信州大学工学部

学士論文

雑音のない通信路に対する固定長符号化における
コストあたり通信路容量のシャノン的表現

指導教員　西新 幹彦 准教授

学科　電気電子工学科
学籍番号　14T2030K
氏名　川合 康太

2018 年 3 月 31 日

目次

1　はじめに

通信システムとは，符号シンボルを送受信することによって情報を伝えるシステムである．一般に，符号シンボルの送信には何らかのコストがかかる．具体的には，符号シンボルとして，電圧や電磁波，磁気を用いる場合、いずれも電力が必要になる．また，1 つのシンボルを送信するのにかかる時間もコストとみなされうる．

通信システムによって，各シンボルのコストは同一の場合もあるが，一般には，シンボルごとに異なる．例えば，AWGN 通信路では，入力シンボルは任意の実数値をとるが，多くの場合，その 2 乗は入力シンボルのコストとみなされる．パケット間隔を用いた通信では，送信間隔はコストとみなされる．

情報理論において，符号シンボルにコストが定義されている通信路符号化問題を，コスト付き符号化問題という．通常の通信路符号化で問題になる通信路容量の次元は，符号シンボルあたりの情報量であるが，コスト付き通信路符号化では、コストあたりの情報量が問題になる．

この問題に関して，Shannon[1] は，雑音のない通信路に対して可変長符号を用いたときのコストあたり通信路容量を明らかにしている．さらにその後 Gallager[3] は，雑音のある通信路に対して固定長符号を用いたときのコスト制約付き通信路容量を明らかにし，Verdú[5] は，この結果を用いて, コストあたり通信路容量を明らかにしている．

上記の 2 つのコストあたり通信路容量について, 従来の結果を見る限り両者の関係は明確でない．本論文では，雑音のない通信路に対して両者の値が一致することを示す．

なお，本論文で登場する対数はすべて自然対数である．

2　コストの定義

定義 1　$\mathcal{X}$ をサイズ D の有限集合とし，これを符号アルファベットとする．任意の符号シンボル $x \in \mathcal{X}$ に対して，ある実数 $c(x) > 0$ が与えられる．このとき，$c(x)$ を，x のコストという．このとき，任意の符号シンボルの有限系列

$$\boldsymbol{x} = x_1 x_2 \cdots x_n \in \mathcal{X}^n \tag{1}$$

に対し，そのコスト $c(\boldsymbol{x})$ を

$$c(\boldsymbol{x}) \triangleq \sum_{i=1}^{n} c(x_i) \tag{2}$$

と定める．

3　研究背景

本章では，Shannon[1] が明らかにした，雑音のない通信路に対して可変長符号を用いたときのコストあたり通信路容量，Gallager[3] が明らかにした，雑音のある通信路に対して固定長符号を用いたときのコストあたり通信路容量，Verdú[5] が明らかにした，雑音のある通信路に対して固定長符号を用いたときのコストあたり通信路容量に関する定理について記す．

3.1　雑音のない可変長通信路符号化におけるコストあたり通信路容量

等確率で発生する M 個のメッセージを符号化する語頭符号を φ_M と表す．メッセージは 1 から M までの番号で区別する．すると φ_M は 1 から M までの整数から $\mathcal{X}$ 上の有限系列への写像として表現される．メッセージ m の符号語を$\varphi_M(m)$，U_Mを $\{1, 2, \ldots, M\}$ 上の一様分布に従う確率変数とする．

定義 2　レート R がコストあたり達成可能とは，

$$\liminf_{M\to\infty} \frac{\log M}{\mathbb{E}[c(\varphi_M(U_M))]} \geqslant R \tag{3}$$

を満たす符号の列 $\{\varphi_M\}_{M=1}^{\infty}$が存在することである．

定義 3　コストあたり通信路容量を

$$C_V \triangleq \sup\{R | R \text{ がコストあたり達成可能 }\} \tag{4}$$

と定義する．

すると，次の定理が成り立つ．

定理 1　コストあたり通信路容量 C_Vは，

$$\sum_{x\in\mathcal{X}} e^{-C_V c(x)} = 1 \tag{5}$$

の唯一の実数解として与えられる [1][2]．以降，この式の表し方を「シャノン的表現」と呼ぶ．この定理は，付録で証明する．

3.2　固定長通信路符号化におけるコスト制約付き通信路容量

長さ n の符号語をもつ固定長符号を φ_n と表す．符号語数を M_n とおき，符号化されるメッセージを 1 から M_n までの番号で区別する．すると φ_n は 1 から M_n までの整数から

$\mathcal{X}^n$ への写像として表現される．メッセージ m の符号語を$\varphi_n(m)$，通信路符号化における復号誤り確率をε_nと表す．

定義 4　レート R が Γ-達成可能とは，

$$\frac{1}{n}c(\varphi_n(m)) \leqslant \Gamma, \quad m = 1, 2, \ldots, M_n \tag{6}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M_n \geqslant R \tag{7}$$

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0 \tag{8}$$

を同時に満たす符号の列 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在することである．

定義 5　コスト制約付き通信路容量を

$$C(\Gamma) \triangleq \sup\{R|R \text{ が } \Gamma\text{-達成可能 }\} \tag{9}$$

と定義する．

　すると，次の定理が成り立つ．

定理 2　コスト制約付き通信路容量 $C(\Gamma)$ は，

$$C(\Gamma) = \sup_{X:\mathbb{E}[c(X)]\leqslant\Gamma} I(X;Y) \tag{10}$$

で与えられる [3][4]．ここに，Y は X を入力としたときの通信路の出力を表し，$I(X;Y)$ は X と Y の間の相互情報量である．この定理は，付録で証明する．

3.3　固定長通信路符号化におけるコストあたり通信路容量

　正の実数値をとるパラメータ ν に対応する固定長符号を φ_ν と表す．符号語数を M_ν とおき，符号化されるメッセージを 1 から M_ν までの番号で区別する．メッセージ m の符号語を$\varphi_\nu(m)$，通信路符号化における復号誤り確率をε_νと表す．

定義 6　レート R がコストあたり達成可能とは，

$$c(\varphi_\nu(m)) \leqslant \nu, \quad m = 1, 2, \ldots, M_\nu \tag{11}$$

$$\liminf_{\nu\to\infty} \frac{1}{\nu} \log M_\nu \geqslant R \tag{12}$$

$$\lim_{\nu\to\infty} \varepsilon_\nu = 0 \tag{13}$$

を同時に満たす符号の列 $\{\varphi_\nu\}_{\nu>0}$ が存在することである．

定義 7　コストあたり通信路容量を

$$C_F \triangleq \sup\{R|R \text{ がコストあたり達成可能 }\} \tag{14}$$

と定義する．

すると，次の定理が成り立つ．

定理 3　コストあたり通信路容量 C_Fは，

$$C_F = \sup_X \frac{I(X;Y)}{\mathbb{E}[c(X)]} \tag{15}$$

で与えられる [5]．この定理は，付録で証明する．

4　固定長通信路符号化におけるコストあたり通信路容量のシャノン的表現に向けて

定理 3 から，コストあたり通信路容量 C_Fの値は，分布 P_Xの関数$\frac{I(X;Y)}{\mathbb{E}[c(X)]}$の制約付き最大化問題を解くことで得られることが分かる．すなわち，制約条件

