

信州大学工学部

学士論文

パケット間隔で情報を送る
通信路のモデル化

指導教員 西新 幹彦 准教授

学科 電気電子工学科

学籍番号 04T2069G

氏名 西村 啓希

2008年3月14日

目次

1	緒論	1
1.1	研究の背景と目的	1
1.2	本論文の構成	2
2	通信システム	3
2.1	符号器と符号語	3
2.2	通信路	3
2.2.1	キューとサービス器	3
2.2.2	キャパシティ	4
2.2.3	通信路の到着, 出発	6
2.2.4	簡略化通信路	7
2.2.5	簡略化通信路における雑音の分布	7
2.3	復号器	9
2.3.1	復号化	9
2.3.2	最尤法による閾値算出	9
2.3.3	出発間隔の分布による閾値算出	11
3	二元対称通信路か否か	13
3.1	目的	13
3.2	実験方法	13
3.3	実験結果	14
4	雑音の分布の比較	15
4.1	目的	15
4.2	実験方法	15
4.3	実験結果	15
5	実際の雑音の分布に基づく復号器の設計	18
5.1	目的	18
5.2	実験方法	18
5.3	実験結果	18
5.3.1	到着間隔 1,5 にそれぞれかかる雑音分布	18
5.3.2	復号器の閾値の再設定	20
6	まとめ	25
	謝辞	26
A	付録	28

1 緒論

1.1 研究の背景と目的

人間のコミュニケーション手段として最も広く使われている「言語」が情報理論の基本となる概念である。例えば、周りの騒音のために文の最初の方を聞き逃しても、聞いていた人は言いたかったメッセージを理解出来る場合がある。そのような言語の堅牢性を構築するのが通信路符号化であり、情報理論の基礎となる概念の一つである。今日、情報と呼ばれている様々なものの本質を定量的に捉え、そのための理論的な骨組みを数学的に体系化し、現代のそして未来の情報機器に欠かすことの出来ない工学的手法の基礎が与えられている。情報伝達のモデルを考える際、多くは伝えたいメッセージそのものを送信する。メッセージを小さくパケットに分割して送るとすると、パケットを一度にまとめて、圧縮して送信したり、冗長を付加して送信したり様々な方法でそのものを受信側に伝える。

Anantharam and Verdú[1] では情報はパケットの内容だけでなく、タイミングによっても送ることができると指摘されている。話し言葉の休止、電話、電子メールの時間間隔の休止等が情報を伝えるということである。タイミングとは隣り合うパケットとパケットの送信間隔のことであり、間隔にメッセージの意味を持たせることにより受信側が受け取った間隔から送信側の伝えたいメッセージを読み取ることが出来る。この単純な見解から促される当面の問題は、時間間隔による情報を組み入れて興味深い通信路モデルが構築できるかどうかである。図1のような全体の通信システムの構成で考察を行う。

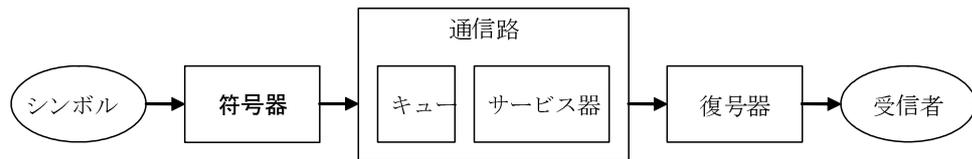


図 1: 通信システムの構成

送信対象のシンボルを符号器によって、パケットに変換し時間間隔を送信する。通信路は単一で指数分布に従い転送処理時間を決定するサービス器、パケットが待つキューにより設計される。[1]より、この通信路のキャパシティは求められている。しかしどのような方法がその上限で効率よく受信者に送られるかは分からない。そこで本研究では、その課題の部分問題として、符号器を自ら設計した時誤りを出来るだけ少なくするような復号器を設計することを目的に行う。そこで、重要となってくるのが雑音を受けて変化した時間間隔を

元の時間間隔に戻す復号器をしっかりと設計することである。まずその雑音を分布として観測できるように予想し、簡略化した通信路のモデルを提案する。後に、実験より実際の雑音を調べることで誤りを最小とする最適な復号器を設計し簡略化モデルから設計した復号器と比較、検討を行う。

1.2 本論文の構成

本論文では次のような構成をとる。2章では本研究で扱う通信システムの構成や情報として送りたい時間間隔をどのように設定したか等を説明し、予想した通信路モデルについても述べる。3章では2章で作成した復号器を用いて誤り確率を調べ、二元対称通信路と比較しながら復号器の性能についても観察する。4章では両側指数雑音の分布と実際の雑音の分布の比較し、5章では、送信した各時間間隔にかかる雑音と通信路を出た出発間隔の分布から新たな性能の良い復号器を作り、仮説した通信路、復号器と比較、考察する。6章では結論を述べる。

2 通信システム

2.1 符号器と符号語

符号化は、伝えたいシンボルを通信路に入力する形の符号語と呼ばれるものに変換するという役割がある。その動作を実装する装置が符号器である。本研究の場合は、ある入力シンボルを符号化することで対応する符号語の時間間隔に変換する動作を行う。時間間隔とはパケットを送ることで隣り合うパケットの送信間隔で決まる。本研究では、パケット自身には情報はなく大きさもないとする。時間間隔にもあらゆる長さがあり種類は無限なのだが、本研究では最もシンプルな2種類の間隔でさらに短い、長いに分かる1秒と5秒の間隔を用いる。つまり入力シンボルには、間隔1秒に対応する、間隔5秒に対応するシンボルが用いられるということである。2種類のシンボルの出現頻度を1/2とする。符号器にシンボルが入力されて変換され、情報を持たないパケットが出力される。そしてシンボルに対応する時間間隔をパケットにより通信路へ送る。このような動作を行う符号器を設計する。本研究では時間間隔の送信に着目しているので以降は符号器から通信路へ時間間隔が送られると表現する。

