信州大学工学部

学士論文

レート・遅延理論に関する基礎的検討

指導教員　西新 幹彦 准教授

学科　電気電子工学科
学籍番号　15T2021D
氏名　大橋 輝路

2019 年 2 月 17 日

目次

1　はじめに

近年の自然災害の増加などから，早く情報を伝えることがより必要になっており，低遅延通信の重要性が高まってきている．また，コストなどの問題から符号化レートも小さくしたい．そこで両者の関係を調べることが必要になる．

一方，レート・歪み理論 [1] という理論がある．例えば，実際の風景を写真としてデジタルデータに変換しようとするとき，色の違いなど連続的な値を完璧にデータに変換することは不可能である．そこで，人間に識別できない色の差を切り捨て離散的な色を用いることでデータに変換している．このとき，切り捨てられた部分を実際の風景とデータの歪みという．歪みを大きくする，すなわち，区別する色を減らすとそれぞれの色に割り当てられる符号語の数も減る．符号語の数が減れば符号化レートも下がる．このような歪みと符号化レートの関係を定式化したものがレート・歪み理論である．

ここで，4 つの情報源シンボル $\{a,b,c,d\}$ にそれぞれ符号語 $\{00,01,10,11\}$ が割り当てられてるとする．a と b,c と d を区別しないというように歪みを許せば，2 つの情報源シンボル $\{a(=b),c(=d)\}$ にそれぞれ符号語 $\{0,1\}$ を割り当てることができる．また，4 つの情報源シンボル $\{a,b,c,d\}$ を送信する際に，符号語 $\{00,01,10,11\}$ の 1 ビットが送信されないとすれば受信側は符号語 $\{0,1\}$ を受け取り a または b,c または d という情報を受け取る．1 ビット送信されないことを 1 ビット遅延していると見なせば，歪みと遅延はともに許すことで符号語数が減少していることになる．このような遅延と歪みの類似性からレート・歪み理論を用いて符号化レートと遅延の関係について研究を行う．

本論文では，遅延がある通信路において同時刻の入力と出力の関係を考えると出力が入力の語頭になっていることから出力が入力の語頭になっている特殊な通信路モデルについて考える．遅延を入力と出力の符号語長の差と定義することで，レート歪み理論と同様の手法を用いて，与えられた遅延基準の範囲内で符号化レートをどこまで小さくできるかを検討する．

2　符号化における遅延

本論文では一般情報源 [1] を考える．情報源アルファベットを $\mathcal{X}$ とする．一般情報源 $\boldsymbol{X}$ は $\mathcal{X}^n$ 上の任意の確率分布 P_{X^n} をもつ確率変数 X^n の列 $\{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ として定義される．一般に，各 n に対して X^n は個別の確率空間で定義される．

　レート・歪み理論では情報源系列と復元系列の長さは等しかったが，本研究では，遅延がある通信路を考えるために復元系列の長さが情報源系列の長さ以下なるようなモデルを作る．そこで，復元系列を可変長とし情報源アルファベットを $\mathcal{X}^n$，復元アルファベットを $\mathcal{X}^*$ とする．符号 (φ_n,ψ_n) とは，ある自然数 M_n に対して $\varphi_n:\mathcal{X}^n\to\{1,\cdots,M_n\},\psi:\{1,\cdots,M_n\}\to$

$\mathcal{X}^*$ かつ任意の $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n$ に対して $\psi_n(\varphi_n(\boldsymbol{x}))$ が $\boldsymbol{x}$ の語頭になっているものをいう．φ_n を符号器，ψ_n を復号器という．$\varphi_n(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{x}$ の符号語といい，$\psi_n(m), m = 1, \cdots, M_n$ を復号語という．M_n は符号語数を表す．ここで，符号語 $\boldsymbol{a}$ の長さを $\|\boldsymbol{a}\|$ と表すとして，$\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n$ に対する $\boldsymbol{y} \in \mathcal{X}^*$ の遅延を

$$d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \triangleq \begin{cases} \|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\| & \boldsymbol{y} \text{ が } \boldsymbol{x} \text{ の語頭のとき} \\ \infty \text{ もしくは } n & \text{その他のとき} \end{cases} \tag{1}$$

と定義する.

3 入力長ごとに個別の符号を用いたときのレート · 遅延関数

本章では，本研究の結果であるレートと遅延の関係に関する定理を示す．まず，定理の証明に必要な定義を示す.

定義 1 実数値をとる任意の確率変数列 $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し，

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty} Z_n \triangleq \inf\left\{\alpha \mid \lim_{n\to\infty} \Pr\{Z_n > \alpha\} = 0\right\} \tag{2}$$

と定め，確率的上極限という.

定義 2 独立な符号列によってレート R が遅延 D で達成可能とは，

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty} d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) \leqslant D \tag{3}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M_n \leqslant R \tag{4}$$

となるような符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在することである.

定義 3 遅延 D に対して

$$R_1(D) \triangleq \inf\{R \mid \text{独立な符号列によってレート } R \text{ が遅延 } D \text{ で達成可能}\} \tag{5}$$

と定義し，$R_1(D)$ をレート・遅延関数と呼ぶ.

定義 4 互いに相関のある情報源 $\boldsymbol{X}$ と確率変数列 $\boldsymbol{Y} = \{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$\overline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) \triangleq \text{p-}\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{P_{Y_n|X^n}(Y_n \mid X^n)}{P_{Y_n}(Y_n)} \tag{6}$$

とし $\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ の間の相互情報量スペクトル上限と呼ぶ [1].