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} P_X(x) = 1 \tag{16}$$

$$0 \leqslant P_X(x) \leqslant 1, \quad x \in \mathcal{X} \tag{17}$$

の下で，目的関数 $\frac{I(X;Y)}{\mathbb{E}[c(X)]}$ を最大化すればよい．ここで，目的関数が上に凸であると仮定すると，ラグランジュの未定乗数法を適用して解くことができる．ラグランジュ乗数をλとして，ラグランジュ関数を，

$$L(P_X, \lambda) \triangleq \frac{I(X;Y)}{\mathbb{E}[c(X)]} + \lambda \left(\sum_{x \in \mathcal{X}} P_X(x) - 1 \right) \tag{18}$$

とおく．ラグランジュの未定乗数法に従い，

$$\frac{\partial L(P_X, \lambda)}{\partial P_X(x)} = \frac{1}{\mathbb{E}[c(X)]} \frac{\partial I(X;Y)}{\partial P_X(x)} - \frac{I(X;Y)}{(\mathbb{E}[c(X)])^2} \frac{\partial \mathbb{E}[c(X)]}{\partial P_X(x)} + \lambda = 0 \tag{19}$$

とおく．式 (19) に $\mathbb{E}[c(X)]$ を掛けて，

$$\frac{\partial I(X;Y)}{\partial P_X(x)} - \frac{I(X;Y)}{\mathbb{E}[c(X)]} \frac{\partial \mathbb{E}[c(X)]}{\partial P_X(x)} + \lambda \mathbb{E}[c(X)] = 0. \tag{20}$$

ここで，

$$\frac{\partial I(X;Y)}{\partial P_X(x)} = \sum_{y\in\mathcal{Y}} W(y|x)\log\frac{W(y|x)}{P_Y(y)} - 1 \tag{21}$$

$$\frac{\partial \mathbb{E}[c(X)]}{\partial P_X(x)} = c(x) \tag{22}$$

となるので，式 (20) は，

$$\sum_{y\in\mathcal{Y}} W(y|x)\log\frac{W(y|x)}{P_Y(y)} - 1 - \frac{I(X;Y)}{\mathbb{E}[c(X)]}c(x) + \lambda\mathbb{E}[c(X)] = 0. \tag{23}$$

両辺に $P_X(x)$ を掛け，$x \in \mathcal{X}$ について和をとれば，

$$-1 + \lambda\mathbb{E}[c(X)] = 0 \tag{24}$$

となり，λ について解くと，

$$\lambda = \frac{1}{\mathbb{E}[c(X)]}. \tag{25}$$

よって，式 (23) は，

$$\sum_{y\in\mathcal{Y}} W(y|x)\log\frac{W(y|x)}{P_Y(y)} - \frac{I(X;Y)}{\mathbb{E}[c(X)]}c(x) = 0 \tag{26}$$

となる．

4.1 雑音のない通信路におけるコストあたり通信路容量

この節では，通信路に雑音がないと仮定して，式 (26) 以降の計算を進める．通信路の遷移確率は，

$$W(y|x) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases} \tag{27}$$

となるので，

$$I(X;Y) = H(X). \tag{28}$$

よって，式 (26) は，

$$-\log P_X(x) - \frac{H(X)}{\mathbb{E}[c(X)]}c(x) = 0 \tag{29}$$

となり，$P_X(x)$ について解くと，

$$P_X(x) = e^{-\frac{H(X)}{\mathbb{E}[c(X)]}c(x)}. \tag{30}$$

$x \in \mathcal{X}$ について和をとると，

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} e^{-\frac{H(X)}{\mathbb{E}[c(X)]}c(x)} = 1. \tag{31}$$

ここで，式 (31) は，未知数 $\frac{H(X)}{\mathbb{E}[c(X)]}$ の方程式であることに注意して，その唯一の実数解を α とおけば，式 (30) より，X の分布は，

$$P_X(x) = e^{-\alpha c(x)} \quad (\forall x \in \mathcal{X}) \tag{32}$$

となり，これは，制約条件である式 (17) を満たす．このとき，$\frac{H(X)}{\mathbb{E}[c(X)]}$ は，目的関数であるので，

$$\sup_X \frac{I(X;Y)}{\mathbb{E}[c(X)]} = \alpha \tag{33}$$

となる．すなわち，コストあたり通信路容量 C_Fは，

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} e^{-C_F c(x)} = 1 \tag{34}$$

の唯一の実数解として与えられる．

ゆえに，通信路に雑音がないとき，式 (34) は，C_Fのシャノン的表現となり，

$$C_V = C_F \tag{35}$$

を得る．これが，本論文の主要な結果である．

4.2 雑音のある通信路におけるコストあたり通信路容量

次に，通信路に雑音がある場合を考える．式 (26) は，

$$\sum_{y \in \mathcal{Y}} W(y|x) \log P_Y(y) = -H(Y|X=x) - \frac{I(X;Y)}{\mathbb{E}[c(X)]}c(x) \tag{36}$$

となるので，

$$\mathcal{X} = \{0, 1, \ldots, D-1\} \tag{37}$$

として，

$$
W \triangleq \begin{pmatrix} W(0|0) & W(1|0) & \dots & W(D-1|0) \\ W(0|1) & W(1|1) & \dots & W(D-1|1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W(0|D-1) & W(1|D-1) & \dots & W(D-1|D-1) \end{pmatrix} \tag{38}
$$

$$
k_X(x) \triangleq -H(Y|X=x) - \frac{I(X;Y)}{\mathbb{E}[c(X)]}c(x) \tag{39}
$$

とおく．すると，式 (36) は，

$$
W \begin{pmatrix} \log P_Y(0) \\ \log P_Y(1) \\ \vdots \\ \log P_Y(D-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_X(0) \\ k_X(1) \\ \vdots \\ k_X(D-1) \end{pmatrix}. \tag{40}
$$

ここで，W の逆行列が存在すれば，

$$
\begin{pmatrix} k_Y(0) \\ k_Y(1) \\ \vdots \\ k_Y(D-1) \end{pmatrix} \triangleq W^{-1} \begin{pmatrix} k_X(0) \\ k_X(1) \\ \vdots \\ k_X(D-1) \end{pmatrix} \tag{41}
$$