ここで、到着レートとは単位時間あたりに到着するパケットの平均数のことであり、パケットが通信路に到着する割合は、1秒に一つ、5秒に一つのパケットが1/2の出現確率で符号器から送信されて通信路に到着するので、全体の到着レート λ は

$$\lambda = \frac{1}{1 \times \frac{1}{2} + 5 \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \quad [\text{パケット/秒}]$$

である。

2.2 通信路

2.2.1 キューとサービス器

符号器によって送信されたパケットは通信路を介して復号器へと送られる。パケット通信を行なう際、ネットワーク内での様々な処理時間の変化や転送経路の変動等が発生する。本研究のモデルでは、図1のサービス器がこれらの処理を表していて、処理にかかる時間をサービス時間という。そのサービス時間はパラメータ μ の指数分布に従うとする。指数分布に従うサービス時間は無記憶性の性質を持ち、過去のパケットの受けたサービス時間とこれから決まるサービス時間は独立であり単純のため用いる。パラメータ μ の指数分布の期待値は $1/\mu$ であり、パラメータが大きくなると期待値は小さくなる。つまり、パラメータが大きくなるとサービス処理時間が平均的に短くなるということである。パラメータによってパケットの一秒当たりの処理されるパケット数が決まるのでパラメータ μ をサービスレート μ ともいう。

本研究では単一のサービス器が存在するとする。サービス器は一度に一つのパケットしか受けられず、サービスが終わる前到着した次のパケットが時到着順を乱すことなく待たせるキューをサービス器の手前に設置する。キューは待つパケットを全て格納できるように十分な大きさがあると仮定する。しかし、到着レート λ の大きさがサービスレート μ より大きくなると、サービス器でパケット 1 つ当たり処理する時間よりパケットが到着する時間が下回り、時間が経つにつれにキュー内のパケット数が増加していき、十分大きいキューであったとしても溢れてしまう。したがって、 λ と μ の間に次の条件が成り立っている場合だけを考える。

$$\lambda < \mu \quad (1)$$

2.2.2 キャパシティ

情報理論 [2] より、キャパシティの意味とは、通信路の雑音の分布を考慮に入れて最も情報が多く伝わるように符号語の分布を定めた時の情報伝送速度である。情報伝送速度とは一定時間当たりに受信者に転送することの出来る情報の量である。

論文 [1] より、通信路への到着レート λ が可変で、サービスレートが $\mu = 1$ と固定する「 $\cdot / M / 1$ 」キューシステムの時のキャパシティ $C(\lambda)$ が次のように求められている。「 $\cdot / M / 1$ 」とはケンドールの記号と呼ばれ、到着過程は自由、サービス器は指数分布に従い、サービス器が一つ存在するシステムを意味している。

$$\begin{aligned} C(\lambda) &= \lambda \log \frac{\mu}{\lambda} \\ &= \lambda \log \frac{1}{\lambda} \end{aligned} \quad (2)$$

λ/μ を負荷 (load) といい、条件 (1) を満たして μ を大きくしていくと負荷 λ/μ は 0 に収束していく。範囲は $0 \leq \lambda/\mu \leq 1$ となる。負荷に対するキャパシティを図 2 に示す。図からキャパシティが小さくなるのが二点見られる。 μ が大きく負荷が 0 に近い時 1 にキャパシティが小さいのは、サービス処理の早さに対して到着が遅いためキューの中は空に近い状態で誤りは少ないが単位時間伝達できる情報量自体が少ないからである。負荷が 1 付近の時は、単位時間当たりのパケット到着数と処理数が近くキューの中にはパケットがたくさん存在している。ある到着間隔で送られてきてもキューで待つことによって間隔による情報がそこで失われる。そして誤る確率も増え正しい情報をあまり伝えられなくなる。よって正しく送ることのできる伝送レートは小さくなる。

本研究では到着レート λ は $1/3$ に固定してサービスレート μ を可変にして

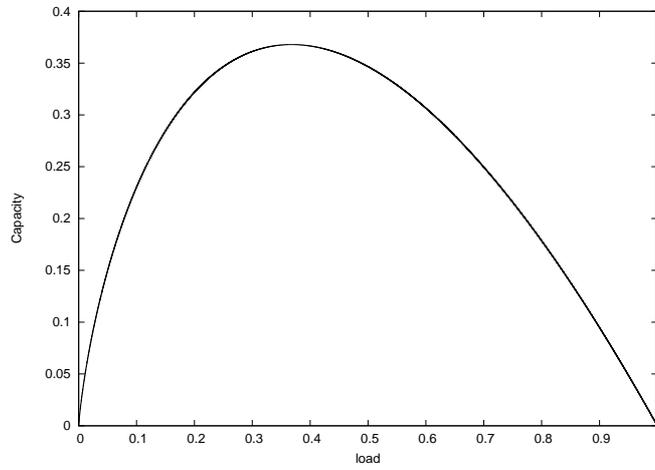


図 2: 負荷 λ/μ に対する「 $G/M/1$ 」システムのキャパシティ(λ 可変)

