信州大学工学部

学士論文

# 優公平なオッズの競馬に対する最適な戦略に関する考察


指導教員　西新 幹彦 准教授

学科　電気電子工学科
学籍番号　14T2079B
氏名　前山 昂輝


2019 年 2 月 22 日

# 目次

1 はじめに 1

2 競馬の定式化と解析 1

2.1 定式化 . . . . . 1

2.2 解析 . . . . . 3

3 ポートフォリオの定式化と例題 5

3.1 定式化 . . . . . 5

3.2 例題 . . . . . 6

4 まとめ 9

謝辞 9

参考文献 9

# 1　はじめに

競馬とは，騎手が乗った馬の着順を賭け師が予想するギャンブルである．

競馬においてオッズとは着順が的中した場合の払い戻し金の倍率を意味しており，賭け金の一部が胴元に横取りされていることをオッズが劣公平，馬券の売り上げより多く配当金が支払われることをオッズが優公平であるという．本論文では $m$ 頭が出走するレースで 1 着になる馬を賭け師が予想する競馬を考える．そのもとで賭け師のレース後の資金の成長率が最大となる賭け方を最適化問題と捉える．資金を全てかけず，一部の資金を手元に置いておくことが許される場合のレース後の資金の成長率の最大値を考えると，オッズが公平な場合，資金を全額賭けても，一部手元においておいても結果は変わらず，オッズが優公平の場合，資金を手元に置いておくほど資金の成長率の最大値が小さくなることが [1] で述べられているが，具体的な根拠には触れられていない．

本論文では，優公平な場合，資金を手元に置いておくことでどれだけの機会損失が生まれるのか定量的に明らかにする．

また，競馬とポートフォリオは仕組みが似ており，競馬に対する解析手法はポートフォリオを解析する基礎となる．そこで，ポートフォリオの簡単な例題を解き，どのようなものか確かめる．

# 2　競馬の定式化と解析

## 2.1　定式化

本章では文献 [1] に従って競馬を最適化問題として定式化する．賭け師は $m$ 頭が出走する競馬のレースで 1 着になる馬を予想する．賭け師は自分の持っている資金の一部を手元に置いておくかどうかを決め，残りを出走する馬に分配して賭けると仮定する．このとき，$b_0 \geqslant 0$ を手元に置いておく資金，$b_i$ を馬 $i$ に賭ける割合，$o_i$ を馬 $i$ のオッズとする．このように，自分の資金をどの馬に，どれだけ賭けて，どれだけ保持するのかという方針を戦略といい，$b_i \geqslant 0$, $o_i > 0$ および $\sum b_i = 1$ が成立する．このとき，もし馬 $i$ がレースに勝ったならば，賭け師は馬 $i$ に賭けた金額の $o_i$ 倍を受け取り，ほかの馬に賭けた金額は没収される．よって，もし馬 $i$ が勝った場合，賭け師の資金はレース終了後に $b_0 + b_i o_i$ 倍となり，これが起こる確率は $p_i$ であり，レース後の資金額は確率変数となる．また，賭け師の戦略は胴元の決めるオッズに影響しないと仮定する．多数の賭け師が参加する競馬を考え，馬 $i$ に対する馬券の売り上げを $b'_i$ とす

る．もし胴元がすべての売上金を配当金に充てようとするならば，オッズ $o_i$ は

$$b'_i o_i = \sum_{i=1}^{m} b'_i \tag{1}$$

とならなければならない．このとき

$$\frac{1}{o_i} = \frac{b'_i}{\sum_{i=1}^{m} b'_i} \tag{2}$$

より

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{o_i} = 1 \tag{3}$$

が成り立つ．このことから，(3) を満たすオッズを公平であるという。さらに，$\sum \frac{1}{o_i} > 1$，$\sum \frac{1}{o_i} < 1$ となるオッズをそれぞれ劣公平な，優公平であるという．