とおいて，

$$
\begin{pmatrix} \log P_Y(0) \\ \log P_Y(1) \\ \vdots \\ \log P_Y(D-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_Y(0) \\ k_Y(1) \\ \vdots \\ k_Y(D-1) \end{pmatrix}. \tag{42}
$$

よって，式 (42) より，$P_Y(y)$ $(\forall y \in \mathcal{Y})$ について解くと，

$$
P_Y(y) = e^{k_Y(y)} \tag{43}
$$

となり，$y \in \mathcal{Y}$ について和をとると，

$$
\sum_{y \in \mathcal{Y}} e^{k_Y(y)} = 1. \tag{44}
$$

ここで，式 (44) は，$\frac{I(X;Y)}{\mathbb{E}[c(X)]}$ の方程式であることに注意すると，唯一の実数解をもつことにより，Y の分布が得られる．このとき，

$$
W^T \begin{pmatrix} P_X(0) \\ P_X(1) \\ \vdots \\ P_X(D-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_Y(0) \\ P_Y(1) \\ \vdots \\ P_Y(D-1) \end{pmatrix} \tag{45}
$$

より，

$$\begin{pmatrix} P_X(0) \\ P_X(1) \\ \vdots \\ P_X(D-1) \end{pmatrix} = (W^T)^{-1} \begin{pmatrix} P_Y(0) \\ P_Y(1) \\ \vdots \\ P_Y(D-1) \end{pmatrix} \tag{46}$$

を得るが，これを満たす X の分布は存在しない可能性があり，コストあたり通信路容量 C_F は正確に得られるとはいえない．

ゆえに，これについては，さらなる考察が必要となる．

5　まとめ

Shannon が明らかにした，雑音のない通信路に対して可変長符号を用いたときのコストあたり通信路容量と，Verdú が明らかにした，雑音のある通信路に対して固定長符号を用いたときのコストあたり通信路容量を比較すると，両者の関係は明確でなかったが，本研究によって，通信路に雑音がない場合に，両者の値が一致することが分かった．また，雑音のある通信路に対して固定長符号を用いたときのコストあたり通信路容量について，W の逆行列が存在しないときの検討が今後の課題である．

謝辞

本研究を進めるにあたり，丁寧なご指導を頂いた西新幹彦准教授に深謝する．

参考文献

[1] C.E. Shannon, “A mathematical theory of communication,” Bell Syst. Tech. J., vol.27, pp.379–423, 623–656, 1948.

[2] 植松友彦, “情報源のコスト付き符号化とその応用,” 電子情報通信学会論文誌 A, vol.J87-A, no.5, pp.588–596, May 2004.

[3] Robert G. Gallager, *Information Theory and Reliable Communication*, John Wiley & Sons, 1968.

[4] 韓太舜, 情報理論における情報スペクトル的方法, 培風館, 1998.

[5] Sergio Verdú, “On Channel Capacity per Unit Cost,” IEEE Transactions on Information Theory, vol.36, no.5, pp.1019–1030, Sep. 1990.

付録 A　定理 1 の証明

α を,

$$\sum_{x\in\mathcal{X}} e^{-\alpha c(x)} = 1 \tag{47}$$

を満たす唯一の実数解とおき，逆定理

$$C_V \leqslant \alpha \tag{48}$$

及び順定理

$$C_V \geqslant \alpha \tag{49}$$

を示すことによって，定理 1 を証明する．

A.1　逆定理

R が達成可能であると仮定する．すると，定義 2 より，任意の $\gamma > 0$ に対して，十分大きなすべての M で,

$$\frac{\log M}{\mathbb{E}[c(\varphi_M(U_M))]} > R - \gamma \tag{50}$$

を満たす語頭符号 φ_M が存在する．両辺に $\mathbb{E}[c(\varphi_M(U_M))]$ を掛けて,

$$\log M > (R-\gamma)\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} c(\varphi_M(m)). \tag{51}$$

両辺の差をとって,

$$\begin{aligned}
0 &< \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}(\log M - (R-\gamma)c(\varphi_M(m))) \\
&= \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\log Me^{-(R-\gamma)c(\varphi_M(m))} \\
&\leqslant \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}(Me^{-(R-\gamma)c(\varphi_M(m))} - 1) \quad (\because \log t \leqslant t-1) \\
&= \sum_{m=1}^{M} e^{-(R-\gamma)c(\varphi_M(m))} - 1.
\end{aligned} \tag{52}$$

よって，

$$\sum_{m\in\mathcal{M}} e^{-(R-\gamma)c(\varphi_M(m))} > 1. \tag{53}$$

よって，

$$\begin{aligned}
\alpha &= \inf\left\{a \middle| \sum_{x\in\mathcal{X}} e^{-ac(x)} \leqslant 1\right\}\\
&\geqslant \inf\left\{a \middle| \text{任意の語頭符号}\varphi\text{ に対して } \sum_{m=1}^{M_\varphi} e^{-ac(\varphi(m))} \leqslant 1\right\}\\
&\geqslant \inf\left\{a \middle| \varphi_M\text{に対して } \sum_{m=1}^{M} e^{-ac(\varphi_M(m))} \leqslant 1\right\}\\
&\geqslant R-\gamma.
\end{aligned} \tag{54}$$

$\gamma > 0$ は任意であったので，

$$\alpha \geqslant R. \tag{55}$$

達成可能な任意の R に対して，式 (55) が成り立つので，

$$\begin{aligned}
\alpha &\geqslant \sup\{R | R\text{ がコストあたり達成可能 }\}\\
&= C_V
\end{aligned} \tag{56}$$

となる．□

A.2　順定理

M 個のメッセージに対して，Krause(1962) の構成法で語頭符号 φ_M を作る．すると，

$$\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} c(\varphi_M(m)) < \frac{\log M}{\alpha} + c_{\max} \tag{57}$$

が成り立つ．両辺の逆数をとって，

$$\frac{1}{\mathbb{E}[c(\varphi_M)]} > \frac{\alpha}{\log M + \alpha c_{\max}}. \tag{58}$$

両辺に $\log M$ を掛けて，

$$\frac{\log M}{\mathbb{E}[c(\varphi_M)]} > \frac{\log M}{\log M + \alpha c_{\max}}\alpha. \tag{59}$$

両辺の $\liminf_{M\to\infty}$ をとって，

$$\liminf_{M\to\infty} \frac{\log M}{\mathbb{E}[c(\varphi_M)]} \geqslant \alpha. \tag{60}$$

