

信州大学
大学院理工学系研究科

修士論文

マスターマインドにおける最適な戦略の
数え上げに向けて

指導教員 西新 幹彦 准教授

専攻 電気電子工学専攻
学籍番号 14TM201G
氏名 荒井 航

2015 年 3 月 16 日

目次

1	はじめに	1
2	マスターマインドのルールと戦略	1
2.1	ルール	2
2.2	ヒント	2
2.3	戦略の構造	3
2.4	決定論的戦略と確率論的戦略	3
2.5	戦略の最適性	6
3	最適な戦略の数え上げ	6
4	戦略の探索時間の節約	8
4.1	等価な推測の省略	9
4.2	探索の並列化	11
4.3	エントロピーを利用した探索の優先度	12
5	まとめ	14
	謝辞	14
	参考文献	14

1 はじめに

本論文ではマスターマインドという2人でプレイする対戦型推理ゲームの最適戦略について論じる。

このゲームは古くから存在し、Bulls and Cows や Hit and Blow, そしてマスターマインドなど様々な名前では呼ばれている。1970年代前半にイギリスのインヴィクタ社がマスターマインドという商品名で発売し、その後アメリカでハスブロ社から発売されるなど、世界中で発売された [1]。また、ゲーム番組としても楽しまれてきた。1946年からはアメリカで Twenty Questions [2], 日本ではそれをモデルにした二十の扉というゲーム番組が放送されていた。ただし、これらは単に推理ゲームというだけで、マスターマインドとの類似点は解答者がヒントによって対象を絞り込んでいくという点である。マスターマインドとほぼ同じルールのゲーム番組としては、2011年から2014年までフジテレビで放送されていた NumerOn がある。

ゲームは、出題者と解答者と呼ばれる2人のプレイヤーによって行われる。まず準備として、出題者が秘密のコードというものを決め、解答者に知られないようにする。解答者は秘密のコードを推測して出題者に提示する。出題者は、解答者の推測が秘密のコードにどれだけ近いかわかるヒントを与える。上の一組の問答を1手とし、その手続きを解答者が秘密のコードを当てるまで続ける。解答者にとってコードを当てるまでの手数は小さい方がよい。

解答者の振る舞いをあらかじめ記述したものを本論文では戦略と呼ぶ。戦略を決めると、秘密のコードごとにそれを当てるまでの手数が決まる。戦略の手数に関して様々な研究が行われてきている。1976年に D. E. Knuth [1] は、最悪手数が5手の戦略の一つを示している。そして、最悪手数は5手より短くならないことも示している。1982年に E. Neuwirth [3] は、出題者が秘密のコードを等確率で選ぶと仮定したもとで、戦略の平均手数の最小値を求める計算方法を提案している。1993年に K. Koyama and T. W. Lai [4] は、Neuwirth が提案した方法に高速化の工夫をすることによって平均手数の最小値を実際に求め、それを達成する戦略の一つを示している。

本研究では、平均手数が最小であるような戦略を全て数え上げる方法を提案する。本提案は Koyama らの高速化の工夫を取り入れることができる。さらに本論文では、手続きの順番を工夫することによって最小値を早く見つけることが可能なことを示唆する。

2 マスターマインドのルールと戦略

この章ではまずマスターマインドのルールを説明する。次に、出題者が解答者に返すヒントについて説明する。ヒントは、戦略の重要な構造を決めている。以上のもとで戦略の最適性を定義し、以降の議論に備える。

2.1 ルール

マスターマインドのルールを説明する。

プレイヤーは出題者と解答者に分かれ以下の手順に従って対戦する。ボードゲームでは6種類の色のピンを使うが、本論文では色の種類を1から6までの数字で表す。色の重複を許してピンを4つ並べたものをコードと呼ぶ。

1. 出題者は解答者に分からないようにコードを一つ選ぶ。出題者が選んだコードを秘密のコードと呼ぶ。
2. 解答者は秘密のコードを推測して出題者に提示する。解答者が推測したコードを単に推測と呼ぶこともある。
3. 出題者は解答者の推測がどの程度秘密のコードに近いかをヒントというもので示す。ヒントの厳密な定義は次の節で与えるが、ボードゲームの言葉で簡単に言うとヒントは次のように決められる。ヒントは赤ピンと白ピンの数によって示される。赤ピンの数は色も位置も合っているピンの数で、白ピンの数は色だけが合っているピンの数である。
4. 示されたヒントが赤ピン4本のとき、つまり推測が秘密のコードと一致したとき、ゲームは終了する。このことを秘密のコードを正答するということとする。正答していなければ手順2に戻って解答者は次の推測を作る。

2から3までの手順を1手と数え、この手順を繰り返した回数を手数と呼ぶこととする。ゲームに勝つために、解答者は秘密のコードを正答するまでの手数を小さくしたいと考える。なぜなら、勝敗を決めるために有利になるからである。実際に勝敗をつける際は、プレイヤー同士で出題者と解答者の役割を交代してゲームを行い、秘密のコードを正答するまでの手数の小さいプレイヤーを勝ちとする。ただし、本研究では勝敗については直接扱わない。

