

信州大学工学部

学士論文

一人のエージェントを雇った CEO 問題における
レート・歪み関数

指導教員 西新 幹彦 准教授

学科 電気電子工学科
学籍番号 09T2100D
氏名 渡部 健人

2015 年 2 月 19 日

目次

1	はじめに	1
2	CEO 問題	2
2.1	情報源	2
2.2	通信路における雑音	2
2.3	歪み	2
2.4	達成可能性とレート・歪み関数	3
3	符号化定理	3
3.1	順定理	3
3.2	逆定理	5
3.3	ガウス情報源に対するレート歪み関数	8
4	考察	11
4.1	順定理	13
5	まとめ	15
	謝辞	15
	参考文献	15
	付録 A タイプ理論	16

1 はじめに

図 1 に情報理論における CEO 問題のモデルを示す．CEO(Chief Executive Officer) は自身が直接観測することのできない情報源から発生するデータの復元に関心がある．CEO は L 人のエージェントを雇い，エージェント達は雑音に汚されたデータを観測する．それらのデータを汚す各々の雑音は統計的に独立かつ同一の分布に従うとする．エージェントは観測したデータを CEO に伝えるがその通信レートは合計で R ビット以下で制限されており，エージェント同士でのやりとりは許可されていない．CEO 問題は，元データと復元データの歪み間の Δ 以下の歪みを許容し， L を大きくした時の R と Δ とのトレードオフ関係を論じるものである．

この CEO 問題は Berger [1] によって 1996 年に提起された．Oohama [2] は情報源及び雑音がガウス分布に従う場合の CEO 問題について，トレードオフ関係を定める関数を決定し，完全解を与えている．二人のエージェントを雇った CEO 問題は，特別な場合で two-help-one 問題と呼ばれるもので未だに解かれていない [3]．図 2 にエージェントが一人の場合の通信モデルを示す．本研究では，一人のエージェントを雇った CEO 問題におけるレート・歪み関数を明らかにした．

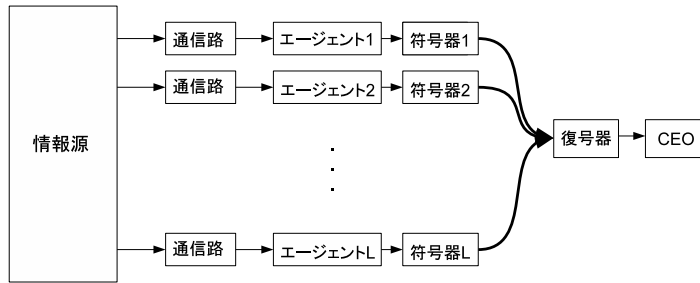


図 1 CEO 問題

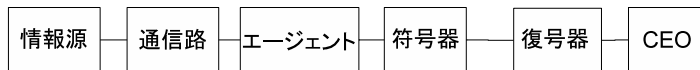


図 2 エージェントが一人の CEO 問題

2 CEO 問題

本研究における CEO 問題を定式化する.

2.1 情報源

アルファベット $\mathcal{X}$ 上の定常無記憶情報源 $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ を考える. 本研究では $\mathcal{X}$ は実数の集合 (実数全体の部分集合) とする. 長さ n の系列を

$$X^n = X_1 X_2 \dots X_n$$

などと表す.

2.2 通信路における雑音

データを汚す雑音 N は, 加法的で, 情報源とは独立な平均 0, 分散 σ_w^2 のガウス分布

$$N \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2)$$

に従うものとする. エージェントが観測する値を

$$\tilde{X} \triangleq X + N$$

と表すことにする.

2.3 歪み

2 つのシンボル x と $\hat{x}$ の間の歪みとは

$$d(x, \hat{x}) = (x - \hat{x})^2$$

で表される二乗誤差歪みであるとし, また長さ n の系列に対する歪みを

$$\begin{aligned} d_n(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d(x_i, \hat{x}_i) \\ &= \frac{1}{n} \sum_a \sum_b N(a, b \mid \mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) d(a, b) \end{aligned}$$

で表わす. すなわち系列に対する歪みは系列の要素の 1 シンボルあたりの平均歪みである. また $N(a \mid \mathbf{x})$ とはシンボル a が系列 $\mathbf{x}$ 中に現れる回数である.

2.4 達成可能性とレート・歪み関数

定義 1 レート R が許容歪み Δ で達成可能とは

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\{d_n(X^n, \varphi(f(\tilde{X}^n))) > \Delta\} = 0$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|f_n\| \leq R$$

となるような符号の列 $\{(f_n, \varphi_n)\}_{n=1}^\infty$ が存在することである．ここで $\|f_n\|$ とは f_n の値域の数である．本論文では $\log$ の底は 2 とする．

定義 2 レート・歪み関数を

$$R(\Delta | N) \triangleq \inf\{R \mid \text{レート } R \text{ は許容歪み } \Delta \text{ で達成可能}\}$$

と定義する．

本研究ではレート・歪み関数 $R(\Delta | N)$ を明らかにする．

3 符号化定理

次の定理が本研究の主な成果である．

定理 1

$$R(\Delta | N) = \min_{\hat{X}: \mathbf{E}[d(\tilde{X}, \hat{X})] \leq \Delta - \sigma_w^2} I(\tilde{X}; \hat{X}) \quad (1)$$

以下の節で、順定理、逆定理の順でこの定理を証明する．なお、定理を証明する中で使用している記号や補題はすべて付録に掲載する．

3.1 順定理

(順定理の証明)

$$R(\Delta | N) \leq \min_{\hat{X}: \mathbf{E}[d(\tilde{X}, \hat{X})] \leq \Delta - \sigma_w^2} I(\tilde{X}; \hat{X})$$

を証明する．右辺の値が、許容歪み Δ で達成可能なレートであることを示せば良い． $\hat{X}$ を $\tilde{X} = X + N$ と相関があり $\mathbf{E}[d(\tilde{X}, \hat{X})] \leq \Delta - \sigma_w^2$ を満たす任意の確率変数とする． $\hat{W} \triangleq P_{\tilde{X}|\hat{X}}$ で定まる通信路 $\hat{W}$ を考える． $\hat{W}$ に対して次のようなブロック長 n の符号 $(\hat{f}_n, \hat{\varphi}_n)$ が存在する．