よって，α は達成可能となり，

$$\begin{aligned} \alpha &\leqslant \sup\{R|R \text{ がコストあたり達成可能 }\} \\ &= C_V \end{aligned} \tag{61}$$

となる．□

付録 B　定理 2 の証明

順定理

$$C(\Gamma) \geqslant \sup_{X:\mathbb{E}[c(X)]\leqslant\Gamma} I(X;Y) \tag{62}$$

及び逆定理

$$C(\Gamma) \leqslant \sup_{X:\mathbb{E}[c(X)]\leqslant\Gamma} I(X;Y) \tag{63}$$

を示すことによって，定理 2 を証明する．

B.1　順定理

任意の $\tilde{\gamma} > 0$ に対して，

$$\mathbb{E}[c(X)] \leqslant \Gamma - \tilde{\gamma} \tag{64}$$

を満たす任意の確率変数 $X \in \mathcal{X}$ 及びΓを考える．X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ をそれぞれ X のi.i.d コピーとし，

$$X^n \triangleq X_1 X_2 \cdots X_n \tag{65}$$

とおく．ここで，

$$\mathcal{A}_n \triangleq \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n \middle| \frac{1}{n} c(\boldsymbol{x}) \leqslant \Gamma \right\} \tag{66}$$

$$\kappa_n \triangleq P_{X^n}(\mathcal{A}_n) \tag{67}$$

とすると，

$$
\begin{aligned}
\kappa_n &= P_{X^n}(\mathcal{A}_n) \\
&= \Pr\left\{\frac{1}{n}c(X^n) \leqslant \Gamma\right\} \\
&= \Pr\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c(X_i) \leqslant \Gamma\right\} \\
&\geqslant \Pr\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c(X_i) \leqslant \mathbb{E}[c(X)] + \tilde{\gamma}\right\} \\
&= \Pr\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c(X_i) - \mathbb{E}[c(X)] \leqslant \tilde{\gamma}\right\} \\
&\geqslant \Pr\left\{-\tilde{\gamma} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c(X_i) - \mathbb{E}[c(X)] \leqslant \tilde{\gamma}\right\} \\
&= \Pr\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c(X_i) - \mathbb{E}[c(X)]\right| \leqslant \tilde{\gamma}\right\} \\
&\to 1 \quad (n \to \infty) \quad (\because \text{大数の弱法則})
\end{aligned} \tag{68}
$$

ここで,

$$
P_{\tilde{X}^n}(\boldsymbol{x}) \triangleq \begin{cases} \frac{1}{\kappa_n} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) & (\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{A}_n) \\ 0 & (\forall \boldsymbol{x} \notin \mathcal{A}_n). \end{cases} \tag{69}
$$

を満たす確率変数 $\tilde{X}^n$ を定める．この $\tilde{X}^n$ で，以下のように符号を作る．ここで，任意の $\gamma > 0$ に対して，

$$
\mathcal{T}_n \triangleq \left\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{X}^n \times \mathcal{Y}^n \middle| \frac{1}{n}\log\frac{W^n(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})}{P_{Y^n}(\boldsymbol{y})} > I(X;Y) - 2\gamma\right\} \tag{70}
$$

$$
R \triangleq I(X;Y) - 3\gamma \tag{71}
$$

$$
M_n \triangleq e^{nR} \tag{72}
$$

とおく．M_n個の符号語を分布 $P_{\tilde{X}^n}$に従って，確率的に，独立に決める (ランダム符号)．これらの符号語を$\varphi_n(1), \varphi_n(2), \ldots, \varphi_n(M_n)$ と表す．これで，符号語φ_nが定義することができた．復号器は，$\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^n$を受信すると，$(\varphi_n(m), \boldsymbol{y}) \in \mathcal{T}^n$を満たす $m \in \{1, 2, \ldots, M_n\}$ が唯一存在するとき，m を復号メッセージとして出力する．そのような m が存在しないときや，複数存在するときは，復号誤りが起こったものとする．復号誤り確率を評価するために，

$$
E_m(\boldsymbol{y}) \triangleq \{(\varphi_n(m), \boldsymbol{y}) \in \mathcal{T}_n\} \tag{73}
$$

なる事象を定義する．ここで,$\varphi_n(m)$ を入力としたときの通信路の出力を$\tilde{Y}^n(m)$ とおく．すると，メッセージ m が正しく復号される事象は，$E_m(\tilde{Y}^n(m)) \cap \left(\bigcap_{m' \neq m} E^c_{m'}(\tilde{Y}^n(m))\right)$ と表

すことができる．したがって，メッセージ m を送信したときの復号誤り確率の符号に関する期待値$\bar{\varepsilon}_n(m)$ は，

$$
\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}_n(m) &= \Pr\left\{E_m^c(\tilde{Y}^n(m)) \cup \left(\bigcup_{m'\neq m} E_{m'}(\tilde{Y}^n(m))\right)\right\} \\
&\leqslant \Pr\{E_m^c(\tilde{Y}^n(m))\} + \Pr\left\{\bigcup_{m'\neq m} E_{m'}(\tilde{Y}^n(m))\right\} \\
&\leqslant \Pr\{E_m^c(\tilde{Y}^n(m))\} + \sum_{m'\neq m} \Pr\{E_{m'}(\tilde{Y}^n(m))\} \\
&= \Pr\{(\varphi_n(m), \tilde{Y}^n(m)) \notin \mathcal{T}_n\} + \sum_{m'\neq m} \Pr\{E_{m'}(\tilde{Y}^n(m))\}
\end{aligned} \tag{74}
$$

ここで，$\varphi_n(m)$ と$\tilde{X}^n$は，同じ分布であり，かつ，$\tilde{Y}^n(m)$ は，$\varphi_n(m)$ を入力したときの通信路の出力であるので，$\tilde{X}^n$を入力したときの通信路の出力を$\tilde{Y}^n$と表せば，

$$
\Pr\{(\varphi_n(m), \tilde{Y}^n(m)) \notin \mathcal{T}_n\} = \Pr\{(\tilde{X}^n, \tilde{Y}^n) \notin \mathcal{T}_n\}. \tag{75}
$$

よって，

$$
\bar{\varepsilon}_n(m) \leqslant \Pr\{(\tilde{X}^n, \tilde{Y}^n) \notin \mathcal{T}_n\} + \sum_{m'\neq m} \Pr\{E_{m'}(\tilde{Y}^n(m))\} \tag{76}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
P_{Y^n}(\boldsymbol{y}) &= \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}^n} P_{X^nY^n}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\
&= \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}^n} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) W^n(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) \\
&\geqslant \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{A}_n} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) W^n(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) \\
&= \kappa_n \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{A}_n} P_{\tilde{X}^n}(\boldsymbol{x}) W^n(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) \\
&= \kappa_n \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{A}_n} P_{\tilde{X}^n\tilde{Y}^n}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\
&= \kappa_n P_{\tilde{Y}^n}(\boldsymbol{y}).
\end{aligned} \tag{77}
$$