定義 5　任意の $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ を考える．$\boldsymbol{Y} = \{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$，$Y_n \in \mathcal{X}^*$が成り立ち，$X^n$と Y_nは相関があるものとする．これらに対し，

$$\overline{D}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \triangleq \text{p-}\limsup_{n\to\infty} d_n(X^n, Y_n) \tag{7}$$

と定義する．

これらの定義より，以下の定理が成り立つ．

定理 1

$$R_1(D) = \inf_{\boldsymbol{Y}:\overline{D}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\leqslant D} \overline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) \tag{8}$$

右辺の inf は，条件$\overline{D}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) \leqslant D$ を満たす確率変数 $\boldsymbol{Y}$ に関する下限である．

ここで，定理の証明に用いる補題を示す．

補題 1　任意の一般情報源 $\boldsymbol{X} = \{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し，それと相関のある $\boldsymbol{Y} = \{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える．R，γ を任意に与えられた正の定数とし，各 $\boldsymbol{y} \in \mathcal{X}^*$ に対して $\mathcal{S}_n(\boldsymbol{y})$ を $\mathcal{X}^n$ の任意の部分集合とする．このとき

$$\hat{W^n}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) \triangleq \Pr\{X^n = \boldsymbol{x}|Y_n = \boldsymbol{y}\} \tag{9}$$

$$\mathcal{B}_n(\boldsymbol{y}) \triangleq \left\{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n \;\middle|\; \frac{1}{n}\log\frac{\hat{W^n}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})}{P_{X^n}(\boldsymbol{x})} \leqslant R - \gamma\right\} \tag{10}$$

とおくと，

$$\frac{1}{n}\log(M_n - 1) \leqslant R \tag{11}$$

$$\Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n(\psi_n(\varphi_n(X^n)))\} \leqslant \Pr\{X^n \notin \mathcal{B}_n(Y_n)\} + \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n(Y_n)\} + e^{-n\gamma} \tag{12}$$

を満たす符号 (φ_n, ψ_n) が存在する．ただし，M_n は符号語数である．この補題は [2] をわずかに変更したものになっている．証明は付録 A で示す．

補題 2　情報源 $\boldsymbol{X} = \{X^n\}_{n=1}^{\infty}$が正数 M_nに対して

$$|\{x \in \mathcal{X}^n \mid P_{X^n}(x) > 0\}| \leqslant M_n \tag{13}$$

を満たせば，任意の定数 $\gamma > 0$ に対して，

$$\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \geqslant \frac{1}{n}\log M_n + \gamma\right\} \leqslant e^{-n\gamma} \tag{14}$$

が成立する．証明は [1] による．

定理 1 の証明を以下のように行う．

証明　順定理と逆定理に分けて証明される．
順定理では

$$R_1(D) \leqslant \inf_{\boldsymbol{Y}:\overline{D}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\leqslant D} \overline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) \tag{15}$$

を，逆定理では

$$R_1(D) \geqslant \inf_{\boldsymbol{Y}:\overline{D}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\leqslant D} \overline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) \tag{16}$$

を証明する．
1) 順定理
ここでは補題 1 を用いて証明する．また，別証明としてランダム符号化を用いた証明を付録 B に示す．
まず，

$$R_0 \triangleq \inf_{\boldsymbol{Y}:\overline{D}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\leqslant D} \overline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) \tag{17}$$

とおく．$R > R_0$ なる任意の R を考える．するとある $\gamma > 0$ に対して

$$\overline{D}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) \leqslant D \tag{18}$$

$$R - \gamma > \overline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) \tag{19}$$

を満たす $\boldsymbol{Y}$ が存在する．すると (18) より任意の自然数 k に対して

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left\{ d_n(X^n, Y_n) > D + \frac{1}{k} \right\} = 0 \tag{20}$$

が成り立つ．したがって十分大きなすべての n で

$$\Pr\left\{ d_n(X^n, Y_n) > D + \frac{1}{k} \right\} < \frac{1}{k} \tag{21}$$

となる．このことから，各 n に対して (21) を満たす最小の k が存在する．そこで，$\gamma_n = \frac{1}{k}$ とおくと $\gamma_n \to 0$ かつ

$$\Pr\left\{ d_n(X^n, Y_n) > D + \gamma_n \right\} < \gamma_n \tag{22}$$

が成り立つ (対角線論法)．
ここで

$$\mathcal{S}_n(\boldsymbol{y}) \triangleq \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n \;\middle|\; d_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leqslant D + \gamma_n \right\} \tag{23}$$

とおいて補題 1 を用いると

$$\frac{1}{n}\log(M_n-1)\leqslant R \tag{24}$$

$$\begin{aligned}&\Pr\left\{d_n(X^n,\psi_n(\varphi_n(X^n)))>D+\gamma_n\right\}\\&\leqslant \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{\hat{W}_n(X^n|Y_n)}{P_{X^n}(X^n)}>R-\gamma\right\}+\Pr\left\{d_n(X^n,Y_n)>D+\gamma_n\right\}+e^{-n\gamma}\end{aligned} \tag{25}$$

を満たす符号 (φ_n,ψ_n) が存在する．ただし M_n はこの符号の符号語数である．すると (24) より

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log M_n &= \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left((M_n-1)\frac{M_n}{M_n-1}\right)\\&=\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\log(M_n-1)+\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{M_n-1}\right)\right)\\&=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(M_n-1)\\&\leqslant R\end{aligned} \tag{26}$$

となる．また，(55) の右辺の第 1 項は (19) より

$$\lim_{n\to\infty}\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{\hat{W}_n(X^n|Y_n)}{P_{X^n}(X^n)}>R-\gamma\right\}=0 \tag{27}$$

となり，第 2 項は (52) より

$$\lim_{n\to\infty}\Pr\left\{d_n(X^n,Y_n)>D+\gamma_n\right\}\leqslant\lim_{n\to\infty}\gamma_n=0 \tag{28}$$

となる．したがって (55) より

$$\lim_{n\to\infty}\Pr\left\{d_n(X^n,\psi_n(\varphi_n(X^n)))>D+\gamma_n\right\}=0 \tag{29}$$

であるが，これは

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty}(d_n(X^n,\psi_n(\varphi_n(X^n)))-\gamma_n)=\text{p-}\limsup_{n\to\infty}d_n(X^n,\psi_n(\varphi_n(X^n)))\leqslant D \tag{30}$$