$\mathcal{M}_{\hat{f}_n}$ を $\hat{f}_n$ の定義域とする．メッセージ $m \in \mathcal{M}_{\hat{f}_n}$ の符号語 $\hat{f}_n(m)$ は $\mathcal{T}_{[\hat{X}]}^n$ の中から選ばれている．つまり

$$\hat{f}_n(m) \in \mathcal{T}_{[\hat{X}]}^n \quad (2)$$

である．メッセージ m の復号領域 $\hat{\varphi}_n^{-1}(m)$ は $\mathcal{T}_{[\tilde{X}|\hat{X}]}^n(\hat{f}_n(m))$ に含まれている．つまり

$$\hat{\varphi}_n^{-1}(m) \subset \mathcal{T}_{[\tilde{X}|\hat{X}]}^n(\hat{f}_n(m))$$

である．さらに $(\hat{f}_n, \hat{\varphi}_n)$ は上の性質を満たすような *extension* を持たない．なお (f, φ) と $(\hat{f}, \hat{\varphi})$ が共に通信路 $W: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ に対する符号であり， $\mathcal{M}_f \subset \mathcal{M}_{\hat{f}}$ かつ $m \in \mathcal{M}_f$ に対して $f(m) = \hat{f}(m)$ ならば $(\hat{f}, \hat{\varphi})$ は (f, φ) の *extension* であるという ([4, 定義 23])．ここで

$$\mathcal{B} \triangleq \bigcup_{m \in \mathcal{M}_{\hat{f}_n}} \hat{\varphi}_n^{-1}(m)$$

とおき， $\hat{\varphi}_n^{-1}$ は $\tilde{x} \notin \mathcal{B}$ なる受信語に対して $m^* \notin \mathcal{M}_{\hat{f}_n}$ を復号することにする．

このような $(\hat{f}_n, \hat{\varphi}_n)$ を用いて (f_n, φ_n) を

$$f_n(\tilde{x}) \triangleq \hat{\varphi}_n(\tilde{x}) \quad (3)$$

$$\varphi_n(m) \triangleq \begin{cases} \hat{f}_n(m) & m \in \mathcal{M}_{\hat{f}_n} \\ \mathbf{0} & m \notin \mathcal{M}_{\hat{f}_n} \end{cases} \quad (4)$$

のように定め，この符号の性能を評価する．まず (f_n, φ_n) の符号化レートを考える．(2) より，補題 1 を用いて

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \log \|f_n\| &= \frac{1}{n} \log(|\mathcal{M}_{\hat{f}_n}| + 1) \\ &= \frac{1}{n} \log |\mathcal{M}_{\hat{f}_n}| + \frac{1}{n} \log \frac{|\mathcal{M}_{\hat{f}_n}| + 1}{|\mathcal{M}_{\hat{f}_n}|} \\ &< I(\tilde{X}; \hat{X}) + \tau + \frac{1}{n} \log \frac{|\mathcal{M}_{\hat{f}_n}| + 1}{|\mathcal{M}_{\hat{f}_n}|} \end{aligned}$$

であるので，

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|f_n\| \leq I(\tilde{X}; \hat{X}) \quad (5)$$

となる．

次に歪みを考える． $\tilde{X}^n = \tilde{x} \in \mathcal{B}$ であるとする． $\hat{x} \triangleq \varphi_n(f_n(\tilde{x}))$ とおく．すると $f_n(\tilde{x}) = \hat{\varphi}_n(\tilde{x}) \in \mathcal{M}_{\hat{f}_n}$ であり， $m = f_n(\tilde{x})$ とおけば， $\hat{x} = \varphi_n(m) = \hat{f}_n(m) \in \mathcal{T}_{[\tilde{X}]}^n$ がわかる．さらに $m = f_n(\tilde{x}) = \hat{\varphi}_n(\tilde{x})$ なので $\tilde{x} \in \hat{\varphi}_n^{-1}(m) \subset \mathcal{T}_{[\tilde{X}|\hat{X}]}^n(\hat{f}_n(m)) = \mathcal{T}_{[\tilde{X}|\hat{X}]}^n(\hat{x})$ である

こともわかる．ここで $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{X}^n = X^n + N^n$, $\hat{\mathbf{x}} = \varphi_n(f_n(\tilde{\mathbf{x}}))$ であるので

$$\begin{aligned}
d_n(X^n, \varphi_n(f_n(\tilde{X}^n))) &= d_n(\tilde{\mathbf{x}} - N^n, \varphi_n(f_n(\tilde{\mathbf{x}}))) \\
&= d_n(\tilde{\mathbf{x}} - N^n, \hat{\mathbf{x}}) \\
&\leq d_n(\tilde{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}}) + d_n(\tilde{\mathbf{x}} - N^n, \tilde{\mathbf{x}}) \\
&= \frac{1}{n} \sum_a \sum_b \mathbf{N}(a, b \mid \tilde{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}}) d(a, b) + d_n(N^n, \mathbf{0}) \\
&\leq \sum_a \sum_b (P_{\tilde{X}\hat{X}}(a, b) + 2\delta_n) d(a, b) + \sigma_w^2 + \delta'_n \tag{6} \\
&\leq \mathbf{E}[d(\tilde{X}, \hat{X})] + |\mathcal{X}^2| 2\delta_n d_{\max} + \sigma_w^2 + \delta'_n \\
&\leq \Delta - \sigma_w^2 + |\mathcal{X}^2| 2\delta_n d_{\max} + \sigma_w^2 + \delta'_n \\
&= \Delta + |\mathcal{X}^2| 2\delta_n d_{\max} + \delta'_n \\
&\rightarrow \Delta \quad \text{as } n \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

である．(6) では補題 2 を用いた．ゆえに

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\{\tilde{X}^n \in \mathcal{B}\} = 1$$

であることから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\{d_n(X^n, \varphi_n(f_n(\tilde{X}^n))) \leq \Delta\} = 1$$

