

信州大学工学部

学士論文

歪みが確率 1 で許容値以下の
有歪み可変長符号化順定理

指導教員 西新 幹彦 准教授

学科 電気電子工学科
学籍番号 11T2041D
氏名 佐々木 智央

2015 年 3 月 12 日

目次

1	はじめに	1
2	固定長符号化におけるレート・歪み理論	1
2.1	情報源	1
2.2	符号化	1
2.3	平均歪み測度	2
2.4	許容歪み Δ で達成可能なレート	2
3	可変長符号化におけるレート・歪み理論	2
3.1	歪みが確率 1 で許容値以下の有歪み可変長符号化順定理	2
3.2	レート $R(\Delta)$ の極限	5
4	まとめ	8
	謝辞	8
	参考文献	8
	付録 A 付録	9

1 はじめに

通信する際、元の情報を符号化し通信時間及び通信容量を抑えることで通信効率の向上を図っているが、通信時間と通信精度との間にはトレードオフの関係が存在する。また音声や画像等の情報通信において歪みなしで情報を伝送することはほとんど不可能である。しかし、元の情報と符号化・復号化した情報との間に一定のひずみを許容することにより、情報の圧縮率を高めることができ、通信効率を向上させることができる。

本論文では、情報源系列と復元系列との間の歪みが許容歪み Δ を超える確率が零に収束することを条件として固定長符号によるレート達成可能を定義する。固定長符号化のレート歪み関数を $R(\Delta)$ と表す。本研究では、情報源系列と復元系列の間の歪みが許容歪み Δ を超えない条件の下でレート $R(\Delta)$ を達成するような可変長符号が存在することを示す。また、符号化レートがちょうど $R(\Delta)$ となるような可変長符号の存在も示す。

2 固定長符号化におけるレート・歪み理論

2.1 情報源

情報源 $\mathbf{X}$ とは情報源アルファベットに値をとる確率変数列 $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ である。本研究では有限アルファベット集合 $\mathcal{X}$ を持つ定常無記憶情報源

$$\mathbf{X}^n = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

に対するレート及び歪みについて考察を行う。

2.2 符号化

情報源符号化は以下のように行う。 $\mathbf{X}$ に対する符号を

$$\mathcal{M}_n = \{1, 2, \dots, M_n\}$$

として符号化を $f_n : \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{M}_n$ と定め、 $f_n(\mathbf{x})$ を $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n$ の符号語と呼ぶ。さらに復元アルファベット集合 $\mathcal{Y}^n$ を定め、復号化を $\varphi_n : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{Y}^n$ と定める。ここで符号化レートは $r_n \triangleq \frac{1}{n} \log |\mathcal{M}_n|$ と定める。

2.3 平均歪み測度

$d(x, y) (x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y})$ を x と y の歪みと呼び, $\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{X}^n$ と $\mathbf{y} = y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathcal{Y}^n$ の間の歪みを $d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ とする. 本研究では平均歪み測度を

$$d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \triangleq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d(x_i, y_i)$$

と定義する.

2.4 許容歪み Δ で達成可能なレート

情報源 $\mathbf{X}$ に対してレート R が許容歪み Δ で達成可能とは

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\{d_n(X^n, \varphi_n(f_n(X^n))) > \Delta\} = 0$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{M}_n| \leq R$$

が成り立つような固定長符号の列 $\{(f_n, \varphi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在することである. ただし, $\mathcal{M}_n \triangleq f_n(\mathcal{X}^n)$ である. 許容歪み Δ で達成可能なレートの下限を

$$R(\Delta) \triangleq \inf\{R \mid \text{レート } R \text{ は許容歪み } \Delta \text{ で達成可能}\}$$

と表し, レート・歪み関数と呼ぶ.

定理 1 レート・歪み関数は

$$R(\Delta) = \min_{Y: \mathbb{E}[d(X, Y)] \leq \Delta} I(X, Y)$$

で与えられる.