よって，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{Y^n}(\tilde{Y}^n)} &\leqslant \frac{1}{n}\log\frac{1}{\kappa_n P_{\tilde{Y}^n}(\tilde{Y}^n)} \\
&= \frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{\tilde{Y}^n}(\tilde{Y}^n)} + \frac{1}{n}\log\frac{1}{\kappa_n}.
\end{aligned} \tag{78}
$$

よって，

$$\frac{1}{n}\log\frac{W^n(\tilde{Y}^n|\tilde{X}^n)}{P_{Y^n}(\tilde{Y}^n)} \leqslant \frac{1}{n}\log\frac{W^n(\tilde{Y}^n|\tilde{X}^n)}{P_{\tilde{Y}^n}(\tilde{Y}^n)} + \frac{1}{n}\log\frac{1}{\kappa_n}. \tag{79}$$

よって，実数 a に対して，

$$\frac{1}{n}\log\frac{W^n(\tilde{Y}^n|\tilde{X}^n)}{P_{\tilde{Y}^n}(\tilde{Y}^n)} + \frac{1}{n}\log\frac{1}{\kappa_n} < a \tag{80}$$

ならば，

$$\frac{1}{n}\log\frac{W^n(\tilde{Y}^n|\tilde{X}^n)}{P_{Y^n}(\tilde{Y}^n)} < a. \tag{81}$$

よって，

$$\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(\tilde{Y}^n|\tilde{X}^n)}{P_{Y^n}(\tilde{Y}^n)} < a\right\} \geqslant \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(\tilde{Y}^n|\tilde{X}^n)}{P_{Y^n}(\tilde{Y}^n)} < a - \frac{1}{n}\log\frac{1}{\kappa_n}\right\}. \tag{82}$$

一方，任意の $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}^n \times \mathcal{Y}^n$ に対して，

$$\begin{aligned}
\Pr\{X^nY^n \in \mathcal{S}\} &= \sum_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathcal{S}} P_{X^n}(\boldsymbol{x})W^n(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) \\
&\geqslant \sum_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathcal{S}:\boldsymbol{x}\in\mathcal{A}_n} P_{X^n}(\boldsymbol{x})W^n(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) \\
&= \sum_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathcal{S}:\boldsymbol{x}\in\mathcal{A}_n} \kappa_n P_{\tilde{X}^n}(\boldsymbol{x})W^n(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) \\
&= \sum_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathcal{S}} \kappa_n P_{\tilde{X}^n}(\boldsymbol{x})W^n(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) \\
&= \sum_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathcal{S}} \kappa_n P_{\tilde{X}^n\tilde{Y}^n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\
&= \kappa_n \Pr\{\tilde{X}^n\tilde{Y}^n \in \mathcal{S}\}.
\end{aligned} \tag{83}$$

であるので，n が十分大きければ，

$$\begin{aligned}
\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n|X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} < a\right\} &\geqslant \kappa_n \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(\tilde{Y}^n|\tilde{X}^n)}{P_{Y^n}(\tilde{Y}^n)} < a\right\} \\
&\geqslant \kappa_n \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(\tilde{Y}^n|\tilde{X}^n)}{P_{\tilde{Y}^n}(\tilde{Y}^n)} < a - \frac{1}{n}\log\frac{1}{\kappa_n}\right\} \\
&\geqslant \kappa_n \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(\tilde{Y}^n|\tilde{X}^n)}{P_{\tilde{Y}^n}(\tilde{Y}^n)} \leqslant a - \gamma\right\}.
\end{aligned} \tag{84}$$

ここで，

$$a \triangleq I(X;Y) - \gamma \tag{85}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}
\Pr\{\tilde{X}^n\tilde{Y}^n \notin \mathcal{T}_n\} &= \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(\tilde{Y}^n|\tilde{X}^n)}{P_{\tilde{Y}^n}(\tilde{Y}^n)} \leqslant I(X;Y) - 2\gamma\right\} \\
&\leqslant \frac{1}{\kappa_n}\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n|X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} < I(X;Y) - \gamma\right\} \\
&\to 0 \quad (n \to \infty).
\end{aligned} \tag{86}$$

一方，

$$\begin{aligned}
\Pr\{E_{m'}(\tilde{Y}^n(m))\} &= \Pr\{(\varphi_n(m'), \tilde{Y}^n(m)) \in \mathcal{T}_n\} \\
&= \sum_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathcal{T}_n} \Pr\{\varphi_n(m') = \boldsymbol{x}\}\Pr\{\tilde{Y}^n(m) = \boldsymbol{y}|\varphi_n(m') = \boldsymbol{x}\} \\
&= \sum_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathcal{T}_n} P_{\tilde{X}^n}(\boldsymbol{x})P_{\tilde{Y}^n}(\boldsymbol{y}) \\
&\leqslant \frac{1}{\kappa_n}\sum_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathcal{T}_n} P_{\tilde{X}^n}(\boldsymbol{x})P_{\tilde{Y}^n}(\boldsymbol{y}) \\
&< \frac{1}{\kappa_n}\sum_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathcal{T}_n} P_{\tilde{X}^n}(\boldsymbol{x})W^n(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})e^{-n(I(X;Y)-2\gamma)} \\
&\leqslant \frac{1}{\kappa_n}e^{-n(I(X;Y)-2\gamma)}.
\end{aligned} \tag{87}$$

よって，

$$\begin{aligned}
\sum_{m'\neq m}\Pr\{E_{m'}(\tilde{Y}^n(m))\} &\leqslant \frac{1}{\kappa_n}\sum_{m'\neq m} e^{-n(I(X;Y)-2\gamma)} \\
&\leqslant M_n e^{-n(I(X;Y)-2\gamma)} \\
&= e^{-n(I(X;Y)-3\gamma)}e^{-n(I(X;Y)-2\gamma)} \\
&= e^{-n\gamma}.
\end{aligned} \tag{88}$$

よって，

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}_n(m) &\leqslant \Pr\{(\tilde{X}^n, \tilde{Y}^n) \notin \mathcal{T}_n\} + \sum_{m'\neq m}\Pr\{E_{m'}(\tilde{Y}^n(m))\} \\
&\leqslant \Pr\{(\tilde{X}^n, \tilde{Y}^n) \notin \mathcal{T}_n\} + \frac{1}{\kappa_n}e^{-n\gamma}.
\end{aligned} \tag{89}$$