すなわち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\{d_n(X^n, \varphi_n(f_n(\tilde{X}^n))) > \Delta\} = 0$$

となる．以上のことは， $\mathbf{E}[d(\tilde{X}, \hat{X})] \leq \Delta - \sigma_w^2$ なる任意の $\hat{X}$ に対して $I(\tilde{X}; \hat{X})$ が許容歪み Δ で達成可能なレートであることを意味している．すなわち

$$R(\Delta \mid N) \leq I(\tilde{X}; \hat{X}) \tag{7}$$

である．(7) の $\hat{X}$ の任意性より

$$R(\Delta \mid N) \leq \min_{\hat{X}: \mathbf{E}[d(\tilde{X}, \hat{X})] \leq \Delta - \sigma_w^2} I(\tilde{X}; \hat{X})$$

である．□

3.2 逆定理

(逆定理の証明)

$$R(\Delta \mid N) \geq \min_{\hat{X}: \mathbf{E}[d(\tilde{X}, \hat{X})] \leq \Delta - \sigma_w^2} I(\tilde{X}; \hat{X})$$

を証明する．任意の $0 < \epsilon < 1, \delta > 0$ を考える．十分大きな全ての n で

$$\Pr\{d_n(X^n, \varphi(f(\tilde{X}^n))) > \Delta\} < \epsilon$$

であるような任意の (f, φ) を考える． $g(\mathbf{x}) \triangleq \varphi(f(\mathbf{x}))$ とおく．

$$\mathcal{A} \triangleq \{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{T}_{[\tilde{X}]}^n \mid d_n(\tilde{\mathbf{x}}, g(\tilde{\mathbf{x}})) \leq \Delta - \sigma_w^2\}$$

とおく．補題 3 より ^{*1}任意の $\tau > 0$ に対して

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \log |\mathcal{A}| &\geq H(\tilde{X}) - \tau \\ |\mathcal{A}| &\geq \exp_2(n(H(\tilde{X}) - \tau)) \end{aligned} \tag{8}$$

である．ここで $\exp_2(x) \triangleq 2^x$ である．次に $\mathcal{X}^2$ 上の同時タイプ Q を考える．与えられた $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}^n$ に対し， $Q = P_{\tilde{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}$ なるような $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}^n$ の数の上限は $\exp(nH(\tilde{X}' \mid \hat{X}'))$ と表される．ただし $\tilde{X}', \hat{X}'$ は Q に従う確率変数である．ここで $E[d(\tilde{X}', \hat{X}')] = d_n(\tilde{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}})$, $P_{\tilde{X}'}(a) = \Pr\{\tilde{X}' = a\} = P_{\tilde{\mathbf{x}}}(a)$ が成り立つ．ここで集合 $\mathcal{C}$ を

$$\mathcal{C} \triangleq \{\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}^n \mid \hat{\mathbf{x}} = g(\tilde{\mathbf{x}}), \tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{A}\}$$

^{*1} $P^n(\mathcal{A}) \geq \eta$ を示すのは保留．

とおく．すると集合 $\mathcal{A}$ の大きさは

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}| &= \left| \bigcup_{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{C}} \{ \tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{T}_{[\tilde{X}]}^n \mid d_n(\tilde{\mathbf{x}}, g(\tilde{\mathbf{x}})) \leq \Delta - \sigma_w^2, \hat{\mathbf{x}} = g(\tilde{\mathbf{x}}) \} \right| \\
&\leq \left| \bigcup_{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{C}} \{ \tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{T}_{[\tilde{X}]}^n \mid d_n(\tilde{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}}) \leq \Delta - \sigma_w^2 \} \right| \\
&\leq \sum_{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{C}} \left| \{ \tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{T}_{[\tilde{X}]}^n \mid d_n(\tilde{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}}) \leq \Delta - \sigma_w^2 \} \right| \\
&= \sum_{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{C}} \sum_{Q: \sum_{\tilde{\mathbf{x}}} Q = P_{\tilde{\mathbf{x}}}} \left| \{ \tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{T}_{[\tilde{X}]}^n \mid d_n(\tilde{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}}) \leq \Delta - \sigma_w^2, P_{\tilde{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} = Q \} \right| \\
&= \sum_{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{C}} \sum_{Q: \sum_{\tilde{\mathbf{x}}} Q = P_{\tilde{\mathbf{x}}}} \left| \{ \tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{T}_{[\tilde{X}]}^n \mid \mathbf{E}[d(\tilde{X}', \hat{X}')] \leq \Delta - \sigma_w^2, P_{\tilde{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} = Q \} \right| \\
&= \sum_{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{C}} \sum_{Q: \sum_{\tilde{\mathbf{x}}} Q = P_{\tilde{\mathbf{x}}}} \left| \{ \tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}^n \mid |P_{\tilde{X}'}(a) - P_{\hat{X}}(a)| \leq \delta_n, \mathbf{E}[d(\tilde{X}', \hat{X}')] \leq \Delta - \sigma_w^2, P_{\tilde{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} = Q \} \right| \\
&= \sum_{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{C}} \sum_{Q: |P_{\tilde{X}'}(a) - P_{\hat{X}}(a)| \leq \delta_n, \mathbf{E}[d(\tilde{X}', \hat{X}')] \leq \Delta - \sigma_w^2} \left| \{ \tilde{\mathbf{x}} \mid P_{\tilde{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} = Q \} \right| \\
&\leq \sum_{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{C}} \sum_{Q: |P_{\tilde{X}'}(a) - P_{\hat{X}}(a)| \leq \delta_n, \mathbf{E}[d(\tilde{X}', \hat{X}')] \leq \Delta - \sigma_w^2} \exp_2(nH(\tilde{X}' \mid \hat{X}')) \\
&\leq \sum_{Q: |P_{\tilde{X}'}(a) - P_{\hat{X}}(a)| \leq \delta_n, \mathbf{E}[d(\tilde{X}', \hat{X}')] \leq \Delta - \sigma_w^2} \max \exp_2(nH(\tilde{X}' \mid \hat{X}')) \|g\| \sum_Q 1 \\
&\leq \exp_2 \left(n \sum_{Q: |P_{\tilde{X}'}(a) - P_{\hat{X}}(a)| \leq \delta_n, \mathbf{E}[d(\tilde{X}', \hat{X}')] \leq \Delta - \sigma_w^2} H(\tilde{X}' \mid \hat{X}') \right) \|g\| (n+1)^{|\mathcal{X}|^2} \\
&= \exp_2(nH(\tilde{X}' \mid \hat{X}')) \|g\| (n+1)^{|\mathcal{X}|^2} \tag{9}
\end{aligned}$$