いるので, 式 (2) に当てはめると,

$$\begin{aligned}
 C(\mu) &= \lambda \log \frac{\mu}{\lambda} \\
 &= \frac{1}{3} \log 3\mu
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

となり, 負荷に対するキャパシティを図 3 に示す. 負荷が 0 でキャパシティは

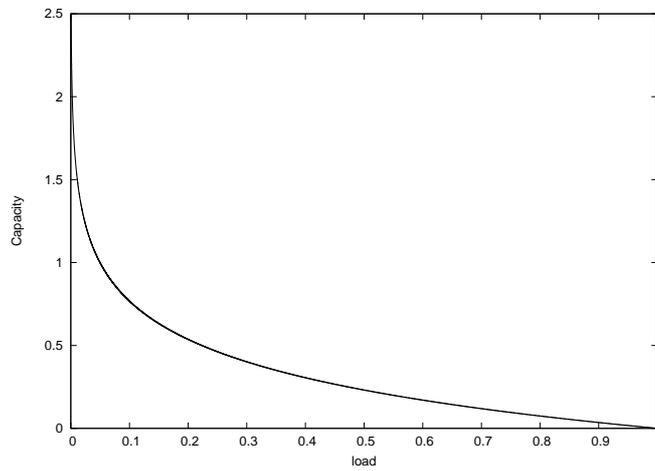


図 3: 負荷 λ/μ に対する「 $G/M/1$ 」システムのキャパシティ(μ 可変)

最大, 負荷が 1 でキャパシティは 0 に収束する. この場合, 到着レートは一定なので誤りをなくして伝送するほどキャパシティは大きくなる. μ を大きくし

てサービス時間を短くすれば, 時間間隔は変わることなく誤りは少なくなるのでキャパシティは大きくなることは理解出来る.

そこで本研究で課題となるのは, 一定の到着レートの中で, ある値のサービスレートのサービス器を用いた時, いかにかキャパシティに近づけられる伝送速度となる復号器を設計できるかである. 通信路の雑音を考察することによって最適な復号器の検証を行う.

2.2.3 通信路の到着, 出発

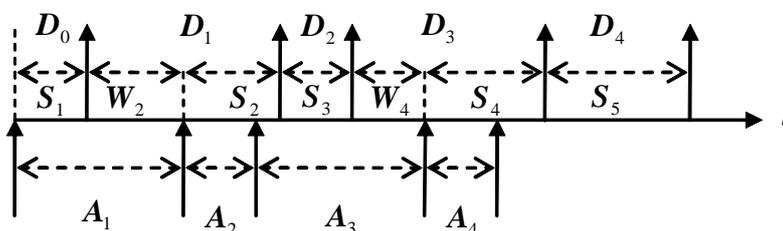


図 4: パケットの到着, 出発の様子

図 4 はパケットの通信路への到着, 通信路を介してからの出発の簡単な様子を時間軸上で表したものである. 時間軸の左端が時刻 0 であり, 下から時間軸への矢印はパケットが通信路に到着する時刻であり, その隣り合う到着時刻の間隔 A_n が送りたい時間間隔である. また時間軸から上への矢印はパケットが通信路を出発する時刻を表してあり, そして隣り合う出発時刻の間隔 D_n を出発間隔という. ただし, D_0 は最初のパケットの出発時刻であって, 到着間隔と対応する出発間隔ではないので, チェックすべき出発間隔は D_1 からである. 図 4 の場合だと 5 つのパケットによって, 4 つの時間間隔を送ったことになる. 通信路にはサービス器があり, パケットが到着した時にサービスを受けているパケットがいなければ到着と同時にサービスを開始する. しかし, 既にパケットが存在する時, キューで順番待ちをしてサービス順が回ってくるのを待つ. サービス器に入ったパケットは指数分布に従って S_n 秒間のサービス処理を受ける. また, サービス処理がパケットの到着の早さを上回った時, 通信路内に何も無い状況が起こることがある. 図 4 では, 2 つ目, 4 つ目のパケットの到着を待つ時間が存在している. その空である時間をアイドル時間といい, W_n で表している. このように, 通信路ではサービス時間や待ち時間, アイドリング時間によって送信した到着間隔が影響を受け, 出発間隔が変化する. それらの時間間隔の変化の要因となるものを雑音と呼ぶ. 雑音を N_n で表すと

すると, N_n は出発間隔 D_n から到着間隔 A_n を引いた値と定義される.

$$N_n = D_n - A_n \quad (D_n, A_n > 0) \quad (4)$$

2.2.4 簡略化通信路

図4で通信路内で起こる様子が把握出来たのだが, その到着間隔に影響を与える実際の雑音の分布は现阶段では分からない. そこで, 実際の通信路で起きている現象を簡略化し, 次の図5のようなパケットの発着モデルを考える. このモデルでは到着したどのパケットもキューで待たされることなく即座に

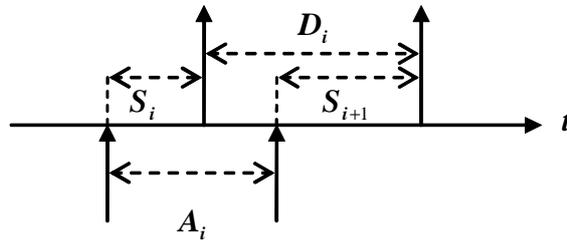


図 5: 簡略化通信路

サービスを受けてサービス時間後に出発する. つまり, サービス器が無限に存在する通信路で Kendall の記号で表すと $\cdot / M / \infty$ となる. そうすると, 出発間隔 D_i は

$$D_i = A_i + S_{i+1} - S_i \quad (5)$$

と表される. これより, 到着間隔 A_i がこの通信路を通して出発間隔 D_i に変化する要因となるのが二つのサービス時間 S_i, S_{i+1} であることが分かる. この時雑音は式 (4) より

$$N_i = S_{i+1} - S_i \quad (6)$$

となる. したがって N_i の分布を, 前後のサービス時間から求めることが出来る.