を意味する．したがって R は D で達成可能である．ここで R が $R>R_0$ なる任意の数だったことに注意すれば，R_0 より大きい R が D で達成可能であることが分かる．したがって

$$R_1(D)\leqslant R_0 \tag{31}$$

が成り立つ．これで (15) が示された．

2) 逆定理

ここでは，補題 2 を用いて証明する．

レート R が遅延 D で達成可能と仮定すると，

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty} d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) \leqslant D \tag{32}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log M_n \leqslant R \tag{33}$$

を満たす符号 (φ_n, ψ_n) が存在することになる．$Y_n = \psi_n(\varphi_n(X^n))$ とおいて $\boldsymbol{Y} = \{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ とすると，(32) より

$$\overline{D}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \leqslant D \tag{34}$$

と書ける．次に

$$\overline{I}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}) \leqslant R \tag{35}$$

を示す．ここで，任意の $\gamma > 0$ を用いると $|\psi_n(\varphi_n(\mathcal{X}^n))| \leqslant M_n$であることから 補題 2 より

$$\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{Y_n}(Y_n)} \geqslant \frac{1}{n}\log M_n + \gamma\right\} \leqslant e^{-n\gamma} \tag{36}$$

が成り立つ．また，

$$\frac{1}{n}\log\frac{P_{Y_n|X^n}(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x})}{P_{Y_n}(\boldsymbol{y})} \leqslant \frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{Y_n}(\boldsymbol{y})}$$

であるから，(36) より

$$\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{P_{Y_n|X^n}(Y_n \mid X^n)}{P_{Y_n}(Y_n)} \geqslant \frac{1}{n}\log M_n + \gamma\right\} \leqslant e^{-n\gamma} \tag{37}$$

となる．ところが，

$$\frac{1}{n}\log M_n \leqslant \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log M_n + \gamma \quad (\forall n \geqslant n_0)$$

であるので，(33) より

$$\begin{aligned}\text{p-}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{P_{Y_n|X^n}(Y_n \mid X^n)}{P_{Y_n}(Y_n)} &\leqslant \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log M_n + 2\gamma \\ &\leqslant R + 2\gamma \end{aligned} \tag{38}$$

が成り立つ．よって，

$$\overline{I}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}) \leqslant R + 2\gamma \tag{39}$$

となる．$\gamma > 0$ は任意であったので,$\overline{I}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}) \leqslant R$ が示される．よって，(34) より

$$R(D) \geqslant \inf_{\boldsymbol{Y}:\overline{D}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\leqslant D} \overline{I}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}) \tag{40}$$

が結論される．よって (16) が示された． □

4　復号語の整合性を考慮したレート · 遅延関数

前章では，出力が入力の語頭になっている符号を考えた．この符号を用い通信を行い，入力の情報源系列の長さが n，出力された復元系列の長さが m だとする．ここで，入力の符号語を 1 文字追加し符号語長が $n+1$ となったとき，出力は入力の語頭になればよいので出力の符号語長が m より小さくなる可能性がある．情報源系列の長さが長くなったのにも関わらず，復元系列の長さが短くなることは，実際の通信では起こらない．そこで，情報源系列の長さが長くなった際に復元系列の長さがそのままもしくは長くなるような符号を考える．ここで，符号の拡大を定義する．

定義 6　(φ_n, ψ_n) が $(\varphi_{n-1}, \psi_{n-1})$ の拡大であるとは，長さ n の系列 $x^n = x_1 x_2 \cdots x_n$ に対して $\psi_{n-1}(\varphi_{n-1}(x^{n-1}))$ が $\psi_n(\varphi_n(x^n))$ の語頭になることである．

また，，任意の 2 以上の自然数 k に対し (φ_k, ψ_k) が $(\varphi_{k-1}, \psi_{k-1})$ の拡大となる符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ を整合的な符号の列と呼ぶ．さらに，以下を定義する．

定義 7　整合的な符号列によってレート R が遅延 D で達成可能とは，

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty} d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) \leqslant D \tag{41}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M_n \leqslant R \tag{42}$$

となる整合的な符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在することである．

定義 8　遅延 D に対して

$$R_2(D) \triangleq \inf\{R \mid \text{整合的な符号列によってレート } R \text{ が遅延 } D \text{ で達成可能 }\} \tag{43}$$

とし，$R_2(D)$ をレート・遅延関数と呼ぶ．

これらの定義より以下の定理が成り立つ．

定理 2

$$R_2(D) = \inf_{\boldsymbol{Y}:\overline{D}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\leqslant D} \overline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) \tag{44}$$

右辺の inf は，条件$\overline{D}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) \leqslant D$ を満たす確率変数 $\boldsymbol{Y}$ に関する下限である．

定理 2 では符号の整合性を考慮しているため，定理 1 より達成可能の条件が厳しくなっているにも関わらずレート・遅延関数は同じ式になっている．定理 2 の証明を以下のように行う．

証明　順定理と逆定理に分けて証明される．
順定理では

$$R_2(D) \leqslant \inf_{\boldsymbol{Y}:\overline{D}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\leqslant D} \overline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) \tag{45}$$

を，逆定理では

$$R_2(D) \geqslant \inf_{\boldsymbol{Y}:\overline{D}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\leqslant D} \overline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) \tag{46}$$

を証明する．

1) 順定理

ここでは補題 1 を用いて証明する．また，別証明としてランダム符号化を用いた証明を付録 C に示す．

まず，

$$R_0 \triangleq \inf_{\boldsymbol{Y}:\overline{D}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\leqslant D} \overline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) \tag{47}$$

とおく．$R > R_0$ なる任意の R を考える．するとある $\gamma > 0$ に対して

$$\overline{D}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) \leqslant D \tag{48}$$

$$R - \gamma > \overline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) \tag{49}$$

を満たす $\boldsymbol{Y}$ が存在する．すると (48) より任意の自然数 k に対して

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left\{d_n(X^n, Y_n) > D + \frac{1}{k}\right\} = 0 \tag{50}$$