式 (89) は，m によらないことに注意すれば，復号誤り確率のすべての符号にわたる平均$\bar{\varepsilon}_n$は，

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_n &= \frac{1}{M_n}\sum_{m=1}^{M_n}\bar{\varepsilon}_n(m)\\ &\leqslant \frac{1}{M_n}\sum_{m=1}^{M_n}(\Pr\{(\tilde{X}^n,\tilde{Y}^n)\notin \mathcal{T}_n\}+\frac{1}{\kappa_n}e^{-n\gamma})\\ &= \Pr\{(\tilde{X}^n,\tilde{Y}^n)\notin \mathcal{T}_n\}+\frac{1}{\kappa_n}e^{-n\gamma}.\end{aligned} \tag{90}$$

よって，

$$\lim_{n\to\infty}\bar{\varepsilon}_n = 0. \tag{91}$$

すべての n に対して，復号誤り確率ε_nが

$$\varepsilon_n \leqslant \bar{\varepsilon}_n \tag{92}$$

を満たす符号が存在するので，

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0. \tag{93}$$

よって，レート R は Γ-達成可能である．すなわち，

$$\begin{aligned}C(\Gamma) &\geqslant R\\ &= I(X;Y)-3\gamma\end{aligned} \tag{94}$$

X の任意性により，

$$C(\Gamma) \geqslant \sup_{X:\mathbb{E}[c(X)]\leqslant\Gamma-\tilde{\gamma}} I(X;Y). \tag{95}$$

ここで，右辺は，この後示すように $\tilde{\gamma}$ に関して連続であり，かつ，$\tilde{\gamma}>0$ は任意であったので，

$$C(\Gamma) \geqslant \sup_{X:\mathbb{E}[c(X)]\leqslant\Gamma} I(X;Y) \tag{96}$$

となる．□

ここで，式 (95) の右辺について，

$$f(\Gamma) \triangleq \sup_{X:E[c(X)]\leqslant\Gamma} I(X;Y) \tag{97}$$

が上に凸を示す．任意の Γ_1,Γ_2 を考える．

$$\mathbb{E}[c(X_i)] \leqslant \Gamma_i \tag{98}$$

なる X_1, X_2 を考える．また，

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1,\ \alpha_1 \geqslant 0,\ \alpha_2 \geqslant 0 \tag{99}$$

なる α_1, α_2 を考える．

$$P_X(x) = \alpha_1 P_{X_1}(x) + P_{X_2}(x) \tag{100}$$

なる確率変数 X を考える．すると，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[c(X)] &= \sum_{x \in \mathcal{X}} c(x) P_X(x) \\
&= \alpha_1 \sum_{x \in \mathcal{X}} c(x) P_{X_1}(x) + \alpha_2 \sum_{x \in \mathcal{X}} c(x) P_{X_2}(x) \\
&= \alpha_1 \mathbb{E}[c(X_1)] + \alpha_2 \mathbb{E}[c(X_2)] \\
&\leqslant \alpha_1 \Gamma_1 + \alpha_2 \Gamma_2.
\end{aligned} \tag{101}$$

よって，

$$\begin{aligned}
\alpha_1 I(X_1; Y_1) + \alpha_2 I(X_2; Y_2) &= \sum_{i=1}^{2} \alpha_i \sum_{x \in \mathcal{X}} P_{X_i}(x) \sum_{y \in \mathcal{Y}} W(y|x) \log \frac{W(y|x)}{P_{Y_i}(y)} \\
&= \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{i=1}^{2} \alpha_i P_{X_i}(x) \sum_{y \in \mathcal{Y}} W(y|x) \log W(y|x) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{2} \alpha_i \sum_{y \in \mathcal{Y}} \sum_{x \in \mathcal{X}} P_{X_i}(x) W(y|x) \log \frac{1}{P_{Y_i}(y)} \\
&= \sum_{x \in \mathcal{X}} P_X(x) \sum_{y \in \mathcal{Y}} W(y|x) \log W(y|x) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{2} \alpha_i \sum_{y \in \mathcal{Y}} \sum_{x \in \mathcal{X}} P_{X_i Y_i}(x, y) \log \frac{1}{P_{Y_i}(y)} \\
&= \sum_{x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}} \Pr\{X = x, Y = y\} \log \Pr\{Y = y | X = x\} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{2} \alpha_i \sum_{y \in \mathcal{Y}} P_{Y_i}(y) \log \frac{1}{P_{Y_i}(y)} \\
&= - H(Y|X) + \sum_{i=1}^{2} \alpha_i H(Y_i).
\end{aligned} \tag{102}$$

ここで，

$$P_Q(i) = \alpha_i \tag{103}$$

なる確率変数 Q を導入すると，

$$\begin{aligned}P_Y(y) &= \sum_{x\in\mathcal{X}} P_X(x)W(y|x)\\ &= \sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{i=1}^{2}\alpha_i P_{X_i}(x)W(y|x)\\ &= \sum_{i=1}^{2}\alpha_i \sum_{x\in\mathcal{X}} P_{X_i}(x)W(y|x)\\ &= \sum_{i=1}^{2}\alpha_i P_{Y_i}(y)\\ &= \sum_{i=1}^{2} P_Q(i)P_{Y_i}(y) \qquad (104)\end{aligned}$$

であるので，

$$P_{Y_i}(y) = P_{Y|Q}(y|i) \qquad (105)$$

と書くことができる．よって，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2}\alpha_i\sum_{y\in\mathcal{Y}} P_{Y_i}(y)\log\frac{1}{P_{Y_i}(y)} &= \sum_{i=1}^{2}P_Q(i)\sum_{y\in\mathcal{Y}}P_{Y|Q}(y|i)\log\frac{1}{P_{Y|Q}(y|i)}\\ &= H(Y|Q) \qquad (106)\end{aligned}$$

となるので，式 (102) は，

$$\begin{aligned}\alpha_1 I(X_1;Y_1)+\alpha_2 I(X_2;Y_2) &= -H(Y|X)+H(Y|Q)\\ &= H(Y)-H(Y|X)+H(Y|Q)-H(Y)\\ &= I(X;Y)-I(Y;Q)\\ &\leqslant I(X;Y). \qquad (107)\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\alpha_1 f(\Gamma_1)+\alpha_2 f(\Gamma_2) &= \sup_{X_1:\mathbb{E}[c(X_1]\leqslant\Gamma_1}\alpha_1 I(X_1;Y_1)+\sup_{X_2:\mathbb{E}[c(X_2)]\leqslant\Gamma_2}\alpha_2 I(X_2;Y_2)\\ &= \sup_{X_1:\mathbb{E}[c(X_1)]\leqslant\Gamma_1,X_2:\mathbb{E}[c(X_2)]\leqslant\Gamma_2}\{\alpha_1 I(X_1;Y_1)+\alpha_2 I(X_2;Y_2)\}\\ &\leqslant \sup_{X_1:\mathbb{E}[c(X_1)]\leqslant\Gamma_1,X_2:\mathbb{E}[c(X_2)]\leqslant\Gamma_2} I(X;Y)\\ &\leqslant \sup_{X:\mathbb{E}[c(X)]\leqslant\alpha_1\Gamma_1+\alpha_2\Gamma_2} I(X;Y)\\ &= f(\alpha_1\Gamma_1+\alpha_2\Gamma_2). \qquad (108)\end{aligned}$$