ここで $\tilde{X}', \hat{X}'$ は

$$H(\tilde{X}', \hat{X}') = \max_{Q: |P_{\tilde{X}'}(a) - P_{\hat{X}}(a)| \leq \delta_n, \mathbf{E}[d(\tilde{X}', \hat{X}')] \leq \Delta - \sigma_w^2} H(\tilde{X}', \hat{X}')$$

を満たすものとする．また $|P_{\tilde{X}'}(a) - P_{\hat{X}}(a)| \leq \delta_n$ より $|H(\tilde{X}') - H(\tilde{X})| < \tau$ であるので (8) は

$$|\mathcal{A}| \geq \exp_2(n(H(\tilde{X}) - \tau)) \geq \exp_2(n(H(\tilde{X}') - 2\tau)) \tag{10}$$

と書ける．(9), (10) より

$$\exp_2(n(H(\tilde{X}') - 2\tau)) \leq |\mathcal{A}| \leq \exp_2(nH(\tilde{X}' \mid \hat{X}')) \|g\| (n+1)^{|\mathcal{X}|^2}$$

である．ここで十分大きな全ての n で

$$\exp_2(n(H(\tilde{X}') - 2\tau)) \leq |\mathcal{A}| \leq \exp_2(nH(\tilde{X}' \mid \hat{X}') + \tau) \|g\|$$

と書ける．ゆえに

$$\begin{aligned}\|g\| &\geq \exp_2(n(H(\tilde{X}') - H(\tilde{X}' | \hat{X}') - 3\tau)) \\ &= \exp_2(n(I(\tilde{X}'; \hat{X}') - 3\tau))\end{aligned}$$

となる．そして

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} \log \|f\| &\geq \frac{1}{n} \log \|g\| \\ &\geq I(\tilde{X}'; \hat{X}') - 3\tau \\ &\geq \min_{\hat{X}: \mathbf{E}[d(\tilde{X}', \hat{X})] \leq \Delta - \sigma_w^2} I(\tilde{X}'; \hat{X}) - 3\tau \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|f\| &\geq \min_{\hat{X}: \mathbf{E}[d(\tilde{X}, \hat{X})] \leq \Delta - \sigma_w^2} I(\tilde{X}; \hat{X}) - 4\tau\end{aligned}$$

である．最後の不等式は $P_{\tilde{X}'} \rightarrow P_{\tilde{X}}$ ($n \rightarrow \infty$) と相互情報量の連続性を用いた． $\tau > 0$ は任意であるので

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|f\| \geq \min_{\hat{X}: \mathbf{E}[d(\tilde{X}, \hat{X})] \leq \Delta - \sigma_w^2} I(\tilde{X}; \hat{X})$$

を得る．□

3.3 ガウス情報源に対するレート歪み関数

定理の証明では情報源の分布は任意であったが，ここでは情報源 X は平均 0, 分散 σ^2 のガウス分布

$$X \sim (0, \sigma^2)$$

に従うとし，閉じた形のレート歪み関数を導出する．

まずレート歪み関数に対する下界を 1 つ導出し，次に得られた下界が達成可能であることを

示す.

$$\begin{aligned}
I(\hat{X}; \tilde{X}) &= h(\tilde{X}) - h(\tilde{X} \mid \hat{X}) \\
&= \frac{1}{2} \log 2\pi e(\sigma^2 + \sigma_w^2) - h(\tilde{X} - \hat{X} \mid \hat{X}) \\
&\geq \frac{1}{2} \log 2\pi e(\sigma^2 + \sigma_w^2) - h(\tilde{X} - \hat{X}) \\
&\geq \frac{1}{2} \log 2\pi e(\sigma^2 + \sigma_w^2) - h(N(0, E(\tilde{X} - \hat{X})^2)) \\
&= \frac{1}{2} \log 2\pi e(\sigma^2 + \sigma_w^2) - \frac{1}{2} \log 2\pi e(E(\tilde{X} - \hat{X})^2) \\
&\geq \frac{1}{2} \log 2\pi e(\sigma^2 + \sigma_w^2) - \frac{1}{2} \log 2\pi e(\Delta - \sigma_w^2) \\
&= \frac{1}{2} \log \frac{\sigma^2 + \sigma_w^2}{\Delta - \sigma_w^2}
\end{aligned} \tag{11}$$

であるので (11) を (1) に代入すると

$$\begin{aligned}
R(\Delta \mid N) &= \min_{\hat{X}: \mathbf{E}[d(\tilde{X}, \hat{X})] \leq \Delta - \sigma_w^2} I(\tilde{X}; \hat{X}) \\
&\geq \min_{\hat{X}: \mathbf{E}[d(\tilde{X}, \hat{X})] \leq \Delta - \sigma_w^2} \frac{1}{2} \log \frac{\sigma^2 + \sigma_w^2}{\Delta - \sigma_w^2} \\
&= \frac{1}{2} \log \frac{\sigma^2 + \sigma_w^2}{\Delta - \sigma_w^2}
\end{aligned} \tag{12}$$

である.