2.2.5 簡略化通信路における雑音の分布

ここで, 式 (6) で導入した雑音の分布を算出する.

サービス時間 S_i は負にはならないが $S_{i+1} - S_i$ は負になる可能性があり, 取りうる値の範囲は $-\infty$ から ∞ である. またサービス時間はパラメータ μ の指数分布で決まり, 互いに独立している.

パラメータ μ の指数分布の確率密度関数は,

$$p(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \mu e^{-\mu x} & x \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

である。したがって、 N_i の分布は次のように求められる。

$$\begin{aligned} P(N_i = x) &= P(S_{i+1} - S_i = x) = \int_{-\infty}^{\infty} P(S_{i+1} = y)P(S_i = y - x)dy \\ &= \int_0^{\infty} \mu e^{-\mu y} P(S_i = y - x)dy \end{aligned}$$

S_i は正より、 $y - x > 0$ つまり $y > x$ である。 x の範囲は、 $-\infty < x < \infty$ であるので

(i) $x < 0$ の時

$$\begin{aligned} P(S_{i+1} - S_i = x) &= \int_0^{\infty} \mu e^{-\mu y} \mu e^{-\mu(y-x)} dy \\ &= \mu^2 \int_0^{\infty} e^{-\mu(2y-x)} dy \\ &= \mu^2 \left[-\frac{1}{2\mu} e^{-\mu(2y-x)} \right]_0^{\infty} \\ &= \mu^2 \left(-\frac{1}{2\mu} e^{-\infty} + \frac{1}{2\mu} e^{\mu x} \right) \\ &= \frac{\mu}{2} e^{\mu x} \end{aligned}$$

(ii) $x \geq 0$ の時

$$\begin{aligned} P(S_{i+1} - S_i = x) &= \int_x^{\infty} \mu e^{-\mu y} \mu e^{-\mu(y-x)} dy \\ &= \mu^2 \int_x^{\infty} e^{-\mu(2y-x)} dy \\ &= \mu^2 \left[-\frac{1}{2\mu} e^{-\mu(2y-x)} \right]_x^{\infty} \\ &= \mu^2 \left(-\frac{1}{2\mu} e^{-\infty} + \frac{1}{2\mu} e^{-\mu x} \right) \\ &= \frac{\mu}{2} e^{-\mu x} \end{aligned}$$

(i),(ii) より、 $-\infty < x < \infty$ に対して雑音の分布は

$$P(N_i = x) = \frac{\mu}{2} e^{-\mu|x|} \quad (8)$$

この雑音の確率密度関数(8)は図6のようになる。サービスレート μ を 0.35, 0.6, 2 と変えて表示した。全てのサービスレート μ の時で期待値は 0 である。また、サービスレート μ が小さくなるにつれて分散が大きくなっていき、大きなレートでは雑音の値が 0 付近に集中し、小さなレートでは 0 付近でない雑音が発生する確率が増えるということが分かる。この分布は 0 を中心として対称に指数的に広がる分布なので、以降この分布を両側指数雑音の分布と呼ぶ。

以降では、この雑音の分布から到着間隔の受ける影響を調べて最も良いとされる復号器を設計する。またこの簡略化通信路がどれほど信頼性のあるものか実際の通信路と比較して調べる。

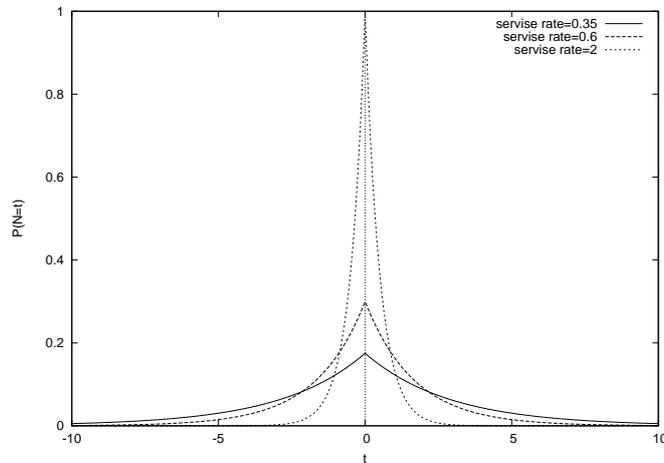


図 6: 簡略化通信路における雑音の分布 ($\mu = 0.35, 0.6, 2$)

2.3 復号器

2.3.1 復号化

符号化と逆の動作を復号化といい, それを実現する装置を復号器という. 復号器が元の符号語を正しく再現するためには, 定められた手続きにしたがって動作しなければならない.

1 秒と 5 秒の 2 種類の符号語の確率がそれぞれ $1/2$ であるということと, 求められた雑音の分布から復号器を設計する. 復号器で観測する出発間隔を復号化により対応する元の到着間隔が 1 秒と 5 秒どちらだったかを推定して復号シンボルを出力する. その推測がより正しく行われる復号方法を以下の 2 つの方法から導く.