が成り立つ．したがって十分大きなすべての n で

$$\Pr\left\{d_n(X^n, Y_n) > D + \frac{1}{k}\right\} < \frac{1}{k} \tag{51}$$

となる．このことから，各 n に対して (51) を満たす最小の k が存在する．そこで，$\gamma_n = \frac{1}{k}$ とおくと $\gamma_n \to 0$ かつ

$$\Pr\left\{d_n(X^n, Y_n) > D + \gamma_n\right\} < \gamma_n \tag{52}$$

が成り立つ (対角線論法)．

ここで

$$\mathcal{S}_n(\boldsymbol{y}) \triangleq \left\{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n \;\middle|\; d_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leqslant D + \gamma_n\right\} \tag{53}$$

とおいて補題 1 を用いると

$$\frac{1}{n}\log(M'_n - 1) \leqslant R \tag{54}$$

$$\begin{aligned}
&\Pr\left\{d_n(X^n, \psi'_n(\varphi'_n(X^n))) > D + \gamma_n\right\} \\
&\leqslant \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{\hat{W}_n(X^n|Y_n)}{P_{X^n}(X^n)} > R - \gamma\right\} + \Pr\left\{d_n(X^n, Y_n) > D + \gamma_n\right\} + e^{-n\gamma}
\end{aligned} \tag{55}$$

を満たす符号 (φ'_n, ψ'_n) が存在する．ただし M'_n はこの符号の符号語数である．すると (54) より

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log M'_n &= \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left((M'_n - 1)\frac{M'_n}{M'_n - 1}\right) \\
&= \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\log(M'_n - 1) + \frac{1}{n}\log\left(1 + \frac{1}{M'_n - 1}\right)\right) \\
&= \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(M'_n - 1) \\
&\leqslant R
\end{aligned} \tag{56}$$

が成り立つ．ここで，符号 (φ_n, ψ_n) を用意し，この符号の符号語数を M_n とする．また，符号 (φ'_k, ψ'_k) において $k = 1, 2, \ldots, n$ として復号語を作り、その全てを (φ_n, ψ_n) の復号語とすれば，この符号は整合的である．よって $M_n = \sum_{k=1}^{n} M'_k$ とすれば (56)，$\frac{1}{x}\log x \to 0 (x \to \infty)$ より

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log M_n &= \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\sum_{k=1}^{n} M'_k \\
&\leqslant \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(nM'_n) \\
&= \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\log M'_n + \frac{1}{n}\log n\right) \\
&= \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log M'_n \\
&\leqslant R
\end{aligned} \tag{57}$$

となる．また，以上のように (φ_n, ψ_n) を作ったとすると

$$d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) \leqslant d_n(X^n, \psi'_n(\varphi'_n(X^n))) \tag{58}$$

となるので，

$$\begin{aligned}
&\Pr\left\{d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) > D + \gamma_n\right\} \leqslant \Pr\left\{d_n(X^n, \psi'_n(\varphi'_n(X^n))) > D + \gamma_n\right\} \\
&\leqslant \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{\hat{W}_n(X^n|Y_n)}{P_{X^n}(X^n)} > R - \gamma\right\} + \Pr\left\{d_n(X^n, Y_n) > D + \gamma_n\right\} + e^{-n\gamma}
\end{aligned} \tag{59}$$

が成り立つ．(59) の右辺の第 1 項は (49) より

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{\hat{W}_n(X^n|Y_n)}{P_{X^n}(X^n)} > R-\gamma\right\} = 0 \tag{60}$$

となり，第 2 項は (52) より

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\{d_n(X^n,Y_n) > D+\gamma_n\} \leqslant \lim_{n\to\infty}\gamma_n = 0 \tag{61}$$

となる．したがって (59) より

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\{d_n(X^n,\psi_n(\varphi_n(X^n))) > D+\gamma_n\} = 0 \tag{62}$$

であるが，これは

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty}(d_n(X^n,\psi_n(\varphi_n(X^n))) - \gamma_n) = \text{p-}\limsup_{n\to\infty} d_n(X^n,\psi_n(\varphi_n(X^n))) \leqslant D \tag{63}$$

を意味する．したがって R は D で達成可能である．ここで R が $R > R_0$ なる任意の数だったことに注意すれば，R_0 より大きい R が D で達成可能であることが分かる．したがって

$$R_2(D) \leqslant R_0 \tag{64}$$

が成り立つ．これで (45) が示された．

2) 逆定理

レート R が遅延 D で達成可能である整合的な符号 (φ_n,ψ_n) が存在すると仮定すれば，定理 1 の逆定理の証明と同様にして

$$R_2(D) \geqslant \inf_{\boldsymbol{Y}:\overline{D}(\boldsymbol{X},\,\boldsymbol{Y})\leqslant D} \overline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) \tag{65}$$

が結論される．よって (46) が示された． □

5　まとめ

本研究では，出力が入力の語頭となるような通信システムを考えることによって，符号化レートと遅延の関係をレート・歪み理論を用いて定式化することができた．また，入力と出力の整合性を考慮した符合化レートと遅延の関係についても同様に定式化することができた。しかし，本研究では符号器から復号器へ送られる符号語の整合性については考慮されていない．今後は，符号語についても考慮した定式化を行いたい．

謝辞

本研究を行うにあたり，丁寧なご指導を賜りました指導教員の西新幹彦准教授に感謝の意を表する。

参考文献

[1] 韓太舜，情報理論における情報スペクトル的方法，培風館，1998.

[2] 伊藤佑樹，西新幹彦,「ランダム符号化を用いない一般情報源に対するレート・歪み理論の順定理」，第 41 回情報理論とその応用シンポジウム（SITA2018），予稿集，pp.137–142, Dec. 2018.

[3] 西新幹彦,「逐次符号による情報源の変換と符号化」，第 23 回情報理論とその応用シンポジウム（SITA2000），予稿集，pp.339–342, Oct. 2000.

[4] 西新幹彦,「最大復号レートを達成する逐次符号化順定理」，第 33 回情報理論とその応用シンポジウム（SITA2010），予稿集，pp.345–348, Dec. 2010.