よって，上に凸である．□

B.2 逆定理

レート R が Γ-達成可能であるとする．すなわち，式 (6)，(7)，(8) を満たす符号の列が存在する．このとき，

$$\varepsilon_n = \Pr\{X^n \neq \hat{X}^n\} \tag{109}$$

とすれば，

$$\begin{aligned}
\log M_n &= H(X^n) \\
&= H(X^n) - H(X^n|\hat{X}^n) + H(X^n|\hat{X}^n) \\
&= I(X^n;\hat{X}^n) + H(X^n|\hat{X}^n) \\
&\leqslant I(X^n;Y^n) + H(X^n|\hat{X}^n) \\
&\leqslant I(X^n;Y^n) + \varepsilon_n \log M_n + h(\varepsilon_n) \\
&\leqslant \frac{1}{1-\varepsilon_n}(I(X^n;Y^n) + h(\varepsilon_n)).
\end{aligned} \tag{110}$$

よって，

$$\begin{aligned}
R &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M_n \\
&\leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}(I(X^n;Y^n) + h(\varepsilon_n)) \\
&= \liminf_{n\to\infty} I(X^n;Y^n).
\end{aligned} \tag{111}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
I(X^n;Y^n) &= H(Y^n) - H(Y^n|X^n) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} H(Y_i) - H(Y^n|X^n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} H(Y_i) - \sum_{i=1}^{n} H(Y_i|X^nY^{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} H(Y_i) - \sum_{i=1}^{n} H(Y_i|X_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} I(X_i;Y_i).
\end{aligned} \tag{112}$$

ここで，

$$P_Q(i) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{113}$$

なる確率変数 Q を導入する．X^nとは独立である．よって，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[c(X_Q)] &= \sum_{x\in\mathcal{X}} c(x)P_{X_Q}(x) \\ &= \sum_{x\in\mathcal{X}} c(x)\sum_{i=1}^{n} P_{X_Q Q}(x,i) \\ &= \sum_{x\in\mathcal{X}} c(x)\sum_{i=1}^{n} P_{X_i Q}(x,i) \\ &= \sum_{x\in\mathcal{X}} c(x)\sum_{i=1}^{n} P_Q(i)P_{X_i}(x) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[c(X_i)] \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}c(X^n)\right] \\ &\leqslant \Gamma. \end{aligned} \tag{114}$$

よって，

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i;Y_i) &= \sum_{i=1}^{n} P_Q(i)I(X_i;Y_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P_Q(i)(H(Y_i)-H(Y_i|X_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P_Q(i)H(Y_Q|Q=i) - \sum_{i=1}^{n} P_Q(i)H(Y_i|X_i) \\ &= H(Y_Q|Q) - \sum_{i=1}^{n} P_Q(i)\sum_{x\in\mathcal{X}} P_{X_i}(x)H(Y_i|X_i=x) \\ &= H(Y_Q|Q) - \sum_{i=1}^{n} P_Q(i)\sum_{x\in\mathcal{X}} P_{X_i}(x)H(Y_Q|X_Q=x) \\ &= H(Y_Q|Q) - \sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{i=1}^{n} P_Q(i)P_{X_i}(x)H(Y_Q|X_Q=x) \\ &= H(Y_Q|Q) - \sum_{x\in\mathcal{X}} P_{X_Q}(x)H(Y_Q|X_Q=x) \\ &= H(Y_Q|Q) - H(Y_Q|X_Q) \\ &\leqslant H(Y_Q) - H(Y_Q|X_Q) \\ &= I(X_Q;Y_Q). \end{aligned} \tag{115}$$

よって，

$$\begin{aligned}R &\leqslant \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}I(X^n;Y^n)\\ &\leqslant \liminf_{n\to\infty} I(X_Q;Y_Q)\\ &\leqslant \liminf_{n\to\infty}\sup_{X:\mathbb{E}[c(X)]\leqslant\Gamma} I(X;Y)\\ &= \sup_{X:\mathbb{E}[c(X)]\leqslant\Gamma} I(X;Y). \end{aligned} \tag{116}$$

すなわち，R がΓ-達成可能ならば，

$$R \leqslant \sup_{X:\mathbb{E}[c(X)]\leqslant\Gamma} I(X;Y). \tag{117}$$

よって，

$$C(\Gamma) \leqslant \sup_{X:\mathbb{E}[c(X)]\leqslant\Gamma} I(X;Y). \tag{118}$$

となる．□

付録 C　定理 3 の証明

$$C_F = \sup_{\Gamma>0}\frac{C(\Gamma)}{\Gamma} \tag{119}$$

について，順定理

$$C_F \geqslant \sup_{\Gamma>0}\frac{C(\Gamma)}{\Gamma} \tag{120}$$

及び逆定理

$$C_F \leqslant \sup_{\Gamma>0}\frac{C(\Gamma)}{\Gamma} \tag{121}$$

を示すことによって証明する．これより，

$$\begin{aligned}\sup_{\Gamma>0}\frac{C(\Gamma)}{\Gamma} &= \sup_{\Gamma>0}\frac{1}{\Gamma}\sup_{X:\mathbb{E}[c(X)]\leqslant\Gamma} I(X;Y)\\ &= \sup_{\Gamma>0}\sup_{X:\mathbb{E}[c(X)]\leqslant\Gamma}\frac{I(X;Y)}{\Gamma}\\ &= \sup_{X}\sup_{\Gamma\geqslant\mathbb{E}[c(X)]}\frac{I(X;Y)}{\Gamma}\\ &= \sup_{X}\frac{I(X;Y)}{\mathbb{E}[c(X)]}\end{aligned} \tag{122}$$

となる．□

C.1 順定理

任意の $\Gamma > 0$ に対して，$\frac{C(\Gamma)}{\Gamma}$ がコストあたり達成可能であることを示す．

任意の $\gamma > 0$ を考える．すると，$C(\Gamma) - \frac{\gamma\Gamma}{2}$ は，Γ - 達成可能であるので，

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log M_n \geqslant C(\Gamma) - \frac{\gamma\Gamma}{2} \tag{123}$$