2.3.2 最尤法による閾値算出

復号器で観測するパケット間隔から最尤法を用いて符号器からの出発間隔を推定する. 最尤法とは, 観察された出来事が理論的に最も起こりやすいような値を観察されたデータから推測する方法論である. 通信路からの出発間隔に対応する到着間隔が 1 秒である確率と 5 秒である確率の尤度比を取ることで, 確率の高いシンボルに復号するという基準となる閾値一点を求める. 到着間隔, 出発間隔をそれぞれ確率変数 X, Y とすると

$$X \in \{1, 5\}, Y \in (-\infty, \infty)$$

であり. また雑音を確率変数 N とすると,

$$N \in (-\infty, \infty)$$

となり. 分布は

$$P\{N = x\} = \frac{\mu}{2} e^{-\mu|x|} \quad (9)$$

で表される. X, Y, N の関係は式 (4) より

$$Y = X + N \quad (10)$$

である. 尤度比をとると

$$\begin{aligned} \frac{P\{X = 1|Y = y\}}{P\{X = 5|Y = y\}} &= \frac{P\{Y = y|X = 1\}P\{X = 1\}/P\{Y\}}{P\{Y = y|X = 5\}P\{X = 5\}/P\{Y\}} \\ &= \frac{P\{Y = y|X = 1\}}{P\{Y = y|X = 5\}} \\ &= \frac{P\{X + N = y|X = 1\}}{P\{X + N = y|X = 5\}} \\ &= \frac{P\{N = y - 1\}}{P\{N = y - 5\}} \\ &= \frac{\frac{\mu}{2} e^{-\mu|y-1|}}{\frac{\mu}{2} e^{-\mu|y-5|}} \\ &= e^{-\mu(|y-1|-|y-5|)} \end{aligned} \quad (11)$$

となる. ただし 2 つ目の等式で $P\{X = 1\} = P\{X = 5\} = 1/2$, 3 つ目の等式で式 (10) を用いた. 尤度比が 1 より大きくなるかどうかは, 式 (11) の指数の正負により判断できる. したがって, $\mu > 0$ より

$$|y - 1| - |y - 5| < 0 \implies \text{尤度比} \frac{P\{X = 1|Y = y\}}{P\{X = 5|Y = y\}} > 1 \implies \text{復号シンボル} = 1 \quad (12)$$

$$|y - 1| - |y - 5| > 0 \implies \text{尤度比} \frac{P\{X = 1|Y = y\}}{P\{X = 5|Y = y\}} < 1 \implies \text{復号シンボル} = 5 \quad (13)$$

のように復号シンボルを判断できる. ここで

$$|y - 1| - |y - 5| = \begin{cases} -4 & y < 1 \\ 2y - 6 & 1 \leq y \leq 5 \\ -4 & y > 5 \end{cases}$$

となる. このグラフを図 7 に示す. これより $|y - 1| - |y - 5|$ は $y = 3$ の時 0 となる. よって, $y < 3$ ならば関係 (12) を満たすので復号器で得られた出発間隔は復号シンボル 1 秒と復号される. また, $y > 3$ ならば関係 (13) を満たし復号シンボルは 5 秒と復号される. すなわち 3 秒を閾値として復号シンボルが決められる. 出発間隔が 3 秒となる確率は 0 であるため閾値判断に等号は入れない.

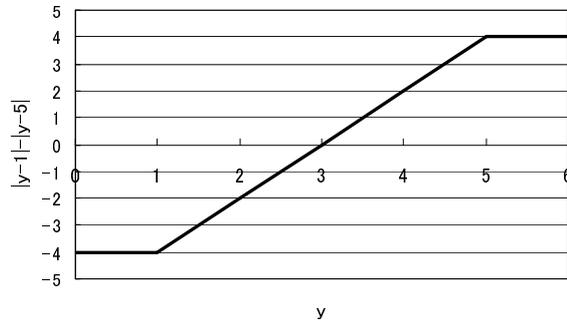


図 7: 尤度比の判定

2.3.3 出発間隔の分布による閾値算出

尤度比を計算することによって 3 秒を閾値として復号シンボルが決まることがわかったがここでは出発間隔の分布のグラフからそのことを導く. 本質的には 2.3.2 節で行ったことと同じである. 式 (8) より, 通信路への到着間隔が 1 秒または 5 秒の時の出発間隔時間の分布は図 8 のようになる. ただしサービスレート μ は 1 である. 左側の分布が到着間隔が 1 秒である時の出発間隔の

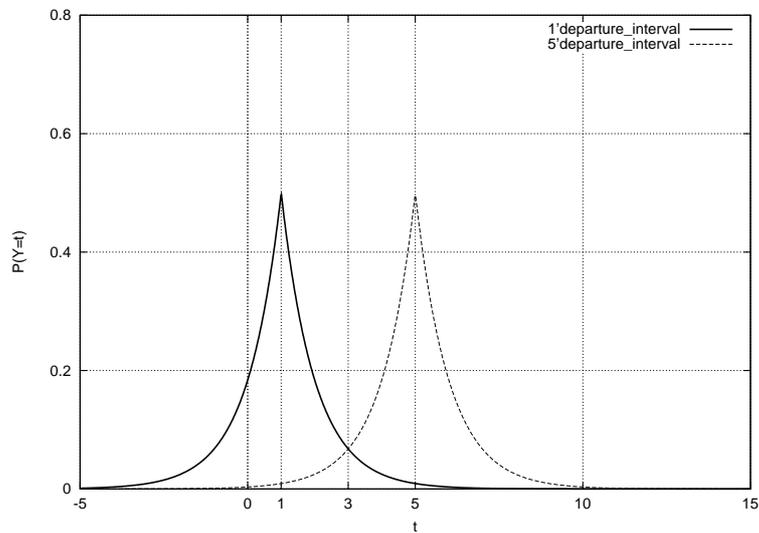


図 8: 出発間隔の分布 ($\mu=1$)