2.2 ヒント

秘密のコード $c_1c_2c_3c_4$ と推測 $q_1q_2q_3q_4$ に対して、両者の近さを表すヒントを $h(c_1c_2c_3c_4, q_1q_2q_3q_4)$ と書く。秘密のコードと推測は入れ替えても同じヒントが得られる。ヒントは2つの整数 r, w を用いて (r, w) という形式で表される。ゲームをプレイするときは r, w はそれぞれ赤ピンと白ピンの数で示される。この r と w は次のように決まる。

1. $c_j = q_j$ を満たす j の数を r とする。

2. $c_j = i$ を満たす j の数を m_i , $q_j = i$ を満たす j の数を n_i とし, w を

$$w = \left(\sum_{i=1}^6 \min(m_i, n_i) \right) - r$$

と定義する.

例えば, $h(1123, 2413) = h(2413, 1123) = (1, 2)$ である. 実際にヒントとしてとり得る値は

$$(r, w) = (0, 4), (0, 3), (0, 2), (0, 1), (0, 0), (1, 3), (1, 2), (1, 1), (1, 0), (2, 2), (2, 1), (2, 0), (3, 0), (4, 0)$$

の 14 通りである. 以降, これら 14 個のヒントからなる集合を $\mathcal{A}$ と表す.

2.3 戦略の構造

解答者の振る舞いは戦略としてあらかじめ記述できる.

全てのコードからなる集合を $\mathcal{C}_0$ と表す. $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_0$ に対し, $\mathcal{C}$ から選ばれた任意の秘密のコードを正答まで導く戦略を $\mathcal{C}$ に対する戦略と呼ぶ. 解答者としては $\mathcal{C}_0$ に対する戦略を考えれば十分だが, 我々は, 3 章での議論のために, 部分集合 $\mathcal{C}$ に対する戦略を定義しておく必要がある. $\mathcal{C}$ に対する戦略は木構造で表すことができる. 図 1 と図 2 は

$$\mathcal{C} = \{2334, 2343, 2345, 2346, 2354, 2364, 2444, 2644\} \quad (1)$$

に対する戦略の例である. 戦略は解答者の振る舞いを次のように規定する. 解答者は最初にルートノードを見る. ノードには解答者が提示する推測が一つ割り当てられている. ノードから出る枝には, ヒントがラベル付けされていて, 解答者は出題者から返ってくるヒントに対応した子ノードに移る. ヒント $(4, 0)$ に対応した子ノードに移ることによって秘密のコードを正答したことになる. たとえば出題者が式 (1) の $\mathcal{C}$ の中から秘密のコードとして 2345 を選んだときに, 解答者が図 1 の戦略を使用すると次のような手順で正答に至る. 解答者は, 最初にルートノードにある推測 1335 を出題者に提示する. 出題者はヒント $h(2345, 1335) = (2, 0)$ を返してくる. すると解答者は $(2, 0)$ に対応した子ノードを参照し, 次の推測 2334 を提示する. ヒントは $(2, 1)$ が返ってくるので, 解答者は次に推測 2345 を提示する. 出題者からヒント $(4, 0)$ が返され, 解答者は正答したことが分かる. 同様にして, 図 1 の戦略を使用することにより, 式 (1) の $\mathcal{C}$ の中のどれが選ばれても正答できることを実際に確認することができる.

2.4 決定論的戦略と確率論的戦略

本研究で考える戦略では, ヒントに対して次の推測が常に一つ決まっている. このような構造の戦略を決定論的戦略という. 図 1 と図 2 は決定論的戦略である. それ以外の戦略の構造