なる固定長符号の列 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する．よって，十分大きなすべての n で

$$\frac{1}{n}\log M_n \geqslant C(\Gamma) - \gamma\Gamma. \tag{124}$$

十分大きなνを考える．すると，

$$n\Gamma \leqslant \nu < n\Gamma + \Gamma \tag{125}$$

なる十分大きな n が一意に定まる．

ここで，νに対応する符号φ_νを

$$\varphi_\nu = \varphi_n \tag{126}$$

とする．この φ_ν は，

$$\begin{aligned} c(\varphi_\nu(m)) &= c(\varphi_n(m)) \\ &\leqslant n\Gamma \\ &\leqslant \nu \end{aligned} \tag{127}$$

を満たす．また，

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu}\log M_\nu &> \frac{n}{\nu}(C(\Gamma) - \gamma\Gamma) \\ &> \frac{n}{n\Gamma + \Gamma}(C(\Gamma) - \gamma\Gamma) \\ &= \frac{n}{n+1}\left(\frac{C(\Gamma)}{\Gamma} - \gamma\right) \\ &> \frac{C(\Gamma)}{\Gamma} - 2\gamma \end{aligned} \tag{128}$$

であるので，

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\nu}\log M_\nu \geqslant \frac{C(\Gamma)}{\Gamma} - 2\gamma \tag{129}$$

また，自明に

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \varepsilon_\nu &= \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n \\ &= 0 \end{aligned} \tag{130}$$

が成り立つ．

よって，$\frac{C(\Gamma)}{\Gamma} - 2\gamma$は，コストあたり達成可能であるので，

$$C_F \geqslant \frac{C(\Gamma)}{\Gamma} - 2\gamma \tag{131}$$

$\gamma > 0$ は任意であったので，

$$C_F \geqslant \frac{C(\Gamma)}{\Gamma} \tag{132}$$

よって，

$$C_F \geqslant \sup_{\Gamma > 0} \frac{C(\Gamma)}{\Gamma} \tag{133}$$

となる．□

C.2 逆定理

R がコストあたり達成可能であると仮定する．すなわち，

$$c(\varphi_\nu(m)) \leqslant \nu, \quad m = 1, 2, \ldots, M_\nu \tag{134}$$

$$\liminf_{\nu\to\infty} \frac{1}{\nu} \log M_\nu \geqslant R \tag{135}$$

$$\lim_{\nu\to\infty} \varepsilon_\nu = 0 \tag{136}$$

を同時に満たす固定長符号の列 $\{\varphi_\nu\}_{\nu>0}$が存在する．このとき，ファノの不等式より，φ_νは，

$$\log M_\nu \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon_\nu}(I(X^n; Y^n) + h(\varepsilon_\nu)) \tag{137}$$

を満たす．ただし，n は φ_ν の符号語長で，

$$X^n = \varphi_\nu(U_{M_\nu}) \tag{138}$$

Y^nは X^nを入力とする通信路の出力である．X^n は，

$$\mathbb{E}[c(X^n)] \leqslant \nu \tag{139}$$

を満たすので，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\nu}\log M_\nu &\leqslant \frac{1}{1-\varepsilon_\nu}\left(\frac{1}{\nu} I(X^n; Y^n) + \frac{1}{\nu} h(\varepsilon_\nu)\right) \\
&\leqslant \frac{1}{1-\varepsilon_\nu}\left(\frac{1}{\nu} \sup_{X^n : \mathbb{E}[c(X^n)] \leqslant \nu} I(X^n; Y^n) + \frac{1}{\nu} h(\varepsilon_\nu)\right) \\
&= \frac{1}{1-\varepsilon_\nu}\left(\frac{n}{\nu} \sup_{X^n : \mathbb{E}\left[\frac{1}{n} c(X^n)\right] \leqslant \frac{\nu}{n}} \frac{1}{n} I(X^n; Y^n) + \frac{1}{\nu} h(\varepsilon_\nu)\right)
\end{aligned} \tag{140}$$

ここで，

$$P_Q(i) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{141}$$

なる確率変数 Q を導入する．X_Qと同じ分布で互いに独立な確率変数$\tilde{X}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を定めて，

$$\tilde{X}^n \triangleq \tilde{X}_1 \tilde{X}_2 \cdots \tilde{X}_n \tag{142}$$

とする．すると，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[c(X_Q)] &= \sum_{i=1}^{n} P_Q(i) \mathbb{E}[c(X_Q)|Q = i] \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[c(X_i)] \\
&= \frac{1}{n} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} c(X_i)\right] \\
&= \frac{1}{n} \mathbb{E}[c(X^n)] \\
&\leqslant \frac{\nu}{n}
\end{aligned} \tag{143}$$

であるので，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[c(\tilde{X}^n)] &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[c(X_Q)] \\
&\leqslant \nu
\end{aligned} \tag{144}$$

となる．さらに，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} I(X^n; Y^n) &\leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I(X_i; Y_i) \\
&\leqslant I(X_Q; Y_Q)
\end{aligned} \tag{145}$$

と

$$\mathbb{E}[c(X_Q)] \leqslant \frac{\nu}{n} \tag{146}$$

が成り立つので，

$$I(X_Q; Y_Q) \leqslant \sup_{X : \mathbb{E}[c(X)] \leqslant \frac{\nu}{n}} I(X; Y) \tag{147}$$

となり，よって，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\nu}\log M_\nu &\leqslant \frac{1}{1-\varepsilon_\nu}\left(\frac{n}{\nu}\sup_{X:\mathbb{E}[c(X)]\leqslant\frac{\nu}{n}} I(X;Y)+\frac{1}{\nu}h(\varepsilon_\nu)\right)\\
&\leqslant \frac{1}{1-\varepsilon_\nu}\left(\sup_{\Gamma>0}\frac{1}{\Gamma}\sup_{X:\mathbb{E}[c(X)]\leqslant\Gamma} I(X;Y)+\frac{1}{\nu}h(\varepsilon_\nu)\right)\\
&\leqslant \frac{1}{1-\varepsilon_\nu}\left(\sup_{\Gamma>0}\frac{C(\Gamma)}{\Gamma}+\frac{1}{\nu}h(\varepsilon_\nu)\right) \qquad (148)
\end{aligned}
$$

となる．したがって，

$$
\begin{aligned}
R &\leqslant \liminf_{\nu\to\infty}\frac{1}{\nu}\log M_\nu\\
&\leqslant \sup_{\Gamma>0}\frac{C(\Gamma)}{\Gamma} \qquad (149)
\end{aligned}
$$

となり，

$$
\begin{aligned}
\sup_{\Gamma>0}\frac{C(\Gamma)}{\Gamma} &\geqslant \sup\{R|R\text{ がコストあたり達成可能 }\}\\
&= C_F \qquad (150)
\end{aligned}
$$

と得る．□