次に, 下界の等号を達成する $f_{\tilde{X}, \hat{X}}(\tilde{x}, \hat{x})$, $f_{\tilde{X} \mid \hat{X}}(\tilde{x} \mid \hat{x})$ を構成する. $\hat{X} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 - \Delta + 2\sigma_w^2)$, $\tilde{N} \sim \mathcal{N}(0, \Delta - 2\sigma_w^2)$ とすると, $\hat{X} + \tilde{N} = X$ であるので, $X + N = \tilde{X}$ より $\hat{X} + Z = \tilde{X}$ が得られる. ただし

$$Z = (\tilde{N} + N) \sim \mathcal{N}(0, \Delta - \sigma_w^2)$$

とした. ここで歪みについて

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[d(\tilde{X}, \hat{X})] &= \mathbf{E}[(\tilde{X} - \hat{X})^2] \\
&= \mathbf{E}[(\hat{X} + Z - \hat{X})^2] \\
&= \mathbf{E}[Z^2] \\
&= \Delta - \sigma_w^2
\end{aligned} \tag{13}$$

が得られる. また $\tilde{x} - \hat{x} = z$ である. 以上の条件で $I(\hat{X}; \tilde{X})$ を求める.

$$I(\hat{X}; \tilde{X}) = h(\tilde{X}) - h(\tilde{X} \mid \hat{X}) \tag{14}$$

$h(\tilde{X} | \hat{X})$ は

$$h(\tilde{X} | \hat{X}) = - \iint f_{\tilde{X}, \hat{X}}(\tilde{x}, \hat{x}) \log f_{\tilde{X} | \hat{X}}(\tilde{x} | \hat{x}) d\tilde{x} d\hat{x} \quad (15)$$

であり, ここで $f_{\tilde{X}, \hat{X}}(\tilde{x}, \hat{x})$, は

$$\begin{aligned} f_{\tilde{X}, \hat{X}}(\tilde{x}, \hat{x}) &= \Pr\{\tilde{X} = \tilde{x}, \hat{X} = \hat{x}\} \\ &= \Pr\{Z + \hat{X} = \tilde{x}, \hat{X} = \hat{x}\} \\ &= \Pr\{Z = \tilde{x} - \hat{x}, \hat{X} = \hat{x}\} \\ &= \Pr\{Z = \tilde{x} - \hat{x}\} \Pr\{\hat{X} = \hat{x}\} \\ &= f_Z(\tilde{x} - \hat{x}) f_{\hat{X}}(\hat{x}) \end{aligned} \quad (16)$$

と書け, また $f_{\tilde{X} | \hat{X}}(\tilde{x} | \hat{x})$ は

$$\begin{aligned} f_{\tilde{X} | \hat{X}}(\tilde{x} | \hat{x}) &= \Pr\{\tilde{X} = \tilde{x} | \hat{X} = \hat{x}\} \\ &= \Pr\{Z + \hat{X} = \tilde{x} | \hat{X} = \hat{x}\} \\ &= \Pr\{Z = \tilde{x} - \hat{x} | \hat{X} = \hat{x}\} \\ &= \frac{\Pr\{Z = \tilde{x} - \hat{x}\} \Pr\{\hat{X} = \hat{x}\}}{\Pr\{\hat{X} = \hat{x}\}} \\ &= \Pr\{Z = \tilde{x} - \hat{x}\} \\ &= f_Z(\tilde{x} - \hat{x}) \end{aligned} \quad (17)$$

と書ける. 次に (16), (17) を (15) へ代入すると

$$\begin{aligned} h(\tilde{X} | \hat{X}) &= - \int_{\tilde{x}} \int_{\hat{x}} f_Z(\tilde{x} - \hat{x}) d\tilde{x} d\hat{x} \\ &= - \int_z \int_{\hat{x}} f_Z(z) f_{\hat{X}}(\hat{x}) \log f_Z(z) dz d\hat{x} \\ &= - \int_x f_{\hat{X}}(\hat{x}) \left(\int_z f_Z(z) \log f_Z(z) dz \right) d\hat{x} \\ &= \int_x f_{\hat{X}}(\hat{x}) h(Z) d\hat{x} \\ &= h(Z) \\ &= \frac{1}{2} \log 2\pi e(\Delta - \sigma_w^2) \end{aligned} \quad (18)$$

が得られる. ここで (18) を (14) に代入すると

$$\begin{aligned} I(\tilde{X}; \hat{X}) &= \frac{1}{2} \log 2\pi e(\sigma^2 + \sigma_w^2) - \frac{1}{2} \log 2\pi e(\Delta - \sigma_w^2) \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{\sigma^2 + \sigma_w^2}{\Delta - \sigma_w^2} \end{aligned} \quad (19)$$

を得る．(13)，(19) より，(12) の限界が達成される．よってガウス情報源に対する一人のエージェントを雇った CEO 問題におけるレート・歪み関数は

$$R(\Delta | N) = \frac{1}{2} \log \frac{\sigma^2 + \sigma_w^2}{\Delta - \sigma_w^2} \quad (20)$$

と表せる．また (20) より，レートが 0 に収束するのは

$$\begin{aligned} \log \frac{\sigma^2 + \sigma_w^2}{\Delta - \sigma_w^2} &= 0 \\ \sigma^2 + \sigma_w^2 &= \Delta - \sigma_w^2 \\ \Delta &= \sigma^2 + 2\sigma_w^2 \end{aligned} \quad (21)$$

である．ここで図 3 に $\sigma^2 = 1$ として σ_w^2 の値を変化させた時のガウス情報源に対するレート・歪み関数のグラフを示す．Data1 は $\sigma_w^2 = 0$ ，Data2 は $\sigma_w^2 = 0.1$ ，Data3 は $\sigma_w^2 = 0.2$ ，Data4 は $\sigma_w^2 = 0.3$ である．図 3 と (21) より，(20) は必ず $\Delta = \sigma^2 + 2\sigma_w^2$ でレートは 0 に収束し，また $\Delta - \sigma_w^2 > 0$ であり，情報源は無限のエントロピーを持っているので Δ が σ_w^2 の値に近づくにつれレートが発散していくことがわかる．情報源 X は $X \sim (0, \sigma^2)$ に従うガウス分布であることから， σ^2 は与えられているので，レートが 0 に収束する点と，レートが発散していくのは σ_w^2 の値に依存していることがわかる．