**定義 1**　$S(i) \triangleq b_0 + b_i o_i$ とおくと，$S(i)$ は馬 $i$ がレースに勝った時のレース前に対するレース後の賭け師の資金の比となる．これは 馬 $i$ がレースに勝ったときに賭け師の資金にかかる倍率である．レースを繰り返し行うことを考えると，賭け師は自分の資金を再投資できるので，資金は各レースに対する成長率の積で与えられる． $k$ 回目のレースで勝った馬を $X_k$ と表し，$n$ 回目のレースが終わった後の賭け師の資金を $S_n$ とおくと

$$S_n \triangleq \prod_{k=1}^{n} S(X_k) \tag{4}$$

が成立する．

**定義 2**　競馬の倍増レートを

$$W(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}) \triangleq \mathbb{E}[\log S(X)] = \sum_{i=1}^{m} p_i \log(b_0 + b_i o_i) \tag{5}$$

と定める．倍増レートと呼ばれる理由は次の理由で正当化される．

**定理 1**　レースの結果 $X_1, X_2, \ldots$ は独立で分布 $p(x)$ に従うとする．このとき賭けの戦略 $\boldsymbol{b}$ を用いる賭け師の倍増レート $W(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p})$ で指数関数的に増大する．すなわち

$$S_n \doteq 2^{nW(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p})} \tag{6}$$

が成立する．(これは $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{2^{nW(\boldsymbol{b},\boldsymbol{p})}}$ が存在することを示す．)

この倍増レート $W(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p})$ を最大化するような賭け師の戦略を最適な戦略という．

本研究では，倍増レートの最大値とそのときの戦略を検討する．

### 2.2　解析

本節では文献 [1] に従い，オッズが公平な場合と優公平な場合の最適な戦略を導出する．オッズが公平な場合と優公平な場合は同じ方法で求めることができる．$\boldsymbol{b}$ を $\sum b_i = 1$ という制約の下で動かして $W(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p})$ を最大化する．ラグランジュの未定乗数法を用いると，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{b}) &\triangleq \mathbb{E}[\log(b_0 + b_i o_i)] + \lambda\left(\sum_{i=0}^{m} b_i - 1\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} p_i \log(b_0 + b_i o_i) + \lambda\left(\sum_{i=0}^{m} b_i - 1\right) \end{aligned} \tag{7}$$

となる．$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{b})$ を $b_i$ で偏微分すると，

$$\frac{\partial J}{\partial b_i} = \frac{p_i o_i}{b_0 + b_i o_i} + \lambda \tag{8}$$

となる．最大値を求めるため偏導関数を 0 とすると，

$$\begin{aligned} p_i o_i &= -\lambda(b_0 + b_i o_i) \\ b_i &= -\frac{p_i}{\lambda} - \frac{b_0}{o_i} \end{aligned} \tag{9}$$

となる．ここで $\sum_i b_i = 1$ より，

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m} b_i &= b_0 - \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{p_i}{\lambda} + \frac{b_0}{o_i}\right) \\ &= b_0 - \frac{1}{\lambda} - b_0 \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{o_i} \\ &= -\frac{1}{\lambda} + b_0\left(1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{o_i}\right) \\ &= 1 \end{aligned} \tag{10}$$

となるが，

$$F \triangleq 1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{o_i} \tag{11}$$

とおけば

$$-\frac{1}{\lambda} = 1 - b_0 F \tag{12}$$

が得られる．これを式 (9) に代入すると，

$$b_i = p_i(1 - b_0 F) - \frac{b_0}{o_i} \tag{13}$$

を得る．これで最適な戦略が得られた．エントロピー $H(\boldsymbol{p})$ を

$$H(\boldsymbol{p}) \triangleq -\sum_{i=1}^{m} p_i \log p_i \tag{14}$$

と定めると，このときの倍増レートは

$$\begin{aligned}
W(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}) &= \sum_{i=1}^{m} p_i \log (b_0 + b_i o_i) && (15)\\
&= \sum_{i=1}^{m} p_i \log (p_i o_i (1 - b_0 F)) && (16)\\
&= \sum_{i=1}^{m} p_i \log o_i + \sum_{i=1}^{m} p_i \log p_i + \sum_{i=1}^{m} p_i \log (1 - b_0 F) && (17)\\
&= \sum_{i=1}^{m} p_i \log o_i - H(\boldsymbol{p}) + \log (1 - b_0 F) && (18)
\end{aligned}$$