付録 A　補題 1 の証明

この補題は [2] と同様にして証明される．

証明　$\mathcal{T}_n(\boldsymbol{y}) \triangleq \mathcal{B}_n(\boldsymbol{y}) \cap \mathcal{S}_n(\boldsymbol{y})$ とおく．復号語を以下のように順次選んでいく．1 番目の復号語 $\psi(1)$ として

$$\hat{W}^n(\mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})|\boldsymbol{y}) \geqslant e^{-n\gamma} \tag{66}$$

を満たす $\boldsymbol{y} \in \mathcal{X}^*$ を選び，$\varphi_n^{-1}(1) \triangleq \mathcal{T}_n(\psi_n(1))$ とおく．以降，m 番目の復号語 $\psi(m)$ として

$$\hat{W}^n(\mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})\backslash \bigcup_{m'<m} \varphi_n^{-1}(m')|\boldsymbol{y}) \geqslant e^{-n\gamma} \tag{67}$$

となる $\boldsymbol{y} \in \mathcal{X}^*$ を選び，

$$\varphi_n^{-1}(m) \triangleq \mathcal{T}_n(\psi_n(m))\backslash \bigcup_{m'<m} \varphi_n^{-1}(m') \tag{68}$$

とする．復号語を M_n' 個選んでそれ以上復号語が選べなくなったとする．ここで $\psi_n^{-1}(m), m = 1, \cdots, m = M_n'$ が互いに素であることに注意し

$$\mathcal{D} \triangleq \bigcup_m \varphi_n^{-1}(m) \tag{69}$$

とおく．すると M_n' の定義より任意の $\boldsymbol{y} \in \mathcal{X}^*$ に対して

$$\hat{W}^n(\mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})\backslash\mathcal{D}|\boldsymbol{y}) < e^{-n\gamma} \tag{70}$$

が成り立つ．ここで復号語として空列を追加し，$\boldsymbol{x} \notin \mathcal{D}$ なる $\boldsymbol{x}$ が符号器に入力されたとき復号器は空列を出力するようにする．したがって符号語数は $M_n' + 1$ となる．

以上のように定義された符号 (φ_n, ψ_n) の性能を評価する．まず符号化レートを調べる．いま，

$$\varphi_n^{-1}(m) \subset \mathcal{T}_n(\psi_n(m)) \subset \mathcal{B}(\psi_n(m)) \tag{71}$$

であることから，$\boldsymbol{x} \in \varphi_n^{-1}(m)$ ならば

$$\frac{1}{n} \log \frac{\hat{W}^n(\boldsymbol{x}|\psi_n(m))}{P_{X^n}(\boldsymbol{x})} \leqslant R_n - \gamma \tag{72}$$

が得られる．すなわち，$\boldsymbol{x} \in \varphi_n^{-1}(m)$ ならば

$$P_{X^n}(\boldsymbol{x}) \geqslant \hat{W}^n(\boldsymbol{x}|\psi_n(m))e^{-n(R_n-\gamma)} \tag{73}$$

が成り立つことに注意しておく．すると，(67),(69),(73) より

$$
\begin{aligned}
1 &\geqslant P_{X^n}(\mathcal{D}) \\
&\overset{(69)}{=} P_{X^n}(\bigcup_m \varphi_n^{-1}(m)) \\
&= \sum_m P_{X^n}(\varphi_n^{-1}(m)) \\
&= \sum_m \sum_{\boldsymbol{x}\in\varphi_n^{-1}(m)} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) \\
&\overset{(73)}{\geqslant} \sum_m \sum_{\boldsymbol{x}\in\varphi_n^{-1}(m)} \hat{W}^n(\boldsymbol{x}|\psi_n(m))e^{-n(R-\gamma)} \\
&= \sum_m \hat{W}^n(\varphi_n^{-1}(m)|\psi_n(m))e^{-n(R-\gamma)} \\
&\overset{(67)}{\geqslant} \sum_m e^{-nR}e^{-n(R-\gamma)} \\
&= \sum_m e^{-nR_n} \\
&= M'_n e^{-nR_n}
\end{aligned} \tag{74}
$$

となり

$$\frac{1}{n}\log M'_n \leqslant R_n \tag{75}$$

が得られる．符号語数 M_n とおけば $M_n = M'_n + 1$ なので

$$\frac{1}{n}\log(M_n - 1) \leqslant R \tag{76}$$

となる．

次に式 (12) を導く．$\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}$ とすると，ある m に対して $\boldsymbol{x} \in \varphi_n^{-1}(m)$ となる．したがって $\boldsymbol{x} \in \mathcal{T}_n(\psi_n(m))$ となるので，$\mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})$ の定義より $\boldsymbol{x} \in \mathcal{S}_n(\psi_n(m))$ となる．一方 $\varphi_n(\boldsymbol{x}) = m$ なので，$\boldsymbol{x} \in \mathcal{S}_n(\psi_n(\varphi_n(\boldsymbol{x})))$ となる．したがって

$$\Pr\{X^n \in \mathcal{D}\} \leqslant \Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n(\psi_n(\varphi_n(\boldsymbol{x})))\} \tag{77}$$

といえる．一方，式 (70) により任意の $\boldsymbol{y}$ について

$$
\begin{aligned}
\hat{W}^n(\mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})|\boldsymbol{y}) &= \hat{W}^n(\mathcal{T}_n(\boldsymbol{y}) \cap \mathcal{D}|\boldsymbol{y}) + \hat{W}^n(\mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})\backslash\mathcal{D}|\boldsymbol{y}) \\
&\leqslant \hat{W}^n(\mathcal{D}|\boldsymbol{y}) + e^{-n\gamma}
\end{aligned} \tag{78}
$$