4 考察

図 4 に基本的なレート・歪みの通信モデルを示す．受信者の受け取るメッセージを $\hat{X}$ とおき，情報源 X との歪みが Δ 以下になるような符号化レートを考える．このような問題を解くとき， $\hat{X}$ を入力して X を出力するような通信路 $\hat{W}$ を考え，まずこれに対して通信路符号化の問題を解く (図 5)．そして得られた通信路用の符号器と復号器を入れ替えて，歪みを許す情報源符号化の符号器と復号器として使用する (図 6)．このようにしてよい符号化レートをもつ符号を構成することができ，その結果導かれるレート歪み関数が

$$R(\Delta | N) = \min_{\hat{X}: \mathbf{E}[d(X, \hat{X})] \leq \Delta} I(X; \hat{X})$$

である．

これと同じ考え方を一人のエージェントを雇った CEO 問題 (図 7) に適用する． $\hat{X}$ を入力して X を出力するような通信路 $\hat{W}$ を考えるのだが，通信路符号化問題を解いた結果を CEO 問題に還元する際，符号器の直前に雑音源 W が存在していることに注意し，通信路の復号器の直前に W を置いて問題を解くとよい．すなわち，図 8 のように $\hat{W}$ と W を直列接続した通信路に対して通信路符号化の問題を解くことになる．そして得られた符号器と復号器を入れ替えて図 9 のように CEO 問題に適用する．この筋書きで CEO 問題の答えを予想すると，

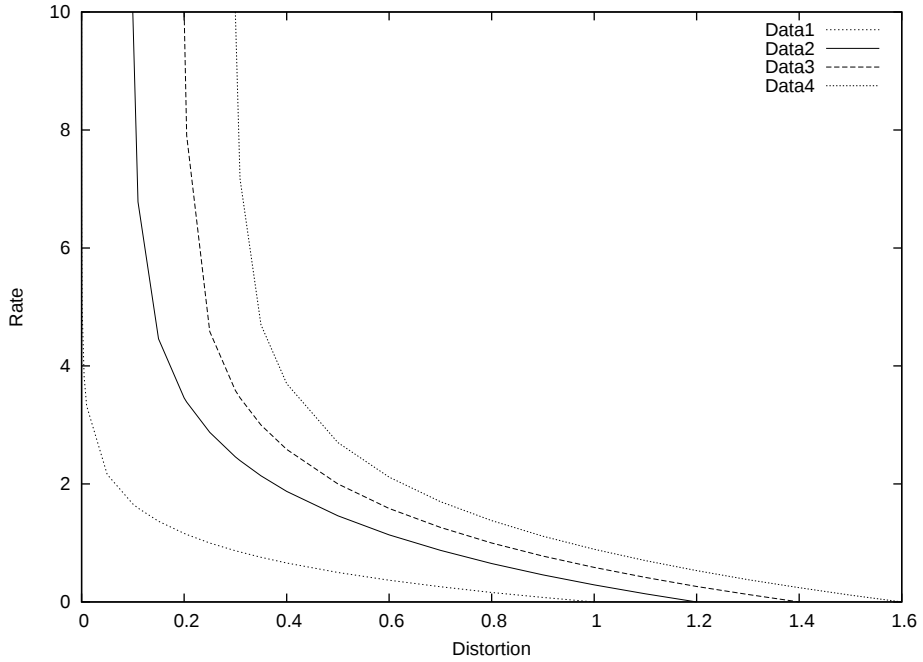


図3 $\sigma^2 = 1$ とした時のガウス情報源に対するレート・歪み関数

情報源 X と受信者 $\hat{X}$ の間の歪みが $E[d(X, \hat{X})] \leq \Delta$ であることを要請するのは同じではあるが、通信路符号化で導入した通信路 $\hat{W}$ の両側の相互情報量は、 $I(X; \hat{X})$ であったものを $I(\tilde{X}; \hat{X})$ に変更する必要があると考えられる。

以上のことから、エージェントを一人雇った CEO 問題のレート・歪み関数は

$$R(\Delta | N) = \min_{\tilde{X}: E[d(X, \tilde{X})] \leq \Delta} I(\tilde{X}; \hat{X}) \quad (22)$$

であると予想されるので、以下の節で、順定理、逆定理の順でこの (22) を証明する。

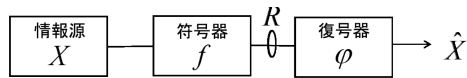


図4 基本的なレート・歪みの通信モデル

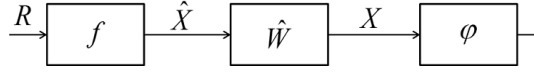


図 5 基本的なレート・歪みの通信モデルの通信路符号化

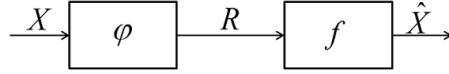


図 6 図 5 の符号器と復号器を入れ替えて情報源符号化

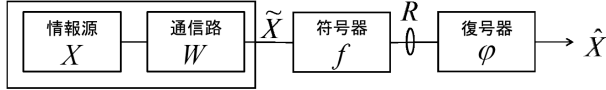


図 7 一人のエージェントを雇った CEO 問題

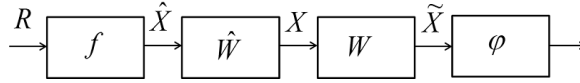


図 8 一人のエージェントを雇った CEO 問題の通信路符号化

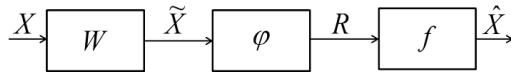


図 9 図 8 の符号器と復号器を入れ替えて情報源符号化

4.1 順定理

(順定理の証明)

$$R(\Delta | N) \leq \min_{\hat{X}: \mathbf{E}[d(X, \hat{X})] \leq \Delta} I(\tilde{X}; \hat{X})$$

を証明する．右辺の値が，許容歪み Δ で達成可能なレートであることを示せば良い．ここで 3.1 節と同様に (f_n, φ_n) を (3), (4) のように定め，符号化レートについても同様であるの