となる．オッズが公平の場合 $F = 0$ なので，式 (18) の第 3 項が 0 になるため資金を一部保持しても全額賭けても倍増レートの最大値は変わらないことがわかる．しかしながら，ある一定以上の金額を手元に置いておくと倍増レートが最大でなくなる場合がある．倍増レートの最大化が成立する $b_0$ の範囲は，$b_i \geqslant 0$ を (13) に適用して

$$\begin{aligned}
p_i(1 - b_0 F) - \frac{b_0}{o_i} &\geqslant 0 && (19)\\
p_i b_0 F + \frac{b_0}{o_i} &\leqslant p_i && (20)\\
b_0 &\leqslant \frac{p_i}{p_i F + \frac{1}{o_i}} && (21)\\
&= \frac{1}{F + \frac{1}{p_i o_i}} && (22)
\end{aligned}$$

となる．よって，

$$b_0 \leqslant \min_i \frac{1}{F + \frac{1}{p_i o_i}} \tag{23}$$

である．

また，$F$ が正の場合，式 (17) の第 3 項が負の値をとるため，手元に置いておく資金が大きいほど倍増レートが減少してしまう．よって，優公平なオッズの場合，資金は全額使ったほうが良いことが分かる．

# 3　ポートフォリオの定式化と例題

ポートフォリオとは個人や企業が所有する金融資産の組み合わせのことである．ここでは株式市場における投資を考えており，異なるリスクとリターンを持つように資産を分散することで，投資のリスクを低減することができる．前章の競馬は，ポートフォリオの特殊な例であり，その解析手法は株式投資を解析する基礎となることが [1] で触れられている．

## 3.1　定式化

前章と同じく，株式投資を最適化問題として定式化する．

投資家は株式に自分の資金を分配して投資し，資金の成長率を最大化することを望む．株式の数を $m$ としたとき，それぞれの株式に対する相対価格 $X_i$ の集合を株式ベクトルといい，株式市場は株式ベクトル $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$, で表される．相対価格は 1 日の初めの株価に対するその日の終わりの株価の割合を指す．また，それぞれの株式に投資された資金の割合を表すベクトルをポートフォリオ $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ といい，これは株式に対する資金の割り当てを表す．もし投資家がポートフォリオ $\boldsymbol{b}$ を用い，このとき株式ベクトル $\boldsymbol{X}$ であるならば，このとき，1 日のはじめに対する終わりの資金の割合は，

$$S = \boldsymbol{b}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{m} b_i X_i \tag{24}$$

である．これを相対的資金といい，ここで $X_i \geqslant 0$，$b_i \geqslant 0$ および $\sum b_i = 1$ が成立する．

株式市場においては通常，第 $n$ 日目が終わった時の資金が，市場での日々の因子の積となるように，毎日再投資を行う．その積の挙動は期待値ではなく対数の期待値によって決定される．そのため，成長率は次のように定義する．

**定義 3**　ポートフォリオ $\boldsymbol{b}$ の株式ベクトルに関する同時分布 $F(\boldsymbol{x})$ に関する成長率は，

$$W(\boldsymbol{b}, F) = \int \log \boldsymbol{b}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\, dF(x) = \mathbb{E}[\log \boldsymbol{b}X^{\mathrm{T}}] \tag{25}$$

で定義される．ここで $X^{\mathrm{T}}$ は $X$ の転置ベクトルを表す。もし対数の底が 2 ならば，成長率は倍増レートと呼ばれる．

**定義 4**　最適成長率 $W^*(F)$ は

$$W^*(F) = \max_{\boldsymbol{b}} W(\boldsymbol{b}, F) \tag{26}$$

で定義される．ここで最大化は可能なすべてのポートフォリオ $\boldsymbol{b_i} \geq 0, \sum_i b_i = 1$ に対してとる．

**定義 5**　$W(\boldsymbol{b}, F)$ の最大値を達成するポートフォリオ $\boldsymbol{b}^*$ を対数最適ポートフォリオと呼ぶ．

成長率の定義は次の定理で正当化される．

**定理 2**　株式ベクトル $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$ は独立同分布で $F(\boldsymbol{x})$ に従うものとし，

$$(S^*)^{(k)} = \boldsymbol{b}^*(\boldsymbol{X}^{(k)})^{\mathrm{T}} \tag{27}$$

を，対数最適ポートフォリオ $\boldsymbol{b}^*$ を用いたときの $k$ 日目の資金とする．ここで，$X^{(k)}$ は $k$ 日目の株式ベクトルを表す．このとき $n$ 日後の資金は，

$$S_n^* = \prod_{k=1}^{n} (S^*)^{(k)} = \prod_{k=1}^{n} \boldsymbol{b}^*(\boldsymbol{X}^{(k)})^{\mathrm{T}} \tag{28}$$