3 可変長符号化におけるレート・歪み理論

3.1 歪みが確率 1 で許容値以下の有歪み可変長符号化順定理

次の定理に証明を与えたことが本研究の主な成果である.

定理 2 情報源 $\mathbf{X}$ と歪み $\Delta \geq 0$ に対し

$$\Pr\{d_n(X^n, \varphi_n(f_n(X^n))) \leq \Delta\} = 1, (n = 1, 2, \dots) \quad (1)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}[|f_n(X^n)|] \leq R(\Delta) \quad (2)$$

を満たす可変長符号の列 $\{(f_n, \varphi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する. 固定長符号化を用いた達成可能の定義は n を無限大にすることで歪みが許容内に収まることを意味していたが, この定理では n を無限大にすることなく歪みを許容内に収めている.

(証明) $R(\Delta)$ の定義より, 任意の $\delta > 0$ に対して十分大きな全ての n において

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\{d_n(X^n, \hat{\varphi}_n(\hat{f}_n(X^n))) > \Delta\} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{1}{n} \log |\mathcal{M}_n| < R(\Delta) + \delta \quad (4)$$

となるような固定長符号の列 $\{(\hat{f}_n, \hat{\varphi}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する. ただし $\mathcal{M}_n \triangleq \hat{f}_n(\mathcal{X}^n)$ である.

各 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n$ に対し,

$$d_n(\mathbf{x}, \hat{\varphi}_n(\hat{f}_n(\mathbf{x}))) \leq \Delta$$

を満たすものと満たさないものがあることに注意し

$$\mathcal{S}_n \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n | d_n(\mathbf{x}, \hat{\varphi}_n(\hat{f}_n(\mathbf{x}))) \leq \Delta\} \quad (5)$$

を定める. ここで各 n に対して, 語頭符号 (prefix-free code) (f_n, φ_n) を次のように定める.

まず符号器の符号語長を

$$|f_n(\mathbf{x})| \triangleq \begin{cases} \log(|\mathcal{M}_n| + 1), & (\mathbf{x} \in \mathcal{S}_n) \\ \log(|\mathcal{M}_n| + 1) + \log |\mathcal{S}_n^c|, & (\mathbf{x} \notin \mathcal{S}_n) \end{cases}$$

とする. ただし符号器 f_n は

$$\hat{f}_n(\mathbf{x}) = \hat{f}_n(\mathbf{x}')$$

となるような $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{S}_n$ に対して同じ符号語を出力すると仮定する. 符号語の集合 $\mathcal{C}_n \triangleq f_n(\mathcal{X}^n)$ に対しクラフト和の計算を行うと

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{z} \in \mathcal{C}_n} e^{-|\mathbf{z}|} &= \sum_{\mathbf{z} \in f_n(\mathcal{S}_n)} e^{-|\mathbf{z}|} + \sum_{\mathbf{z} \notin f_n(\mathcal{S}_n)} e^{-|\mathbf{z}|} \\ &= |\mathcal{M}_n| e^{-\log(|\mathcal{M}_n|+1)} + |\mathcal{S}_n^c| e^{-\log(|\mathcal{M}_n|+1) - \log |\mathcal{S}_n^c|} \\ &= \frac{|\mathcal{M}_n|}{|\mathcal{M}_n| + 1} + \frac{1}{|\mathcal{M}_n| + 1} \cdot \frac{|\mathcal{S}_n^c|}{|\mathcal{S}_n^c|} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となるので語頭符号 f_n が存在することがわかる.

