γ) -達成可能であるため

$$\varepsilon \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n|X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} \leq R - 2\gamma \right\} \quad (73)$$

が成り立つ．さらに， $\underline{I}_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$ の定義より

$$R - 2\gamma \leq \underline{I}_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (74)$$

となり， $\gamma > 0$ は任意なので

$$R \leq \underline{I}_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (75)$$

と表せる．いま， $\mathbf{X} \in \mathcal{S}'_\Gamma$ であるから

$$R \leq \sup_{\mathbf{X} \in \mathcal{S}'_\Gamma} \underline{I}_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (76)$$

が成り立ち，漸近的 (ε, Γ) -通信路容量 $C(\varepsilon, \Gamma)$ は

$$C(\varepsilon, \Gamma) \leq \sup_{\mathbf{X} \in \mathcal{S}'_\Gamma} \underline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (77)$$

となる．よって逆定理が示せた．

4.2 順定理

$R < \sup_{\mathbf{X} \in \mathcal{S}'_\Gamma} \underline{I}_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$ なる任意の R を考える． $R = \sup_{\mathbf{X} \in \mathcal{S}'_\Gamma} \underline{I}_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) - 2\gamma$ とすると，ある入力 $\mathbf{X} = \{X\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{S}'_\Gamma$ が存在して $\underline{I}_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) > R + \gamma$ となる．一方， $M_n = e^{nR}$ とおくと， $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq R$ が成立する． $\mathbf{Y} = \{Y^n\}_{n=1}^\infty$ を $\mathbf{X} = \{X^n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{S}'_\Gamma$ の通信路出力とすれば， $\mathcal{S}'_\Gamma$ の定義より， $\forall k \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(X^n) > \Gamma + \frac{1}{k} \right\} = 0 \quad (78)$$

となり，十分大きな全ての n で

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(X^n) > \Gamma + \frac{1}{k} \right\} < \frac{1}{k} \quad (79)$$

となる．このとき n に対して (79) を満たす最大の k が決まる．その k を用いて $\gamma_n \triangleq \frac{1}{k}$ とおくと， $n \rightarrow \infty$ で $\gamma_n \rightarrow 0$ かつ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(X^n) > \Gamma + \gamma_n \right\} = 0 \quad (80)$$

が成り立つ．ここで， $\mathcal{S}_n \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n \mid \frac{1}{n} c_n(\mathbf{x}) \leq \Gamma + \gamma_n\}$ を定義して補題 2 を適用すると，符号語が $\mathcal{S}_n$ に含まれるような

$$\varepsilon_n \leq \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n|X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} \leq R + \gamma \right\} + \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n\} + e^{-n\gamma} \quad (81)$$

を満たす符号が存在する．さらに，上式の両辺の上極限をとると

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n|X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} \leq R + \gamma \right\} + \limsup_{n \rightarrow \infty} \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n\} \quad (82)$$

となり， $\underline{I}_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$ と $\mathcal{S}_n$ の定義より，

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n \leq \varepsilon \quad (83)$$

が成り立つ．また， $\varphi_n(m) \in \mathcal{S}_n$ であるので，

$$\begin{aligned} \Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(U_{M_n})) > \Gamma + \gamma_n \right\} &= \frac{1}{M_n} \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(m)) > \Gamma + \gamma_n \right\} \\ &= 1 - \frac{1}{M_n} \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(m)) \leq \Gamma + \gamma_n \right\} \\ &= 1 - \frac{1}{M_n} \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \Pr \{ \varphi_n(m) \in \mathcal{S}_n \} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (84)$$

となる．

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(U_{M_n})) - \gamma_n > \Gamma \right\} = 0 \quad (85)$$

ここで

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(U_{M_n})) - \gamma_n > \theta \right\} = 0 \quad (86)$$

を満たす任意の実数 θ を考えると, $\Gamma \geq \inf_{n \rightarrow \infty} \theta$ が成り立つため, $p\text{-}\limsup$ の定義より

$$\begin{aligned} \therefore \Gamma &\geq p\text{-}\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(U_{M_n})) - \gamma_n \right\} \\ &= p\text{-}\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(U_{M_n})) \right\} \end{aligned} \quad (87)$$

が成立する. よって R は漸近的に (ε, Γ) -達成可能. すなわち

$$C(\varepsilon, \Gamma) \geq \sup_{\mathbf{X} \in \mathcal{S}'_T} \underline{I}_\varepsilon(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (88)$$

となり, 順定理が示せた. $\square$

5 まとめと今後の課題

一般通信路における漸近的成本制約付き通信路符号化定理及び, ε まで誤りを許容した一般通信路における漸近的成本制約付き通信路符号化定理を証明した. 先行研究の漸近的でないコスト制約付き通信路符号化定理と漸近的成本制約付き通信路符号化定理の式を比べると, 右辺の $\underline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$ の上限をとる範囲が $\mathcal{S}_T$ から $\mathcal{S}'_T$ に拡張されており, 通信路容量の増大が見込める. また現在は本研究をより一般化した, コスト制約を満たす確率が漸的に β 以上となる場合の通信路容量についての研究を進めている.

謝辞

本研究を進めるにあたり, 丁寧な指導と多くの助言をくださった西新幹彦先生に感謝の意を表する.

参考文献

- [1] 韓太舜, 情報理論における情報スペクトル的方法, 培風館, 1998.
- [2] Mikihiko Nishiara, "Channel Coding with Cost Constraint on Delivery," AEW11, R'dam, the Netherlands, pp29-34, June. 2019
- [3] 三宅茂樹, 「電子情報通信学会知識ベース—1 編 情報理論 8 章 通信路符号化」, http://www.ieice-hbkb.org/files/01/01gun_01hen_08.pdf, 2020 年 3 月閲覧