となるので，式 (77) の左辺は

$$\begin{aligned}
\Pr\{X^n \in \mathcal{D}\} &= P_{X^n}(\mathcal{D}) \\
&= \sum_{\boldsymbol{y}} P_{X^n Y_n}(\mathcal{D}, \boldsymbol{y}) \\
&= \sum_{\boldsymbol{y}} P_{Y_n}(\boldsymbol{y}) \hat{W}_n(\mathcal{D}|\boldsymbol{y}) \\
&\geqslant \sum_{\boldsymbol{y}} P_{Y_n}(\boldsymbol{y}) (\hat{W}_n(\mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})|\boldsymbol{y}) - e^{-n\gamma}) \\
&= \sum_{\boldsymbol{y}} \Pr\{X^n \in \mathcal{T}_n(Y_n), Y_n = \boldsymbol{y}\} - e^{-n\gamma} \\
&= \Pr\{X^n \in \mathcal{T}_n(Y_n)\} - e^{-n\gamma} \\
&= \Pr\{X^n \in \mathcal{B}_n(Y_n) \text{ かつ } X^n \in \mathcal{S}_n(Y_n)\} - e^{-n\gamma} \\
&= 1 - \Pr\{X^n \notin \mathcal{B}_n(Y_n) \text{ または } X^n \notin \mathcal{S}_n(Y_n)\} - e^{-n\gamma} \\
&\geqslant 1 - \Pr\{X^n \notin \mathcal{B}_n(Y_n)\} - \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n(Y_n)\} - e^{-n\gamma} \qquad (79)
\end{aligned}$$

式 (77) と式 (79) より

$$\Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n(\psi_n(\varphi_n(\boldsymbol{x})))\} \geqslant 1 - \Pr\{X^n \notin \mathcal{B}_n(Y_n)\} - \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n(Y_n)\} - e^{-n\gamma} \qquad (80)$$

となるので

$$\Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n(\psi_n(\varphi_n(X^n)))\} \leqslant \Pr\{X^n \notin \mathcal{B}_n(Y_n)\} + \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n(Y_n)\} + e^{-n\gamma} \qquad (81)$$

が導かれる． □

付録 B　定理 1 の証明

ここでは，ランダム符号を用いて順定理のみを証明する．逆定理の証明は，3 章と同様にして行う．

証明　1) 順定理

$\overline{D}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \leqslant D$ を満たす一般情報源 $\boldsymbol{Y} = \{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ が与えられたとき，

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty} d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) \leqslant D \qquad (82)$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M_n \leqslant \overline{I}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}) \qquad (83)$$

となるような符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在することを証明する．まず，$\gamma > 0$ を任意の小さ

い定数として

$$T_n^{(1)} = \left\{ (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) \in \mathcal{X}^n \times \mathcal{X}^* \middle| \frac{1}{n} \log \frac{P_{Y_n|X^n}(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x})}{P_{Y_n}(\boldsymbol{y})} < \overline{I}(\boldsymbol{X};\ \boldsymbol{Y}) + \gamma \right\} \tag{84}$$

$$T_n^{(2)} = \left\{ (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) \in \mathcal{X}^n \times \mathcal{X}^* \middle| d_n(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) < \overline{D}(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}) + \gamma \right\} \tag{85}$$

とおき $T_n = T_n^{(1)} \cap T_n^{(2)}$ とおくと定義 4，定義 5 より，

$$\Pr\left\{ X^n Y_n \in T_n^{(1)} \right\} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

$$\Pr\left\{ X^n Y_n \in T_n^{(2)} \right\} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

となる．よって，

$$\Pr\left\{ X^n Y_n \in T_n \right\} \to 1 \quad (n \to \infty) \tag{86}$$

が成立する．ここで，

$$M_n' \triangleq e^{nR} = e^{n(\overline{I}(\boldsymbol{X};\ \boldsymbol{Y}) + 2\gamma)} \tag{87}$$

と定義し，$\psi_n(1), \psi_n(2), \ldots, \psi_n(M_n')$ を分布 P_{Y_n} に従って独立に発生させる．さらに，符号器 φ_n を $\psi_n(1), \psi_n(2), \ldots, \psi_n(M_n')$ が入力 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n$ の語頭になるものの中で $d_n(\boldsymbol{x}, \psi_n(k))$ $(1 \leqslant k \leqslant M_n')$ が最小となるkを用いて，$\varphi_n(\boldsymbol{x}) = k$ となるように定める．また，$\psi_n(0)$: 空列を用意し，語頭になるようなものがなければ，$\varphi_n(\boldsymbol{x}) = 0$ とする．このように定義された (φ_n, ψ_n) に対して

$$\overline{P_e}^{(n)} \triangleq \Pr\left\{ d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) > \overline{D}(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}) + \gamma \right\} \tag{88}$$

と定義する．$\psi_n(1), \ldots, \psi_n(M_n')$ は同一の分布 P_{Y_n} に従って独立であることから (88) は

$$\begin{aligned}
\overline{P_e}^{(n)} &= \sum_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) \prod_{i=1}^{M_n'} \Pr\left\{ d_n(\boldsymbol{x}, \psi_n(i)) > \overline{D}(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}) + \gamma \right\} \\
&= \sum_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) \left(\Pr\left\{ d_n(\boldsymbol{x},\ Y_n) > \overline{D}(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}) + \gamma \right\} \right)^{M_n'} \\
&= \sum_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) \left(1 - \Pr\left\{ d_n(\boldsymbol{x},\ Y_n) \leqslant \overline{D}(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}) + \gamma \right\} \right)^{M_n'} \\
&= \sum_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) \left(1 - \sum_{\boldsymbol{y} \in \mathcal{X}^*} P_{Y_n}(\boldsymbol{y}) \mathbf{1}[d_n(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) \leqslant \overline{D}(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}) + \gamma] \right)^{M_n'}
\end{aligned} \tag{89}$$

と変形できる．(85)，(89) より，

$$\overline{P_e}^{(n)} \leqslant \sum_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) \left(1 - \sum_{\boldsymbol{y}:(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) \in T_n} P_{Y_n}(\boldsymbol{y}) \right)^{M_n'} \tag{90}$$

となる．(84) より，$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) \in T_n$ ならば

$$P_{Y_n} \geqslant e^{-n(\overline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y})+\gamma)} P_{Y_n|X^n}(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x}) \tag{91}$$

が成り立つ．よって (90) より，

$$\overline{P_e}^{(n)} \leqslant \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}^n} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) \left(1 - e^{-n(\overline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y})+\gamma)} \sum_{\boldsymbol{y}:(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})\in T_n} P_{Y_n|X^n}(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x})\right)^{M'_n} \tag{92}$$