分布で, 右側が到着間隔が 5 秒の時の出発間隔の分布である. 簡略式通信路の雑音の分布は式 (8) なので両者分散も等しく同じ形状となる. よって両者の分

布は $t = 3$ で交点を持ち, 左右対称になる. サービスレートによって分布の大きさは異なるが, $t = 3$ で交点を持つということはいずれのレートでも同じである. 3 秒以下の出発間隔時間が得られた場合, 5 秒が送られた時の出発間隔分布より 1 秒が送られた時の出発間隔分布の方が大きく, つまり出発間隔時間 t が $t < 3$ の時は到着間隔が 1 秒であった確率の方が大きいということがグラフからわかる. そして $t > 3$ の時は到着間隔が 5 秒であった確率の方が大きくなる. よってこの方法からも閾値を 3 秒とするのが最適であることがわかる.

したがって, この通信システムでの復号器は閾値が 3 の復号器と設計する. これは簡略式通信路の雑音分布から最もよいとされて作られた復号器なので, 簡略化に基づく復号器と呼ぶ.

3 二元対称通信路か否か

3.1 目的

通信路には雑音が介入し、その影響は入力シンボルから出力シンボルへの推移確率で表される。入力される符号語シンボルが 0 と 1 の 2 種類 $\{0,1\}$ で、出力も $\{0,1\}$ である通信路で、入出力シンボルの間の推移確率が互いに p と等しく図 9 のように表すことが出来る通信路を二元対称通信路 (BSC と略記される) という。

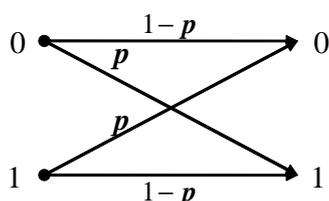


図 9: 二元対称通信路の通信路線図

本研究では、符号語は時間間隔が 1 と 5 となるように大きさのないパケットを送信する。それを図 1 のような通信システムに通し受信者は復号された時間間隔 1 または 5 を得る。復号器は 2.3.2 節で求めた閾値 3 で設計したものをを用いる。入力の到着間隔と出力の復号シンボル共に $\{1,5\}$ となる通信システムであるので、復号後反転したシンボルが受信されることがある。その確率を推移確率、または誤り確率という。この通信システムが図 9 のような BSC とみなせるのか興味がある。BSC は雑音のある通信路としては最も基本的で解析が容易のため、理論研究でよく使われている。

3.2 実験方法

2 章で設定した通信システムが BSC とみなせるのかどうか、それぞれの推移確率を調べる。

図 10 のように時間間隔が $1 \rightarrow 5$, $5 \rightarrow 1$ と推移する確率を ϵ, ϵ' とする。入力の到着間隔を 1 と 5 の 2 種類を $1/2$ の確率で十分なサンプル数の 10 万個送信する。

また、到着レート λ は $1/3$ [パケット/秒] と一定なので、式 (1) を満たすようにサービスレート μ を変化させ様々な通信路内の混み具合の場合を調べる。負荷 λ/μ は $0 \leq \lambda/\mu \leq 1$ であり、負荷が 1 に近い時、キューは到着したパケットで混雑している。負荷が 0 に近い時、キューは空いている。様々な負荷の時の推移確率を調べる。

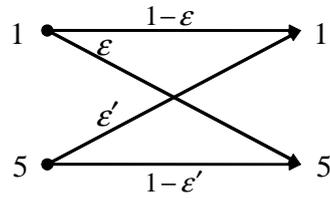


図 10: 入出力が $\{1,5\}$ の時の通信路線図

3.3 実験結果

サービスレート μ については, 0.35, 0.45, 0.6, 0.8, 1, 2 の 6 点を取る. 負荷 λ/μ は順に, 0.952, 0.741, 0.555, 0.417, 0.333, 0.167 となる. 各誤り確率 ϵ, ϵ' と全体の誤り確率 P を計測した. その結果を表 1 に示す. またレート別の誤り確率の棒グラフを図 11 に示す.

μ	負荷	P	ϵ	ϵ'
0.35	0.952	0.484320	0.357752	0.610483
0.45	0.741	0.379600	0.332051	0.426997
0.6	0.555	0.270470	0.260116	0.280791
0.8	0.417	0.181930	0.151362	0.212400
1	0.333	0.121990	0.103546	0.140375
2	0.167	0.016390	0.013762	0.019010

表 1: 各サービスレートの誤り確率

サービスレートを大きくしていくとそれぞれの誤り確率 ϵ, ϵ' は小さくなるのが分かる. サービスレートが大きくなると平均サービス処理時間は短くなり, パケットが通信路に入っては直ぐに出て行くので送った時間間隔 $1,5$ にも影響をあまり与えない. よって誤りが少なくなることが分かる.

この通信路に 2 種類の到着間隔 $1,5$ を送った時, ϵ, ϵ' はどのサービスレート μ の時も $\epsilon \neq \epsilon'$ であった. 本来 BSC であればどのレートの時も必ずお互いの推移確率は等しくなり, $\epsilon = \epsilon'$ となるはずなので, この通信路は完全な BSC であるとは言えない. しかしサービスレートを大きくすれば, ϵ と ϵ' の差は非常に小さくなることから BSC に近づくと考えられる. このように全体の誤りを少なくしていった結果それぞれの誤り確率も少なくすることが出来, その時 BSC とみなせると考えられる.