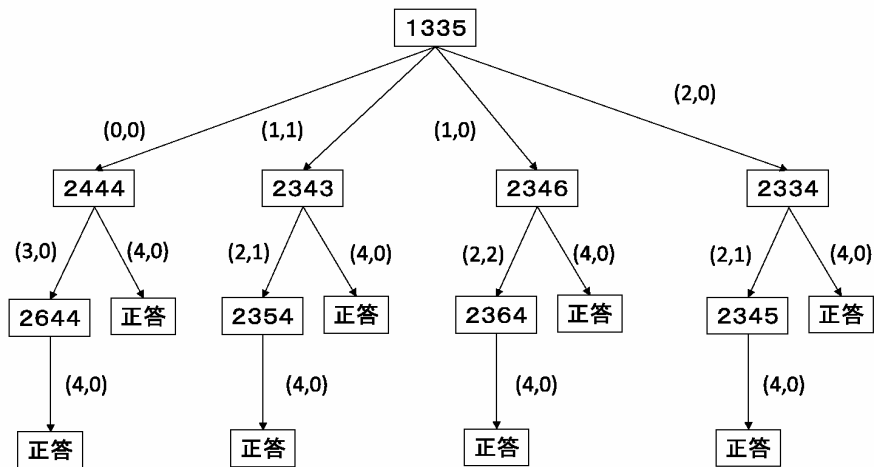


図 1 C に対する戦略の例 1

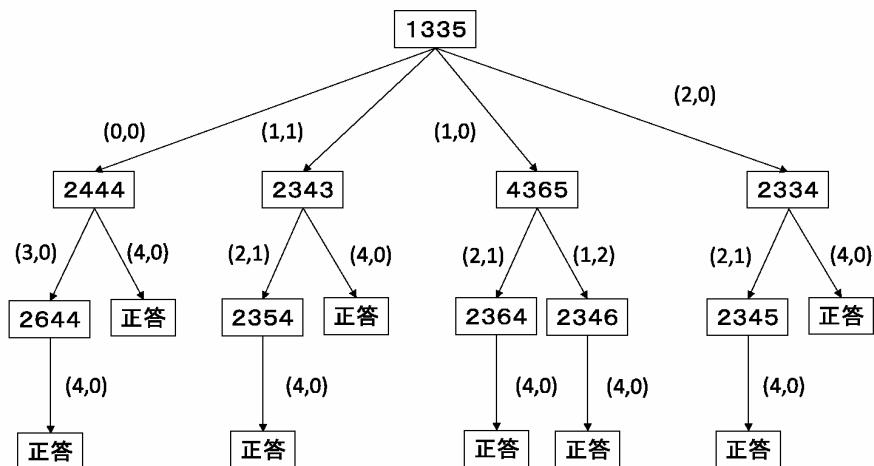


図 2 C に対する戦略の例 2

として、ヒントに対して次の推測を複数用意しておき、解答者はその中から一つを確率的に選ぶような戦略を考えることができる。このような構造の戦略を確率論的戦略という。

図 3 は式 (1) の C に対する確率論的戦略の例である。最初の推測 1335 に対して返ってくるヒント (1, 0) に対する推測として 2346 と 4365 が用意されて、それぞれ確率 0.7 と 0.3 が割り振られている。もし、出題者が秘密のコードとして 2364 を選んでいたら、解答者は次のよう

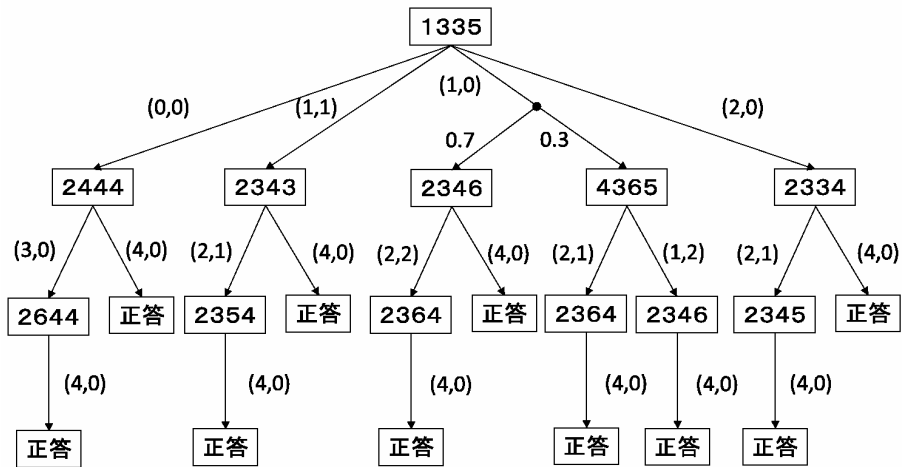


図 3 確率論的戦略の例

に振る舞う。解答者は最初にルートノードをみて推測 1335 を提示する。ヒントは (1, 0) が出題者から返される。ヒント (1, 0) に対応する枝をたどると途中で分岐しているの、解答者は割り振られている確率にしたがってどちらかを選ぶ。確率 0.7 の枝を選んだ場合、次の推測として 2346 を提示し、ヒント (2, 2) が返されるので、最後に 2364 を提示してゲームは終了となる。確率 0.3 の枝を選んだ場合も同様にして秘密のコードを正答することができる。

確率論的戦略は、決定論的戦略を複数用意してそれらに確率を割り振ることによって等価に表現することができる。実際、解答者が図 3 の確率 0.7 の枝を選んだ場合の戦略は図 1 のように表せ、確率 0.3 の枝を選んだ場合の戦略は図 2 のように表せる。したがって、図 1 と図 2 の決定論的戦略にそれぞれ確率 0.7, 0.3 を割り振ることによって図 3 の確率論的戦略を表現できる。同様にして、どんな確率論的戦略も複数の決定論的戦略に確率を割り振ることによって表現することができる。本研究では決定論的戦略のみを考察する。