を得る．ここで，不等式

$$(1-x)^y \leqslant e^{-xy} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1,\ y \geqslant 0) \tag{93}$$

を用い，$M'_n = e^{n(\overline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y})+2\gamma)}$ を代入すると，

$$\overline{P_e}^{(n)} \leqslant \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}^n} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) e^{-\left(e^{n\gamma}\sum_{\boldsymbol{y}:(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})\in T_n} P_{Y_n|X^n}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})\right)} \tag{94}$$

が成り立つ．さらに不等式

$$e^{-xy} \leqslant 1 - y + e^{-x} \quad (x \geqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant 1) \tag{95}$$

を用いると，

$$\begin{aligned}\overline{P_e}^{(n)} &\leqslant 1 - \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}^n} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) \sum_{\boldsymbol{y}:(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})\in T_n} P_{Y_n|X^n}(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x}) + e^{-e^{n\gamma}} \\ &= 1 - \Pr\left\{X^nY_n \in T_n\right\} + e^{-e^{n\gamma}} \\ &= \Pr\left\{X^nY_n \notin T_n\right\} + e^{-e^{n\gamma}}\end{aligned} \tag{96}$$

となる．また, (6)，(7) より

$$\Pr\left\{X^nY_n \notin T_n^{(1)}\right\} \to 0,\ \Pr\left\{X^nY_n \notin T_n^{(2)}\right\} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

が成り立つので，

$$\Pr\left\{X^nY_n \notin T_n\right\} \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{97}$$

となる．よって，(96) より，

$$\overline{P_e}^{(n)} = \Pr\left\{X^nY_n \notin T_n\right\} + e^{-e^{n\gamma}} \to 0\ (n \to \infty) \tag{98}$$

つまり，(88) から

$$\Pr\left\{d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) > \overline{D}(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}) + \gamma\right\} \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{99}$$

を得る．よって，ランダムでないある符号 (φ_n, ψ_n) が存在して (99) を満たさなければならない．これは，

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty} d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) \leqslant \overline{D}(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}) + \gamma \tag{100}$$

を意味している．また，(87) より，

$$\frac{1}{n}\log M_n' \leqslant \overline{I}(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}) + 2\gamma \tag{101}$$

が自明に成立する．ここで，符号語数 M_n とおけば $M_n = M_n' + 1$ なので

$$\frac{1}{n}\log(M_n - 1) \leqslant \overline{I}(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}) + 2\gamma \tag{102}$$

となる．よって (102) より，

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log M_n &= \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left((M_n-1)\frac{M_n}{M_n-1}\right) \\
&= \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\log(M_n-1) + \frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{M_n-1}\right)\right) \\
&= \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(M_n-1) \\
&\leqslant \overline{I}(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}) + 2\gamma
\end{aligned} \tag{103}$$

となる．ここで，$\gamma_k = \frac{1}{k}$ とし $\gamma = \gamma_k$ とおいて $k = 1, k = 2, \ldots$ の順に同様の議論を繰り返せば，(82)，(83) を満たす符号 (φ_n, ψ_n) が存在することになり

$$R_1(D) \leqslant \inf_{\boldsymbol{Y}:\overline{D}(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y})\leqslant D} \overline{I}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}) \tag{104}$$

が結論される (対角線論法).

□

付録 C　定理 2 の証明

ここでは，ランダム符号を用いて順定理のみを証明する．逆定理の証明は，4 章と同様にして行う．

証明　1) 順定理

$\overline{D}(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}) \leqslant D$ を満たす一般情報源 $\boldsymbol{Y} = \{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$が与えられたとき，

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty} d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) \leqslant D \tag{105}$$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log M_n \leqslant \overline{I}(\boldsymbol{X};\ \boldsymbol{Y}) \tag{106}$$

となるような符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在することを証明する．まず，$\gamma > 0$ を任意の小さい定数として

$$T_n^{(1)} = \left\{(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) \in \mathcal{X}^n \times \mathcal{X}^* \middle| \frac{1}{n} \log \frac{P_{Y_n|X^n}(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x})}{P_{Y_n}(\boldsymbol{y})} < \overline{I}(\boldsymbol{X};\ \boldsymbol{Y}) + \gamma \right\} \tag{107}$$

$$T_n^{(2)} = \left\{(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) \in \mathcal{X}^n \times \mathcal{X}^* \middle| d_n(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) < \overline{D}(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}) + \gamma \right\} \tag{108}$$

とおき $T_n = T_n^{(1)} \cap T_n^{(2)}$ とおくと定義 4，定義 5 より，

$$\Pr\left\{X^n Y_n \in T_n^{(1)}\right\} \to 1 \quad (n \to \infty)$$
$$\Pr\left\{X^n Y_n \in T_n^{(2)}\right\} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

となる．よって，

$$\Pr\left\{X^n Y_n \in T_n\right\} \to 1 \quad (n \to \infty) \tag{109}$$

が成立する．ここで，

$$M_n' \triangleq \sum_{k=1}^{n} e^{kR} = \sum_{k=1}^{n} e^{k(\overline{I}(\boldsymbol{X};\ \boldsymbol{Y})+2\gamma)} \tag{110}$$

と定義する．復号語を分布 P_{Y_n} に従って独立に e^{nR}個発生させ，$\psi_{n-1}(1), \ldots, \psi_{n-1}(\sum_{k=1}^{n-1} e^{kR})$ に加えて$\psi_n(1), \psi_n(2), \ldots, \psi_n(M_n')$ とする．さらに，符号器φ_nを$\psi_n(1), \psi_n(2), \ldots, \psi_n(M_n')$ が入力 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n$の語頭になるものの中で $d_n(\boldsymbol{x}, \psi_n(k))$ $(1 \leqslant k \leqslant M_n')$ が最小となるkを用いて，$\varphi_n(\boldsymbol{x}) = k$ となるように定める．また，$\psi_n(0)$: 空列を用意し，語頭になるようなものがなければ，$\varphi_n(\boldsymbol{x}) = 0$ とする．このように任意の $(\varphi_{n-1}, \psi_{n-1})$ の拡大として定義された (φ_n, ψ_n) に対して

$$\overline{P_e}^{(n)} \triangleq \Pr\left\{d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) > \overline{D}(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}) + \gamma\right\} \tag{111}$$