次に, 復号器 φ_n を

$$\varphi_n(f_n(\mathbf{x})) \triangleq \begin{cases} \hat{\varphi}_n(\hat{f}_n(\mathbf{x})), & (\mathbf{x} \in \mathcal{S}_n) \\ \mathbf{y}, & (\mathbf{x} \notin \mathcal{S}_n) \end{cases}$$

のように定める．ただし $\mathbf{y}$ は $d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ となるような $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}^n$ である．

上記のように定義した符号 (f_n, φ_n) が式 (1) を満たすことを示す． $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_n$ ならば

$$\begin{aligned} d_n(\mathbf{x}, \hat{\varphi}_n(\hat{f}_n(\mathbf{x}))) &\leq \Delta \\ \varphi_n(f_n(\mathbf{x})) &= \hat{\varphi}_n(\hat{f}_n(\mathbf{x})) \end{aligned}$$

なので

$$d_n(\mathbf{x}, \varphi_n(f_n(\mathbf{x}))) \leq \Delta$$

である．また， $\mathbf{x} \notin \mathcal{S}_n$ ならば， $d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ となる $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}^n$ を用いて

$$\varphi_n(f_n(\mathbf{x})) = \mathbf{y}$$

と定義したため，

$$d_n(\mathbf{x}, \varphi_n(f_n(\mathbf{x}))) = 0 \leq \Delta$$

となる．よっていずれにせよ，歪みは

$$d_n(\mathbf{x}, \varphi_n(f_n(\mathbf{x}))) \leq \Delta$$

となる．従って定めた語頭符号 (f_n, φ_n) は式 (1) を満たす．

次に (f_n, φ_n) が式 (2) を満たすことを示す．

$\mathbf{x} \in \mathcal{S}_n$, $\mathbf{x} \notin \mathcal{S}_n$ それぞれの場合における符号語長 $|f_n(\mathbf{x})|$ の定義より，期待値は

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|f_n(X^n)|] &= \log(|\mathcal{M}_n| + 1) \cdot \Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\} \\ &\quad + (\log(|\mathcal{M}_n| + 1) + \log |\mathcal{S}_n^c|) \cdot \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n\} \\ &= \log(|\mathcal{M}_n| + 1) + \log |\mathcal{S}_n^c| \cdot \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n\} \end{aligned}$$

と表される．第 2 項に関して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{S}_n^c| \cdot \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n\} = 0 \tag{6}$$

が成り立つ．なぜなら

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{S}_n^c| \cdot \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n\} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}^n| \cdot \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n\} \\ &= \log |\mathcal{X}| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n\} \\ &= \log |\mathcal{X}| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\{d_n(X^n, \hat{\varphi}_n(\hat{f}_n(X^n))) > \Delta\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるからである．ただし最後の等号で式 (3) を用いた．これにより

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}[|f_n(X^n)|] &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(|\mathcal{M}_n| + 1) \\
&= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\log |\mathcal{M}_n| + \log \frac{|\mathcal{M}_n| + 1}{|\mathcal{M}_n|}) \\
&= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{M}_n| \\
&\leq R(\Delta) + \delta
\end{aligned} \tag{7}$$

となる．ただし最後の不等式で式 (4) を用いた． $\delta > 0$ は任意であったので

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}[|f_n(X^n)|] \leq R(\Delta)$$

となり， (f_n, φ_n) が式 (2) を満たしていることが分かる．□

3.2 レート $R(\Delta)$ の極限

前節では符号化レートの上極限を示したが，式 (2) より強い

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}[|f_n(X^n)|] = R(\Delta) \tag{8}$$

が成り立つ可変長符号の列も存在する．

(証明) $R(\Delta)$ の定義より，任意の $\delta > 0$ に対して十分大きな全ての n において式 (3) 及び (4) となるような固定長符号の列 $\{(\hat{f}_n, \hat{\varphi}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する．この符号に対し，式 (5) のように $\mathcal{S}_n$ を定義する．ここで語頭符号 $\{(f_n, \varphi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ を定める．このとき符号語長を

$$|f_n(\mathbf{x})| \triangleq \begin{cases} l_n, & (\mathbf{x} \in \mathcal{S}_n) \\ l_n + \log |\mathcal{S}_n|, & (\mathbf{x} \notin \mathcal{S}_n) \end{cases}$$