2.5 戦略の最適性

出題者は $\mathcal{C}_0$ の中から秘密のコードを等確率で選ぶと仮定する．解答者が $\mathcal{C}_0$ に対する戦略を一つ選ぶと秘密のコードを正答するまでの手順の期待値が計算できる．この期待値を $\mathcal{C}_0$ に対する戦略の平均手数という．平均手数が最小となる戦略のことを $\mathcal{C}_0$ に対する最適な戦略と呼ぶ．以上のことは、 $\mathcal{C}_0$ に対してだけでなく、部分集合 $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_0$ に対しても同様に定義される．実際 3 章では、 $\mathcal{C}_0$ に対する最適な戦略を見つける問題は $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_0$ に対する最適な戦略を見つける問題に分割される．

本研究では最適な戦略をすべて数え上げる方法を議論する．最適な戦略の平均手数は Koyama らが求めており、最適な戦略が一つ文献 [4] に示されている．一方、与えられた戦略に対し、各推測の数字に同じ置換を施しても平均手数は変わらない．そのため、一つの戦略から異なる複数の戦略を容易に作成できる．しかし、置換だけではすべての最適な戦略は得られない．それに対し、3 章で提案するアルゴリズムは本質的にすべての最適な戦略の列挙を含んでいる．

3 最適な戦略の数え上げ

本研究の目標は $\mathcal{C}_0$ に対する最適な戦略をすべて数え上げることである．この問題は $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_0$ に対する最適な戦略の数え上げを行う問題に分割され、再帰的に解かれる．

次のような入出力をもつアルゴリズムを考える．

- 入力: コードの集合 $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_0$ ，推測としての使用を禁止するコードの集合 $\mathcal{G}$
- 出力: $\mathcal{C}$ に対する戦略のうち、 $\mathcal{G}$ 中のコードを推測として使わない戦略の平均手数の最小値，その最小値を達成する戦略の数

アルゴリズムの出力である最小値と戦略の数をそれぞれ $E(\mathcal{C}, \mathcal{G})$ ， $N(\mathcal{C}, \mathcal{G})$ と表す． $E(\mathcal{C}_0, \emptyset)$ と $N(\mathcal{C}_0, \emptyset)$ の値を求めれば、本研究の目標を達成することができる．ここで、準備として、 $\mathcal{C}$ に属するコードのうち推測 q を提示してヒント $a \in \mathcal{A}$ を得るようなコード全体

$$\mathcal{C}(q, a) \triangleq \{c \in \mathcal{C} | h(c, q) = a\} \quad (2)$$

を定義する．これを用いると、コードの集合 $\mathcal{C}$ は推測 q によって

$$\mathcal{C} = \bigcup_{a \in \mathcal{A}} \mathcal{C}(q, a) \quad (3)$$

のように分割されることに注意しておく．図 4 は $\mathcal{C}_0$ を推測 1122 によって分割する様子を表している．

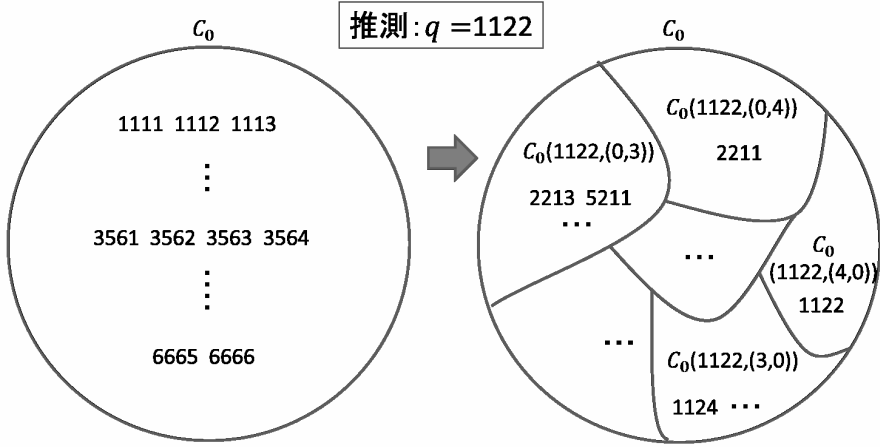


図4 C_0 の分割例

以上の準備のもと、 $E(C, \mathcal{G})$ と $N(C, \mathcal{G})$ の値を求める問題は次の再帰的な呼び出しを含む手続きで解くことができる。

$$E(C, \mathcal{G}) \triangleq 1 + \min_{q \in C_0 \setminus \mathcal{G}} \sum_{a \in \mathcal{A}: C(q, a) \neq \emptyset} \frac{|C(q, a)|}{|C|} E(C(q, a), \mathcal{G} \cup \{q\}) \quad (4)$$

$$N(C, \mathcal{G}) \triangleq \sum_{q^*} \prod_{a \in \mathcal{A}: C(q^*, a) \neq \emptyset} N(C(q^*, a), \mathcal{G} \cup \{q^*\}) \quad (5)$$