で (5) が成り立つ。ただし、3.1 節とは歪みが異なるので、 $\hat{X}$ を $\tilde{X} = X + N$ と相関があり $\mathbf{E}[d(\tilde{X}, \hat{X})] \leq \Delta$ を満たす任意の確率変数とし、歪みに関して考える。 $\tilde{X}^n = \tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{B}$ であるとする。 $\hat{\mathbf{x}} \triangleq \varphi_n(f_n(\tilde{\mathbf{x}}))$ とおく。すると $f_n(\tilde{\mathbf{x}}) = \hat{\varphi}_n(\tilde{\mathbf{x}}) \in \mathcal{M}_{\hat{f}_n}$ であり、 $m = f_n(\tilde{\mathbf{x}})$ とおけば、 $\hat{\mathbf{x}} = \varphi_n(m) = \hat{f}_n(m) \in \mathcal{T}_{[\hat{X}]}^n$ がわかる。さらに $m = f_n(\tilde{\mathbf{x}}) = \hat{\varphi}_n(\tilde{\mathbf{x}})$ なので $\tilde{\mathbf{x}} \in \hat{\varphi}_n^{-1}(m) \subset \mathcal{T}_{[\tilde{X}|\hat{X}]}^n(\hat{f}_n(m)) = \mathcal{T}_{[\tilde{X}|\hat{X}]}^n(\hat{\mathbf{x}})$ であることもわかる。ここで $\mathbf{x} = X^n, \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{X}^n = X^n + N^n, \hat{\mathbf{x}} = \varphi_n(f_n(\tilde{\mathbf{x}}))$ であるので

$$\begin{aligned}
d_n(X^n, \varphi(f(X^n + N^n))) &= d_n(\mathbf{x}, \varphi(f(\tilde{\mathbf{x}}))) \\
&= d_n(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{a \in \mathcal{X}} \sum_{b \in \mathcal{X}} N(a, b \mid \mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) d(a, b) \\
&= \sum_{a \in \mathcal{X}} \sum_{b \in \mathcal{X}} \frac{1}{n} N(a, b \mid \mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) d(a, b) \\
&\leq \sum_{a \in \mathcal{X}} \sum_{b \in \mathcal{X}} (P_{X\hat{X}}(a, b) + 2\delta_n) d(a, b) \\
&= \sum_{a \in \mathcal{X}} \sum_{b \in \mathcal{X}} P_{X\hat{X}}(a, b) d(a, b) + \sum_{a \in \mathcal{X}} \sum_{b \in \mathcal{X}} 2\delta_n d(a, b) \\
&\leq \sum_{a \in \mathcal{X}} \sum_{b \in \mathcal{X}} P_{X\hat{X}}(a, b) d(a, b) + 2|\mathcal{X}|^2 \delta_n d_{\max} \\
&= \mathbf{E}[d(X, \hat{X})] + 2|\mathcal{X}|^2 \delta_n d_{\max} \\
&\leq \Delta + 2|\mathcal{X}|^2 \delta_n d_{\max} \\
&\rightarrow \Delta \quad \text{as } n \rightarrow \infty
\end{aligned} \tag{23}$$

である。(23) では補題 2 を用いた。ゆえに

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\{\tilde{X}^n \in \mathcal{B}\} = 1$$

であることから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\{d_n(X^n, \varphi_n(f_n(\tilde{X}^n))) \leq \Delta\} = 1$$

すなわち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\{d_n(X^n, \varphi_n(f_n(\tilde{X}^n))) > \Delta\} = 0$$

となる。以上のことは、 $\mathbf{E}[d(\tilde{X}, \hat{X})] \leq \Delta$ なる任意の $\hat{X}$ に対して $I(\tilde{X}; \hat{X})$ が許容歪み Δ で達成可能なレートであることを意味している。すなわち

$$R(\Delta \mid N) \leq I(\tilde{X}; \hat{X}) \tag{24}$$

である．(24) の $\hat{X}$ の任意性より

$$R(\Delta | N) \leq \min_{\hat{X}: \mathbf{E}[d(X, \hat{X})] \leq \Delta} I(\tilde{X}; \hat{X})$$

である．□

逆定理は示すことができていない．所望の結果を導く際，歪み測度に関する三角不等式が導出を妨げている部分があるので逆定理は成立しないと思われる．本節では

定理 2

$$R(\Delta | N) \leq \min_{\hat{X}: \mathbf{E}[d(X, \hat{X})] \leq \Delta} I(\tilde{X}; \hat{X})$$

が示せたこととなる．

5 まとめ

本研究ではエージェントを一人雇った CEO 問題におけるレート・歪み関数を明らかにした．ただし，定理を証明していく際に，雑音は $N \sim (0, \sigma_w^2)$ に従う連続なものであるにもかかわらず，離散の形で式の展開を行ったため，厳密さにかけているので，本論文の証明は改善されなければならない．

謝辞

本研究を行うにあたり，細かく指導して下さった指導教員の西新幹彦准教授に感謝の意を表する．

参考文献

- [1] T. Berger, “The CEO Problem”, IEEE Transactions On Information Theory, Vol.42, no.3, pp.887–902, May. 1996.
- [2] Y. Oohama, “The Rate-Distortion Function for the Quadratic Gaussian CEO Problem”, IEEE Transactions On Information Theory, Vol.44, no.3, pp.1057–1070, May. 1998.
- [3] H. Viswanathan, “The Quadratic Gaussian CEO Problem”, IEEE Transactions On Information Theory, Vol.43, no.5, pp.1549–1559, September. 1997.
- [4] 原寛貴, 「一般情報源に対する最大歪み測度を用いた忠実度規範付き情報源符号化定理」, 信州大学大学院工学系研究科修士論文, 2013

付録 A タイプ理論

本文で使用したタイプ理論 [4] と補題をここに掲載する．補題の証明は [4] を参照されたい．

情報源アルファベット $\mathcal{X}$ とその上の分布 $P_{\mathbf{X}}$ を持つ定常独立な情報源から系列 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n$ を得る確率は， $\mathcal{X}$ 中の各シンボルが $\mathbf{x}$ 中に何回出現しているかによって完全に定められる．長さ n の系列 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n$ と $a \in \mathcal{X}$ に対して

$$P_{\mathbf{x}}(a) \triangleq \frac{1}{n} N(a | \mathbf{x})$$

と定める． $P_{\mathbf{x}}$ を $\mathbf{x}$ のタイプという．タイプは $\mathcal{X}$ 上の分布である．また，タイプ P に対して $\mathcal{X}^n$ に属する系列の中でタイプが P であるような系列全体を

$$\mathcal{T}_P^n \triangleq \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{X}^n \mid \text{任意の } a \in \mathcal{X} \text{ に対して } P(a) = \frac{1}{n} N(a | \mathbf{x}) \right\}$$