であり，

$$\frac{1}{n} \log S_n^* \doteq W^* \tag{29}$$

が成り立つ．

## 3.2　例題

株式投資の簡単な例を見るために，ある企業の新規公開株の株価が 1 日おきに $a$ 倍，もしくは $\frac{1}{a}$ 倍のどちらかになる状況を想定する．そうなる確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ であるとする．このとき，投資家は持っている資金の一部を手元に置いておくかどうかを決め，残りをすべて資金全てを投資すると仮定する．このとき，$b_1$ を手元に置いておく資金の割合，$b_2$ を投資する資金の割合とおく．もし株価が $a$ 倍になれば，1 日後の資金は $b_1 + ab_2$ になり，$\frac{1}{a}$ 倍になれば $b_1 + \frac{a}{b_2}$ となる．毎日再投資することを考えると，投資家の資金は上記の定義に基づき倍増レートに従い成長する．よって，倍増レートが最大になるような投資方法とそのとき成長率である最適成長率を検討する．$\boldsymbol{b}$ を $\sum b_i = 1$ という制約の下で動かして $W(\boldsymbol{b}, F)$ を最大化する．ラグランジュの未定乗数法を用いると，

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{b}) = \mathbb{E}[\log \boldsymbol{b} X^{\mathrm{T}}] + \lambda \left( \sum_{i=1,2} b_i - 1 \right) \tag{30}$$

$$= \frac{1}{2} \left( \log (b_1 + ab_2) + \log \left( b_1 + \frac{b_2}{a} \right) \right) + \lambda \left( \sum_{i=1,2} b_i - 1 \right) \tag{31}$$

となる．$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{b})$ を $b_1, b_2$ で偏微分すると，

$$\frac{\partial J}{\partial b_1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{b_1 + ab_2} + \frac{1}{b_1 + \frac{b_2}{a}} \right) + \lambda \tag{32}$$

$$\frac{\partial J}{\partial b_2} = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{b_1 + ab_2} + \frac{\frac{1}{a}}{b_1 + \frac{b_2}{a}} \right) + \lambda \tag{33}$$

となる．最大値を求めるために偏導関数を 0 とすると，式 (31)，(32) より

$$2(\frac{\partial J}{\partial b_1} - \frac{\partial J}{\partial b_2}) = \frac{1-a}{b_1 + ab_2} + \frac{1 - \frac{1}{a}}{b_1 + \frac{b_2}{a}} \tag{34}$$
$$= 0 \tag{35}$$

となる．ここで，

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda} = b_1 + b_2 \tag{36}$$

より，

$$\frac{1-a}{1 - b_2 + ab_2} = -\frac{1 - \frac{1}{a}}{1 - b_2 + \frac{b_2}{a}} \tag{37}$$
$$\frac{1-a}{1 - b_2 + (1-a)} = -\frac{1 - \frac{1}{a}}{1 - b_2 + (1 - \frac{1}{a})} \tag{38}$$
$$(1-a)\left(1 - b_2(1 - \frac{1}{a})\right) = -\left(1 - \frac{1}{a}\right)(1 - b_2(1-a)) \tag{39}$$
$$2b_2(1-a)(1 - \frac{1}{a}) = (1-a) + (1 - \frac{1}{a}) \tag{40}$$
$$b_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{(1-a) + (1 - \frac{1}{a})}{(1-a)(a - \frac{1}{a})}\right) \tag{41}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1 - \frac{1}{a}}\right) \tag{42}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-a} + \frac{a}{a-1}\right) \tag{43}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a-1} - \frac{1}{a-1}\right) \tag{44}$$
$$= \frac{1}{2} \tag{45}$$