式 (4) の右辺の 1 は推測 q の提示に対応する 1 手を表している。 $C(q, a)$ に対する最適な戦略の平均手数を求める際に、 $\mathcal{G}$ に q を追加している理由は、 q を推測として用いて $C(q, a)$ を分割しても、実質的に $C(q, a)$ は分割されないので、再帰が無限に続くのを避けるためである。 C を q で分割し、その中から $C(q, a)$ が選ばれる確率 $|C(q, a)|/|C|$ で期待値を計算する。推測 q で最小化することで、 C に対する平均手数の最小値が求まる。式 (5) の総和の q^* は平均手数が最小となる時の推測である。戦略の数 $N(C(q^*, a), \mathcal{G} \cup \{q^*\})$ がヒント a ごとに求まるのでそれらを掛け合わせ、それが推測 q^* ごとに存在するのでそれらを足し合わせることで C に対する戦略の数が求められる。

ただし、次の 3 つ場合は再帰的な呼び出しをせずに $E(C, \mathcal{G})$ と $N(C, \mathcal{G})$ を求めることがで

きる.

1. $|\mathcal{C}| = 1$ かつ $a = (4, 0)$ のとき, ゲームは終了となるので, それ以上手数はかからず, 戦略も不要である. したがって,

$$E(\mathcal{C}, \mathcal{G}) \triangleq 0$$

$$N(\mathcal{C}, \mathcal{G}) \triangleq 1$$

と定義する.

2. $|\mathcal{C}| = 1$ かつ $a \neq (4, 0)$ のとき, $\mathcal{C}$ に属する唯一のコードを推測として選べば, 正答してゲーム終了となる. したがって,

$$E(\mathcal{C}, \mathcal{G}) \triangleq 1$$

$$N(\mathcal{C}, \mathcal{G}) \triangleq 1$$

と定義する.

3. $|\mathcal{C}| = 2$ のとき, 解答者は $\mathcal{C}$ に残った 2 つのコードのうちどちらか一方を次の推測として選べば, 確率 0.5 で正答することができ, そのときの平均手数は 1 である. 正答することができなかった場合, 残ったもう一方のコードを次の推測として提示することで正答することができ, その時の平均手数は 2 である. この戦略は最適で 2 通りあるので,

$$E(\mathcal{C}, \mathcal{G}) \triangleq 1.5$$

$$N(\mathcal{C}, \mathcal{G}) \triangleq 2$$

と定義する.

以上の手続きで $E(\mathcal{C}, \mathcal{G})$, $N(\mathcal{C}, \mathcal{G})$ の値を求めることができる.

この章の初めのほうで述べたように, 最適な戦略を全て数え上げるには, $\mathcal{C}_0$ に対する戦略の平均手数の最小値 $E(\mathcal{C}_0, \emptyset)$ を求め, その最小値を達成する戦略の数 $N(\mathcal{C}_0, \emptyset)$ を求めればよい. このアルゴリズムは Neuwirth[3] の拡張になっている. $N(\mathcal{C}, \mathcal{G})$ が本研究で拡張した部分であり, これを除けば Neuwirth[3] のアルゴリズムと同じになる.

4 戦略の探索時間の節約

3 章で最適な戦略を全て数え上げる方法を示したが, 素直にこの探索を行うと非常に時間がかかる. 実際プログラムを実行したところ, Neuwirth[3] のアルゴリズムでさえ現実的な時間では終了しなかった. そこで, 探索時間を節約する方法として, 特定の範囲の探索を省略する方法や, 探索範囲を分割して並列で探索する方法がある. さらに本研究では, エントロピーの概念を導入することにより, 分割した探索範囲に優先順位をつけ, 早い段階で最適な戦略が全て出揃いやすくなるための方策を考えた.

4.1 等価な推測の省略

本質的には最適な戦略を探索するためには全ての戦略を調べる必要がある。しかし、等価という概念を導入することにより探索する範囲を減らすことができ、探索時間の節約につなげることができる。このアイデアは Koyama ら [4] による。

等価という概念を導入するために、色への数字の当てはめ方を変える置換とピンの位置を変える置換をあわせて単に置換と呼ぶこととする。置換の記述方法としては例えば、色の当てはめ方の置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ と、ピンの位置の置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ を合わせた置換 t を

$$t = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right) \quad (6)$$

などと表す。コード 1112 にこの置換 t を施すと $t(1112) = 3633$ となる。

一方、3 章で導入した $\mathcal{G}$ はコードを絞り込むのに使われた推測であることにちなみ、この $\mathcal{G}$ を文脈とよぶ。文脈 $\mathcal{G}$ のもとで二つのコード c, d が等価とは、ある置換 t が存在して、すべての $q \in \mathcal{G}$ に対して $t(q) = q$ となり、かつ $t(c) = d$ となることである。