とする．ただし

$$l_n = \max\{\log(|\mathcal{M}_n| + 1), nR(\Delta)\}$$

である．ただし符号器 f_n は

$$\hat{f}_n(\mathbf{x}) = \hat{f}_n(\mathbf{x}')$$

となるような $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{S}_n$ に対して同じ符号語を出力する．ここで

$$|f_n(\mathbf{x})| \geq \begin{cases} \log(|\mathcal{M}_n| + 1), & (\mathbf{x} \in \mathcal{S}_n) \\ \log(|\mathcal{M}_n| + 1) + \log |\mathcal{S}_n^c|, & (\mathbf{x} \notin \mathcal{S}_n) \end{cases}$$

であることから符号語の集合 $\mathcal{C}_n \triangleq f_n(\mathcal{X}^n)$ に対しクラフト和の計算を行うと

$$\begin{aligned}
\sum_{z \in \mathcal{C}_n} e^{-|z|} &= \sum_{z \in f_n(\mathcal{S}_n)} e^{-|z|} + \sum_{z \notin f_n(\mathcal{S}_n)} e^{-|z|} \\
&\leq |\mathcal{M}_n| e^{-\log(|\mathcal{M}_n|+1)} + |\mathcal{S}_n^{\mathcal{C}}| e^{-\log(|\mathcal{M}_n|+1) - \log |\mathcal{S}_n^{\mathcal{C}}|} \\
&= \frac{|\mathcal{M}_n|}{|\mathcal{M}_n|+1} + \frac{1}{|\mathcal{M}_n|+1} \cdot \frac{|\mathcal{S}_n^{\mathcal{C}}|}{|\mathcal{S}_n^{\mathcal{C}}|} \\
&= 1
\end{aligned}$$

となるので語頭符号 f_n が存在することがわかる。

次に、復号器 φ_n を

$$\varphi_n(f_n(\mathbf{x})) \triangleq \begin{cases} \hat{\varphi}_n(\hat{f}_n(\mathbf{x})), & (\mathbf{x} \in \mathcal{S}_n) \\ \mathbf{y}, & (\mathbf{x} \notin \mathcal{S}_n) \end{cases}$$

のように定める。ただし $\mathbf{y}$ は $d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ となるような $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}^n$ である。

上記のように定義した符号 (f_n, φ_n) が式 (1) を満たすことを示す。

$\mathbf{x} \in \mathcal{S}_n$ ならば

$$\begin{aligned}
d_n(\mathbf{x}, \hat{\varphi}_n(\hat{f}_n(\mathbf{x}))) &\leq \Delta \\
\varphi_n(f_n(\mathbf{x})) &= \hat{\varphi}_n(\hat{f}_n(\mathbf{x}))
\end{aligned}$$

なので

$$d_n(\mathbf{x}, \varphi_n(f_n(\mathbf{x}))) \leq \Delta$$

である。

また、 $\mathbf{x} \notin \mathcal{S}_n$ ならば、 $d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ となる $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}^n$ を用いて

$$\varphi_n(f_n(\mathbf{x})) = \mathbf{y}$$

と定義したため、

$$d_n(\mathbf{x}, \hat{\varphi}_n(\hat{f}_n(\mathbf{x}))) = 0$$

となる。よっていずれにせよ、歪みは

$$d_n(\mathbf{x}, \varphi_n(f_n(\mathbf{x}))) \leq \Delta$$

となる。したがってこの符号は式 (1) を満たす。

定めた符号が式 (8) を満たすことを示す。

$\mathbf{x} \in \mathcal{S}_n$, $\mathbf{x} \notin \mathcal{S}_n$ それぞれの場合における符号語長 $|f'_n(\mathbf{x})|$ は定義されているため、期待値は

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|f_n(X^n)|] &= l_n \cdot \Pr\{\mathbf{x}^n \in \mathcal{S}_n\} + \{l_n + \log |\mathcal{S}_n^{\mathbb{G}}|\} \cdot \Pr\{\mathbf{x}^n \notin \mathcal{S}_n\} \\ &= l_n + \log |\mathcal{S}_n^{\mathbb{G}}| \cdot \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n\}\end{aligned}$$