と表す．また， $\mathcal{X}$ 上の任意の分布 P ，任意の定数 $\delta \geq 0$ を用いて

$$\mathcal{T}_{[P]\delta}^n \triangleq \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{X}^n \mid \begin{cases} \text{任意の } a \in \mathcal{X} \text{ に対して} \\ \left| \frac{1}{n} N(a | \mathbf{x}) - P(a) \right| \geq \delta & (P(a) > 0 \text{ のとき}) \\ N(a | \mathbf{x}) = 0 & (P(a) = 0 \text{ のとき}) \end{cases} \right\}$$

と定義する．また， $n \rightarrow \infty$ のとき $\delta_n \rightarrow 0$ ， $\sqrt{n} \cdot \delta_n \rightarrow \infty$ となる δ_n に対して

$$\mathcal{T}_{[P]}^n \triangleq \mathcal{T}_{[P]\delta_n}^n \quad (25)$$

を定義する．これに属する系列 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n$ を P -ティピカルであるという．次に復元アルファベットを $\mathcal{Y}$ とする．系列 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n$ と $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}^n$ の組 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ に対する同時タイプを系列 $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n \in (\mathcal{X} \times \mathcal{Y})^n$ のタイプと定義する．すなわち同時タイプは

$$P_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(a, b) \triangleq \frac{1}{n} N(a, b | \mathbf{x}, \mathbf{y})$$

によって定まる $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ 上の分布である．ただし， $N(a, b | \mathbf{x}, \mathbf{y})$ は $x_i = a$ かつ $y_i = b$ となっている場所 i の総数である．そして，与えられた $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n$ に対する $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}^n$ の条件付きタイプ V はすべての $a \in \mathcal{X}$ および $b \in \mathcal{Y}$ について

$$N(a, b | \mathbf{x}, \mathbf{y}) = N(a | \mathbf{x}) V(b | a)$$

を満足する確率遷移行列 $V: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ として定義される．特に，全ての $a \in \mathcal{X}$ について $N(a | \mathbf{x}) > 0$ ならば条件付きタイプは一意に定まり

$$V(b | a) = \frac{N(a, b | \mathbf{x}, \mathbf{y})}{N(a | \mathbf{x})}$$

によって与えられる。さらに、 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n$ に対し、条件付きタイプが V となるような $\mathcal{Y}^n$ の部分集合を

$$\mathcal{T}_V^n(\mathbf{x}) \triangleq \{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}^n \mid \text{全ての } a \in \mathcal{X}, b \in \mathcal{Y} \text{ に対して } N(a, b \mid \mathbf{x}, \mathbf{y}) = N(a \mid \mathbf{x})V(b \mid a)\}$$

と表す。

遷移確率行列 $W : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ と、任意の定数 $\delta \geq 0$ ，系列 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n$ に対して

$$\mathcal{T}_{[W]^\delta}^n(\mathbf{x}) \triangleq \left\{ \mathbf{y} \in \mathcal{Y}^n \mid \begin{cases} \text{すべての } a \in \mathcal{X}, b \in \mathcal{Y} \text{ に対して} \\ \left| \frac{1}{n} N(a, b \mid \mathbf{x}, \mathbf{y}) - \frac{1}{n} N(a \mid \mathbf{x}) W(b \mid a) \right| \geq \delta & (W(b \mid a) > 0 \text{ のとき}) \\ N(a, b \mid \mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 & (W(b \mid a) = 0 \text{ のとき}) \end{cases} \right\}$$

を定義する。そして、(25) を満たす δ_n に対して

$$\mathcal{T}_{[W]}^n(\mathbf{x}) \triangleq \mathcal{T}_{[W]_{\delta_n}}^n(\mathbf{x})$$

を定義する。これに属する系列 $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}^n$ を条件 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n$ の下で W -ティピカルであるという。ここで ΣPW を

$$\Sigma PW(b) \triangleq \sum_a P(a) W(b \mid a)$$

によって定まる $\mathcal{Y}$ 上の分布とする。

補題 1 (p.48, 補題 25) 無記憶通信路 $\{W : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}\}$ に対し、全ての符号語が $\mathcal{T}_{[P]}^n$ に入る符号を考える。このとき任意の $\epsilon, \tau \in (0, 1)$ に対して十分大きな n をとれば、どんな (n, ϵ) -符号 (f, φ) でも

$$\frac{1}{n} \log |\mathcal{M}_f| < I(P, W) + \tau$$

を満たす。または、 $\mathcal{M}_f$ は符号語が $\mathcal{T}_{[P]}^n$ に入るメッセージからなる集合である。

補題 2 (p.19, 補題 1) 任意の分布 P と任意の確率遷移行列 W に対して、 $\mathbf{x} \in \mathcal{T}_{[P]^\delta}^n$ かつ $\mathbf{y} \in \mathcal{T}_{[W]^\delta}^n(\mathbf{x})$ のとき、 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{T}_{[PW]^{2\delta}}^n$ かつ $\delta' \triangleq 2|\mathcal{X}|\delta$ を用いて $\mathbf{y} \in \mathcal{T}_{[\Sigma PW]^{\delta'}}^n$ となる。

補題 3 (p.41, 補題 19) $0 < \eta < 1$ に対して、 $(\eta, |\mathcal{X}|)$ に依存する系列 $\epsilon_n \rightarrow 0$ が存在し、十分大きな全ての n で $P^n(\mathcal{A} \geq \eta)$ なる $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}^n$ に対して

$$\frac{1}{n} \log |\mathcal{A}| \geq H(P) - \epsilon_n$$

が成り立つ。