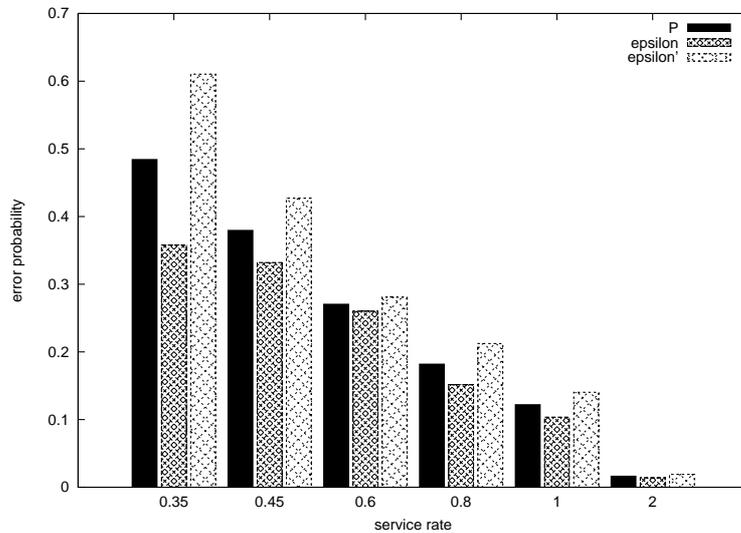


図 11: 各サービスレートの誤り確率

4 雑音の分布の比較

4.1 目的

これまででは通信路内の様子を図 5 のように簡略に考えて、両側指数雑音の分布 (8) を求めた。そしてそのような雑音をもつ通信路に到着時間間隔の 1 秒と 5 秒を送信した時の最適な復号器を設計した。そこで 4 章では実際の通信路の雑音を観測し、簡略化通信路の両側指数雑音の分布との比較をする。

4.2 実験方法

前章の実験同様、入力の到着間隔を 1 と 5 の 2 種類を $1/2$ の確率で 10 万個送信する。式 (4) から

$$N_n = D_n - A_n \quad (n = 1, 2, \dots, 100000)$$

のように雑音は定義されているので、実際の通信路への到着間隔と通信路を経た後の出発間隔から 10 万個全ての雑音を求める。このような測定を式 (1) を満たすサービスレート $\mu = 0.8, 1, 2$ に対して行なう。

4.3 実験結果

前章の実験で推移確率を調べた時 $\mu = 0.35$ で約 5 割、 $\mu = 0.45$ で約 4 割、 $\mu = 0.6$ で約 3 割誤るという結果が得られた。この通り $\mu \leq 0.6$ の時は性能が

悪く通信路として実用的でない判断し、今後は $\mu = 0.8, 1, 2$ で検討する。実際に得られた雑音の時間の確率密度関数と、両側指数雑音の分布を図 12,13,14 で各レート別で比較する。両側指数雑音の分布は滑らかな点線、実際の雑音分布は実測値を線で結んで示している。いずれのサービスレートの時も、両分布

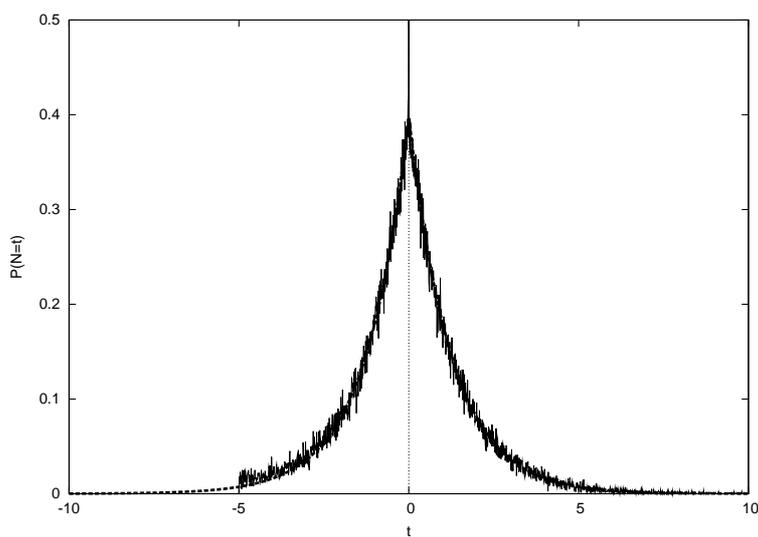


図 12: 雑音の分布比較 ($\mu=0.8$)

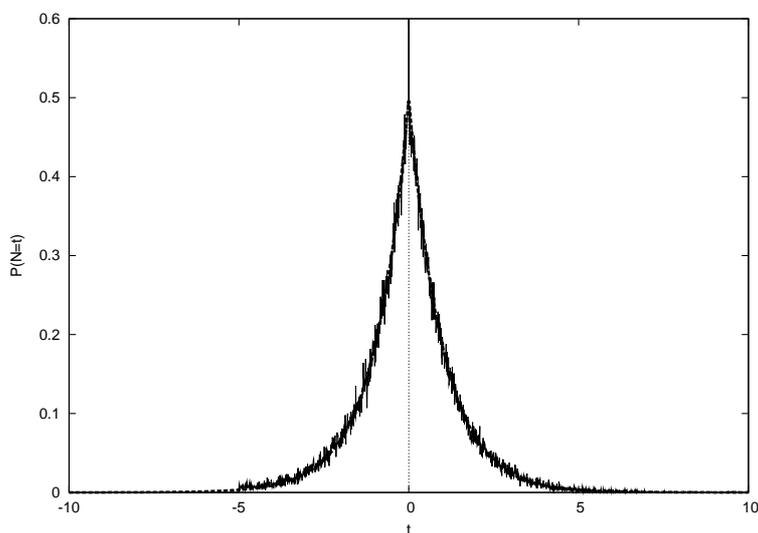


図 13: 雑音の分布比較 ($\mu=1$)