となる．このとき式 (6) より

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}[|f_n(X^n)|] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} l_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{S}_n^{\mathbb{G}}| \cdot \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} l_n\end{aligned}$$

となる．このとき l_n について

$$\begin{aligned}\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} l_n &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \max\{\log(|\mathcal{M}_n| + 1), nR(\Delta)\} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \max\left\{\frac{1}{n} \log(|\mathcal{M}_n| + 1), R(\Delta)\right\} \\ &= \max\left\{\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(|\mathcal{M}_n| + 1), \limsup_{n \rightarrow \infty} R(\Delta)\right\}\end{aligned}$$

が成り立つ．なお 2 行目から 3 行目への変形は付録で補題 1 として証明する．このとき式 (7) 及び $R(\Delta)$ の定義より

$$\begin{aligned}\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(|\mathcal{M}_n| + 1) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{M}_n| \\ &\leq R(\Delta) + \delta\end{aligned}$$

であり， δ の任意性から

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(|\mathcal{M}_n| + 1) \leq R(\Delta)$$

であるため

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} l_n \leq R(\Delta) \tag{9}$$

が成り立つ．一方 $l_n \geq nR(\Delta)$ であるため

$$\begin{aligned}\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} l_n &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} R(\Delta) \\ &= R(\Delta)\end{aligned} \tag{10}$$

も成り立つ．式 (9) 及び (10) より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} l_n = R(\Delta)$$

であるため

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}[|f_n(X^n)|] = R(\Delta)$$

となる。□

4 まとめ

情報伝送において歪みは生じる。本研究では情報効率向上のために一定の歪みを許容したうえで通信できることを明らかにした。そのために固定長符号化における歪みの定義を用いて、可変長符号化において一定の歪みを許容した符号の列が存在することを示した。このとき示した可変長符号化定理を満たす符号は、データの長さによらず歪みが許容値以下となりレートは固定長符号化定義におけるレートを超えない。さらに定義した可変長符号における符号レートの上極限を示したが、符号語長に条件を加えることで可変長符号における符号レートの極限を示した。

謝辞

本研究に当たり、終始一貫して丁寧なご指導を賜りました指導教員の西新幹彦准教授に心より感謝と敬意の意を申し上げます。

参考文献

- [1] I.Csiszár and J.Körner, Information Theory: Coding Theorems for Discrete Memoryless Systems 2nd ed, Cambridge University Press, New York, 2011.
- [2] 原 寛貴, 「一般情報源に対する最大歪み測度を用いた忠実度規範付き情報源符号化定理」, 修士論文, 2013.

付録 A 付録

補題 1 f_n, g_n が n に関して有界のとき,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max\{f_n, g_n\} = \max\{\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} g_n\}$$

が成り立つ.

(証明) まず不等号 $\leq$ を示す.

$$a = \limsup_{n \rightarrow \infty} \max\{f_n, g_n\}$$

とおくと, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して十分大きなすべての n で

$$\max\{f_n, g_n\} < a + \varepsilon$$

であり, 即ち

$$f_n < a + \varepsilon \quad \text{かつ} \quad g_n < a + \varepsilon$$

が成り立つ. よって

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n \leq a \quad \text{かつ} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} g_n \leq a$$

である. したがって

$$\max\{\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} g_n\} \leq a$$

となる.

次に不等号 $\geq$ を示す. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して無限個の n で

$$\max\{f_n, g_n\} > a - \varepsilon$$

即ち

$$f_n > a - \varepsilon \quad \text{または} \quad g_n > a - \varepsilon$$

となる. これらの内少なくとも一方は無限個の n に対して成り立つ. よって

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n \geq a \quad \text{または} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} g_n \geq a$$

である. したがって

$$\max\{\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} g_n\} \geq a$$

以上より

$$\begin{aligned}\max\{\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} g_n\} &= a \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \{f_n, g_n\}\end{aligned}$$

となる. $\square$