次の定理は、二つの推測が等価ならば一方の推測から始まる戦略は調べなくてよいことを意味している。

定理 二つのコード c, d が文脈 $\mathcal{G}$ のもとで等価とする。このとき、任意の $q \in \mathcal{G}$ に対して適当な $a_q \in \mathcal{A}$ を用いて

$$\mathcal{C} = \bigcap_{q \in \mathcal{G}} \mathcal{C}_0(q, a_q) \quad (7)$$

と表される $\mathcal{C}$ に対して

$$E(\mathcal{C}(c, a), \mathcal{G} \cup \{c\}) = E(\mathcal{C}(d, a), \mathcal{G} \cup \{d\}) \quad (8)$$

$$N(\mathcal{C}(c, a), \mathcal{G} \cup \{c\}) = N(\mathcal{C}(d, a), \mathcal{G} \cup \{d\}) \quad (9)$$

が成り立つ。

(証明) 任意の $q \in \mathcal{G}$ に対して $t(q) = q$ となり、かつ $t(c) = d$ となる置換 t を考える。す

ると

$$\begin{aligned}
t(\mathcal{C}_0(q, a_q)) &= \bigcup_{x \in \mathcal{C}_0(q, a_q)} \{t(x)\} \\
&= \bigcup_{x \in \mathcal{C}_0: h(q, x) = a_q} \{t(x)\} \\
&= \bigcup_{x \in \mathcal{C}_0: h(t(q), t(x)) = a_q} \{t(x)\} \\
&= \bigcup_{y \in \mathcal{C}_0: h(t(q), y) = a_q} \{y\} \\
&= \bigcup_{y \in \mathcal{C}_0(t(q), a_q)} \{y\} \\
&= \mathcal{C}_0(t(q), a_q) \\
&= \mathcal{C}_0(q, a_q)
\end{aligned} \tag{10}$$

となることより

$$\begin{aligned}
t(\mathcal{C}) &= t\left(\bigcap_{q \in \mathcal{G}} \mathcal{C}_0(q, a_q)\right) \\
&= \bigcap_{q \in \mathcal{G}} t(\mathcal{C}_0(q, a_q)) \\
&= \bigcap_{q \in \mathcal{G}} \mathcal{C}_0(q, a_q) \\
&= \mathcal{C}
\end{aligned} \tag{11}$$

である．さらに，任意の $a \in \mathcal{A}$ に対し，

$$\begin{aligned}
&x \in \mathcal{C}(c, a) \\
&\Leftrightarrow x \in \mathcal{C} : h(c, x) = a \\
&\Leftrightarrow t(x) \in t(\mathcal{C}) : h(t(c), t(x)) = a \\
&\Leftrightarrow t(x) \in \mathcal{C} : h(d, t(x)) = a \\
&\Leftrightarrow t(x) \in \mathcal{C}(d, a)
\end{aligned} \tag{12}$$

となるので

$$\begin{aligned}
t(\mathcal{C}(c, a)) &= \bigcup_{x \in \mathcal{C}(c, a)} \{t(x)\} \\
&= \bigcup_{t(x) \in \mathcal{C}(d, a)} \{t(x)\} \\
&= \bigcup_{y \in \mathcal{C}(d, a)} \{y\} \\
&= \mathcal{C}(d, a)
\end{aligned} \tag{13}$$

となる．ゆえに，

$$\begin{aligned}
E(\mathcal{C}(c, a), \mathcal{G} \cup \{c\}) &= E(t(\mathcal{C}(c, a)), t(\mathcal{G} \cup \{c\})) \\
&= E(\mathcal{C}(d, a), \mathcal{G} \cup \{d\}) \\
N(\mathcal{C}(c, a), \mathcal{G} \cup \{c\}) &= N(t(\mathcal{C}(c, a)), t(\mathcal{G} \cup \{c\})) \\
&= N(\mathcal{C}(d, a), \mathcal{G} \cup \{d\})
\end{aligned}$$

となり定理が証明された．□

この定理より，式 (4) の $\min$ の範囲 $q \in \mathcal{C}_0 \setminus \mathcal{G}$ は次のように狭めることができる．文脈 $\mathcal{G}$ のもとでの等価性にしがたって $\mathcal{C}_0 \setminus \mathcal{G}$ を同値類分解し，各同値類から代表元を 1 つずつ選び出して集めた集合を $\mathcal{S}$ とおく．すると，式 (4) は

$$E(\mathcal{C}, \mathcal{G}) \triangleq 1 + \min_{q \in \mathcal{S}} \sum_{a \in \mathcal{A}: \mathcal{C}(q, a) \neq \emptyset} \frac{|\mathcal{C}(q, a)|}{|\mathcal{C}|} E(\mathcal{C}(q, a), \mathcal{G} \cup \{q\}) \tag{14}$$