となる．よって，

$$b_1 = b_2 = \frac{1}{2} \tag{46}$$

であり，以上より対数最適ポートフォリオは $\boldsymbol{b}^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ とわかった．

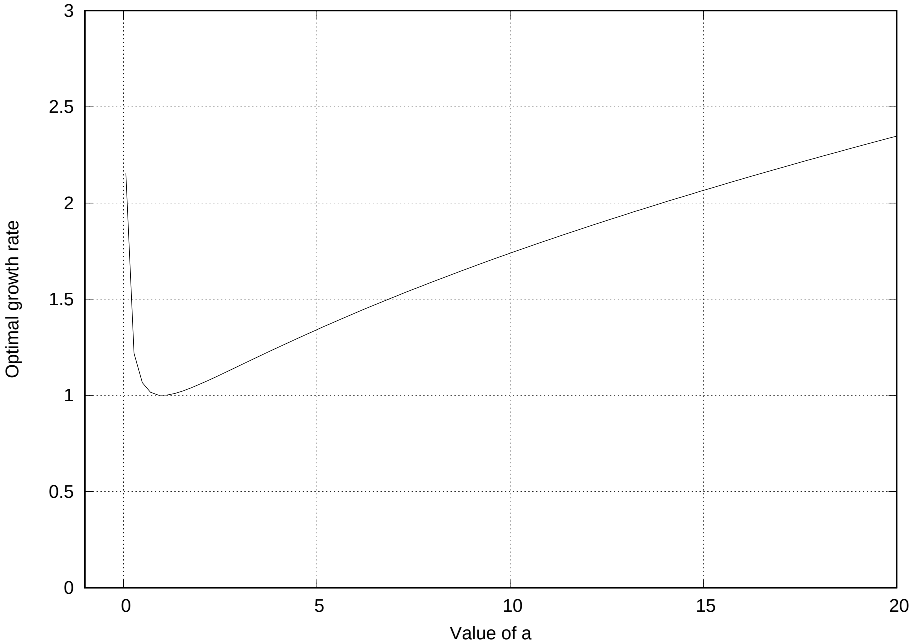


図 1　最適成長率と任意の値 $a$ の関係

また，最適成長率は，

$$
\begin{aligned}
W^* &= \mathbb{E}[\log \boldsymbol{b}X^{\mathrm{T}}] && (47)\\
&= \frac{1}{2}\log(b_1 \quad b_2)\begin{pmatrix}1\\ a\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\log\begin{pmatrix}b_1 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{a}\end{pmatrix} && (48)\\
&= \frac{1}{2}\log\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ a\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\log\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{a}\end{pmatrix} && (49)\\
&= \frac{1}{2}\left(\log\left(\frac{(a+1)^2}{4a}\right)\right) && (50)
\end{aligned}
$$

となる．この最適成長率と任意の値 $a$ の関係のグラフを図 1 に示す．ここから，

$$W^* \geqslant 1 \tag{51}$$

であることがわかる．

## 4　まとめ

本研究では，$m$ 頭が出走する競馬のレースで 1 着になる馬を予想する際に，レースのオッズが優公平な場合，資金を手元に置いておくほど資金の成長率の最大値が小さくなることの具体的な根拠について示した．また，ポートフォリオについて単純な株式投資の例を解いて，直感的に考えるとどのように投資しても資金は同じ成長率になると予想されるものが，実際には最適な投資方法があるということがわかった．

## 謝辞

本研究を行うにあたり，細かく指導してくださった指導教員の西新幹彦准教授に感謝の意を表する．

## 参考文献

[1] T. Cover, J. Thomas, Elements of Information Theory 2nd ed., Wiley, 2006.

[2] 中川 勇斗，「劣公平なオッズの競馬に対する戦略の最適性の証明」，信州大学工学部卒業 (指導教員：西新幹彦) 論文,2016 年 3 月

[3] 田畑吉雄，リスク測度とポートフォリオ管理，朝倉書店，2004 年

[4] ポートフォリオとは｜金融経済用語集, `https://www.ifinance.ne.jp/glossary/investment/inv005.html`,2019 年 1 月閲覧