と定義する．e^{nR}個の復号語は同一の分布 P_{Y_n} に従って独立であり，確率は常に 1 以下である

ことから (111) は

$$\overline{P_e}^{(n)} = \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}^n} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) \prod_{i=1}^{M'_n} \Pr\left\{d_n(\boldsymbol{x}, \psi_n(i)) > \overline{D}(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}) + \gamma\right\}$$
$$= \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}^n} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) \prod_{k=1}^{n} \left(\Pr\left\{d_k(\boldsymbol{x},\ Y_k) > \overline{D}(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}) + \gamma\right\}\right)^{e^{kR}}$$
$$\leqslant \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}^n} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) \left(\Pr\left\{d_n(\boldsymbol{x},\ Y_n) > \overline{D}(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}) + \gamma\right\}\right)^{e^{nR}}$$
$$= \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}^n} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) \left(1 - \Pr\left\{d_n(\boldsymbol{x},\ Y_n) \leqslant \overline{D}(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}) + \gamma\right\}\right)^{e^{nR}}$$
$$= \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}^n} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) \left(1 - \sum_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{X}^*} P_{Y_n}(\boldsymbol{y}) \mathbf{1}[d_n(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) \leqslant \overline{D}(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}) + \gamma]\right)^{e^{nR}} \tag{112}$$

でおさえられる．(108)，(112) より，

$$\overline{P_e}^{(n)} \leqslant \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}^n} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) \left(1 - \sum_{\boldsymbol{y}:(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})\in T_n} P_{Y_n}(\boldsymbol{y})\right)^{e^{nR}} \tag{113}$$

となる．(107) より，$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) \in T_n$ ならば

$$P_{Y_n} \geqslant e^{-n(\overline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y})+\gamma)} P_{Y_n|X^n}(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x}) \tag{114}$$

が成り立つ．よって (113) より，

$$\overline{P_e}^{(n)} \leqslant \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}^n} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) \left(1 - e^{-n(\overline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y})+\gamma)} \sum_{\boldsymbol{y}:(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})\in T_n} P_{Y_n|X^n}(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x})\right)^{e^{nR}} \tag{115}$$

を得る．ここで，不等式

$$(1-x)^y \leqslant e^{-xy} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1,\ y \geqslant 0) \tag{116}$$

を用い，$e^{nR} = e^{n(\overline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y})+2\gamma)}$ を代入すると，

$$\overline{P_e}^{(n)} \leqslant \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}^n} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) e^{-\left(e^{n\gamma} \sum_{\boldsymbol{y}:(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})\in T_n} P_{Y_n|X^n}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})\right)} \tag{117}$$

が成り立つ．さらに不等式

$$e^{-xy} \leqslant 1 - y + e^{-x} \quad (x \geqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant 1) \tag{118}$$

を用いると，

$$
\begin{aligned}
\overline{P_e}^{(n)} &\leqslant 1 - \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}^n} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) \sum_{\boldsymbol{y}:(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})\in T_n} P_{Y_n|X^n}(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x}) + e^{-e^{n\gamma}} \\
&= 1 - \Pr\left\{X^n Y_n \in T_n\right\} + e^{-e^{n\gamma}} \\
&= \Pr\left\{X^n Y_n \notin T_n\right\} + e^{-e^{n\gamma}}
\end{aligned}
\tag{119}
$$

となる．また, (6)， (7) より

$$
\Pr\left\{X^n Y_n \notin T_n^{(1)}\right\} \to 0,\ \Pr\left\{X^n Y_n \notin T_n^{(2)}\right\} \to 0 \quad (n \to \infty)
$$

が成り立つので，

$$
\Pr\left\{X^n Y_n \notin T_n\right\} \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{120}
$$

となる．よって， (119) より，

$$
\overline{P_e}^{(n)} = \Pr\left\{X^n Y_n \notin T_n\right\} + e^{-e^{n\gamma}} \to 0\ (n \to \infty) \tag{121}
$$

つまり， (111) から

$$
\Pr\left\{d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) > \overline{D}(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}) + \gamma\right\} \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{122}
$$

を得る．よって，ランダムでない整合的な符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して (122) を満たさなければならない．これは，

$$
\text{p-}\limsup_{n\to\infty} d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) \leqslant \overline{D}(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}) + \gamma \tag{123}
$$

を意味している．また， (110) より，

$$
\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M'_n &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(e^R + e^{2R} + \cdots + e^{nR}\right) \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log e^{nR}\left(1 + e^{-R} + \cdots + e^{-(n-1)R}\right) \\
&= R + \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(1 + e^{-R} + \cdots + e^{-(n-1)R}\right) \\
&= R + \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{1 - e^{-nR}}{1 - e^{-R}} \\
&\leqslant R + \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{1}{1 - e^{-R}} \\
&= R = \overline{I}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}) + 2\gamma
\end{aligned}
\tag{124}
$$

が成立する．ここで，符号語数 M_n とおけば $M_n = M'_n + 1$ なので

$$
\frac{1}{n} \log(M_n - 1) \leqslant \overline{I}(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}) + 2\gamma \tag{125}
$$

となる． (124) より，

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log M_n &= \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left((M_n-1)\frac{M_n}{M_n-1}\right)\\
&= \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\log(M_n-1)+\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{M_n-1}\right)\right)\\
&= \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(M_n-1)\\
&\leqslant \overline{I}(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y})+2\gamma
\end{aligned} \tag{126}$$

となる．ここで，$\gamma_k=\frac{1}{k}$ とし $\gamma=\gamma_k$ とおいて $k=1,k=2,\ldots$ の順に同様の議論を繰り返せば， (105)， (106) を満たす符号 (φ_n,ψ_n) が存在することになり

$$R_2(D)\leqslant \inf_{\boldsymbol{Y}:\overline{D}(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y})\leqslant D}\overline{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) \tag{127}$$

が結論される (対角線論法).

□