と書き直すことができる．また，式 (5) の総和の q^* についても，同値類の代表元であるようなもの ($q^* \in \mathcal{S}$) に限り， q^* の属する同値類のサイズ $n(q^*)$ を用いて

$$N(\mathcal{C}, \mathcal{G}) \triangleq \sum_{q^*} n(q^*) \prod_{a \in \mathcal{A}: \mathcal{C}(q^*, a) \neq \emptyset} N(\mathcal{C}(q^*, a), \mathcal{G} \cup \{q^*\}) \tag{15}$$

と書き直せる．上記の書き直しにより探索範囲が狭まるので，探索時間を短縮できる．

4.2 探索の並列化

メモリの使用量の観点からすれば，探索は深さ優先で行うのが良い．つまり，まず $\mathcal{C}_0$ を推測 q によって分割し，各部分集合 $\mathcal{C}_0(q, a), a \in \mathcal{A}$ に対し最適な戦略を次々に見つけに行くのがよい．しかし，異なる推測による異なる分割は互いにその後の探索に影響しないので，各分割に対して並列に探索することができる．これにより探索時間を短縮することができる．

例えば、 C_0 を分割する場合を考える．4.1 節で述べた方法に従って、 C_0 を同値類分解すると 5 個の同値類に分解される．各同値類の代表元として、1111, 1112, 1122, 1123, 1234 を選び出すことができる．つまり、 C_0 をこの 5 個の推測によって 5 通りに分割でき、各分割に対して並列に探索を進めることができる．これで十分に時間短縮できればよいが、サイズが大きいの、それでも時間がかかりそうな部分については、さらに分割して並列化することができる．

4.3 エントロピーを利用した探索の優先度

秘密のコードが $\mathcal{C}$ に属していると分かっているもとで、解答者が推測 q を提示し、出題者がヒント a を返したとする．すると、秘密のコードは $\mathcal{C}(q, a)$ のなかのどれかに絞り込まれる．このとき、どの $c \in \mathcal{C}$ に対しても $h(c, q) = a$ ならば実質的に絞り込まれておらず、推測 q を提示する意味はない．情報理論的に理想なのは、毎回の推測に対してすべてのヒントが等確率で返ってくることである．このことより、推測 q の良し悪しの目安として、 q を提示したときのヒントの分布のエントロピーが利用できると思われる．

秘密のコードが $\mathcal{C}$ に属しているもとで推測 q を提示したときのヒントのエントロピー $H(\mathcal{C}, q)$ は

$$H(\mathcal{C}, q) = - \sum_{a \in \mathcal{A}} \frac{|\mathcal{C}(q, a)|}{|\mathcal{C}|} \log \frac{|\mathcal{C}(q, a)|}{|\mathcal{C}|} \quad (16)$$

と表される [2]．エントロピー $H(\mathcal{C}, q)$ が大きくなるような推測 q を提示することで、平均手数が小さくなる傾向があると考えられる．したがって、エントロピーが大きくなるような推測から始まる戦略を優先的に探索することで、早い段階で最適な戦略がすべて見つかると思われる．

この方法の有効性をみるために、エントロピーと平均手数の関係をいくつかの場合に対して調べた．まず、秘密のコードが $\mathcal{C} = C_0(1123, (3, 0))$ に属していると仮定し、同値類の代表元となる各推測 $q \in \mathcal{S}$ に対する $H(\mathcal{C}, q)$ の値と q で始まる戦略の平均手数を求めた．両者の相関を図 5 に示す．さらに同様に、 $C_0(1123(2, 2))$, $C_0(1234(2, 2))$ および $C_0(1234(0, 0))$ における相関をそれぞれ図 6, 図 7, 図 8 に示す．図の横軸と縦軸はそれぞれエントロピーと平均手数である．どの図を見ても負の相関が見られ、平均手数が最小となるのはエントロピーが最大の時になっている．しかし、次の例で見られるように、必ずしもそうでないことがわかる．表 1 は $C_0(1123, (0, 3))$ に対するいくつかの戦略の特性を調べたものである．この時、推測 2345 から始まる戦略が最適であることはすでに知られている [4]．ところが表 1 のように、これより大きいエントロピーをもつ推測が存在している．しかもこれらの平均手数は最小ではない．

以上のことから、エントロピーと平均手数の間に明確な関係は見い出せないものの、負の相

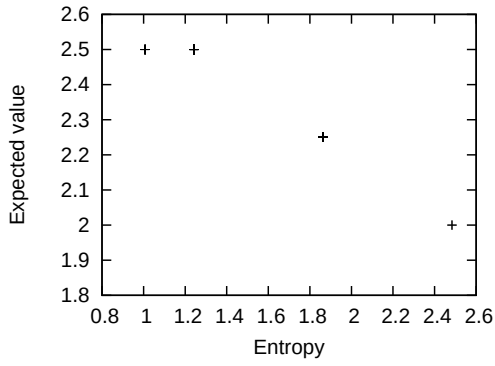


図 5 $C_0(1123, (3, 0))$

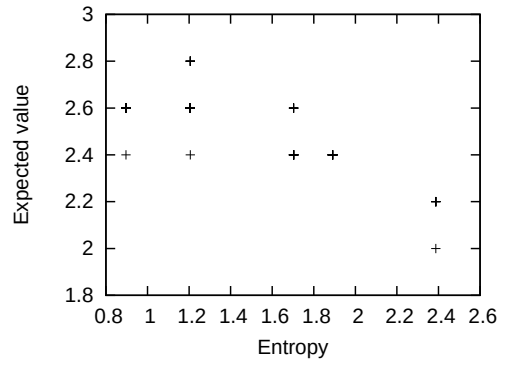


図 6 $C_0(1123, (2, 2))$

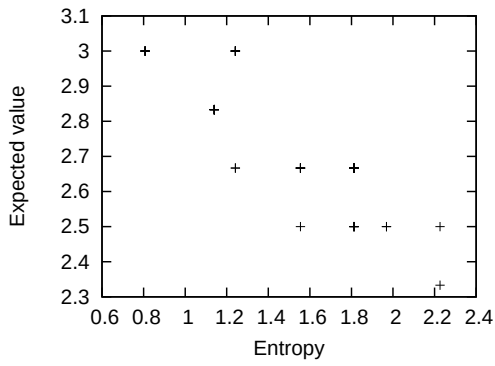


図 7 $C_0(1234, (2, 2))$

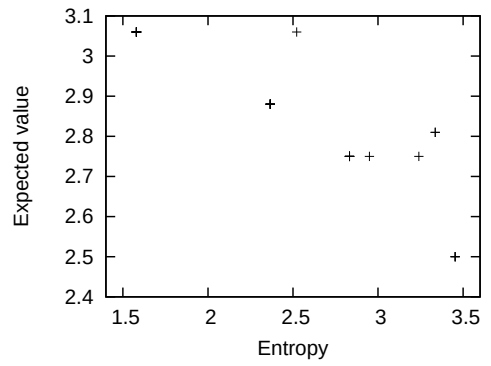


図 8 $C_0(1234, (0, 0))$

表 1 $C_0(1123, (0, 3))$ に対するエントロピーと平均手数

推測 q	エントロピー	平均手数
2345	3.67	2.89
2431	3.85	2.95
2314	3.79	2.93
2334	3.69	2.91

関があることは予想される。したがって、探索範囲を狭めることはできないが、エントロピーが大きくなるような推測を優先して戦略を探索することによって、最適な戦略が早い段階で見つかると考えられる。探索範囲を狭めるためには両者の明確な関係を見出す必要がある。また、一般の戦略に対する平均手数の下界も知られている [3] ので、この結果も探索範囲を狭めるために利用できる可能性がある。

5 まとめ

本論文では、最適な戦略を数え上げるアルゴリズムを提案した。数え上げは平均手数の計算の拡張になっており、提案法にかかる時間のオーダーは平均手数を計算する時間と同じである。したがって、素直に提案法を用いて探索を行うと、非常に時間がかかる。探索時間の短縮のためには、平均手数の計算に対する従来手法が適用できる。すなわち、推測の等価性によって特定の範囲の探索を省略する方法と、探索範囲を分割して並列で探索する方法である。本論文ではさらに、エントロピーに基づいて探索範囲に優先順位をつける方法を提案した。この方法を用いると、最適な戦略が早い段階で見つかると思われる。ただし、探索時間の短縮につながるかどうかは今後の課題である。いずれにせよ、本論文で述べた方法に加え、実装上の工夫やさらなる高速化の手法などを取り入れ、最終的な目標である最適な戦略の数え上げを実現することが第一義的な今後の課題である。

通常のルールでは、解答者が戦略を選択すると出題者が設定したコードにより正答するまでの手数が増える。ここでルールを変えて、いくつかの推測をまとめて一度に提示し、返ってきたヒントから秘密のコードを当てるゲームを考えることもできる。このようなゲームに対して、秘密のコードを確実に正答できることを保証しつつ、推測の個数をどこまで減らせるかという問題も興味深い。

謝辞

本研究に当たり、細かく指導して下さった指導教員の西新幹彦准教授に感謝の意を表する。

参考文献

- [1] D. E. Knuth, “The Computer as Master Mind,” J. Recreational Mathematics, Vol. 9(1), pp.1–6, 1976–77.
- [2] David J. C. MacKay, Information Theory, Inference, and Learning Algorithms, Cambridge University Press, pp.70–72, 2006.
- [3] E. Neuwirth, “Some strategy for Mastermind,” Zeitschrift für Operations Research, S.

B257–B278, 1982.

- [4] K. Koyama and T. W. Lai, “An Optimal Master Mind Strategy,” *Journal of Recreational Mathematics*, pp.251–256, 1993.