がほぼ一致する結果となった。 μ の値によらず、実際の雑音の分布が -5 秒より

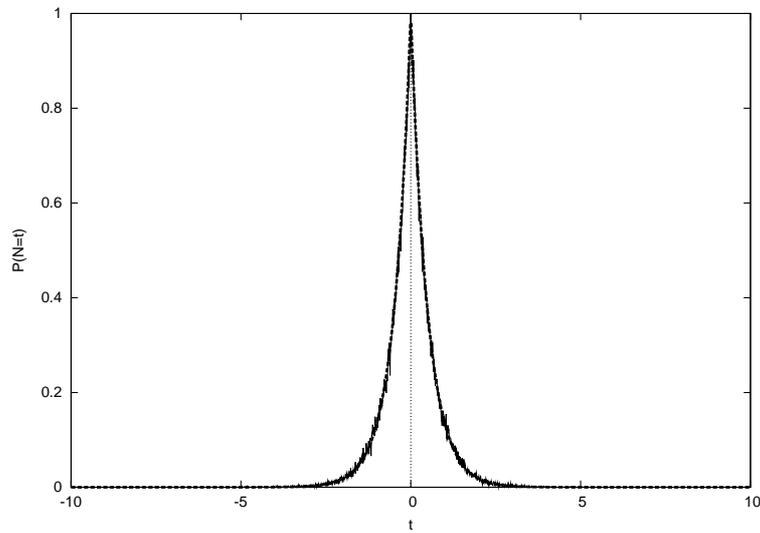


図 14: 雑音の分布比較 ($\mu=2$)

小さくはならない. それは, 出発間隔時間は負とならないため式 (4) より到着間隔である $A_n = 1, 5$ で差を取っても雑音 N_n は -5 秒より小さくはならないのである.

両側指数雑音の分布の期待値, 分散は

$$\begin{cases} E[X] = 0 \\ V[X] = \frac{2}{\mu^2} \end{cases} \quad (14)$$

である. 計算過程は付録に示す.

これに $\mu = 0.8, 1, 2$ を代入した値を理論値と呼び, 実測値の平均, 分散と比較する. 表 2, 3 にそれぞれ平均値と分散を示す. 表 2 から期待値の理論値は

μ	実測値 $E[X]$	理論値 $E[X]$
0.8	-1.102×10^{-5}	0
1	-8.816×10^{-6}	0
2	-4.408×10^{-6}	0

表 2: 期待値の比較

どのレートでも 0 であり, 実測値の期待値のほぼ 0 という結果である. 表 3 の分散においても理論値に非常に近い値である. よってこの結果から, 実際の通信路と簡略化通信路内の様子が非常に似ているので, 実際の雑音の分布から設計する復号器と簡略化通信路に基づく復号器の性能も近いのではないかと推測できる. 5 章で検証を行う.

μ	実測値 $V[X]$	理論値 $V[X]$
0.8	2.983	3.125
1	1.974	2.000
2	0.508	0.500

表 3: 分散の比較

5 実際の雑音の分布に基づく復号器の設計

5.1 目的

4章で両側指数雑音の分布と実際の雑音は、非常に近い分布をもつという結果を得た。仮説雑音は到着間隔に関係なく1秒,5秒それぞれに同一の雑音がかかる。よって図8のように到着間隔を送った時の出発間隔分布両方が同一分布となり、閾値が求まった。しかし、1秒,5秒それぞれにかかる実際の雑音分布は同一なのだろうか?そこで、実際の雑音の分布を測定し、それを元にさらにより復号器を作ることができるのかを検証する。

5.2 実験方法

まず実際の通信路に到着間隔1秒が送られた時の雑音と到着間隔5秒時の雑音の分布を知る。4章同様、雑音の定義(4)から10万個の雑音時間を得る。その内、対応する送信された到着間隔別に雑音を分け、到着間隔1,5にそれぞれかかる雑音分布を求める。簡略化通信路では到着時間に関係なく期待値が0で同一の両側指数雑音がかかるが、実際の雑音分布の期待値も調べる。

そして到着間隔時間1,5を送った時の実際の出発間隔分布で表す。さらに性能の良い新たな復号器を設計するために誤り確率が最も小さくなる閾値を見つける。

5.3 実験結果

5.3.1 到着間隔1,5にそれぞれかかる雑音分布

図15,16,17は雑音の分布で表4は各雑音分布の平均値を求めた結果である。どのレートの場合も左側の分布が到着間隔が5秒である時の雑音分布で、右側が到着間隔が1秒の時の雑音分布である。到着間隔が1秒の時の雑音分布の平均値は、分布を見ても分かるように0秒より大きくなり、5秒の時の雑音分布は反対に0より小さくなった。また、全ての図において、到着間隔1秒にかかる雑音は-1より、到着間隔5秒にかかる雑音は-5より小さくなることはない。それは雑音の定義(4)から出発間隔 D_n は必ず0以上であり、到着間隔1,5か

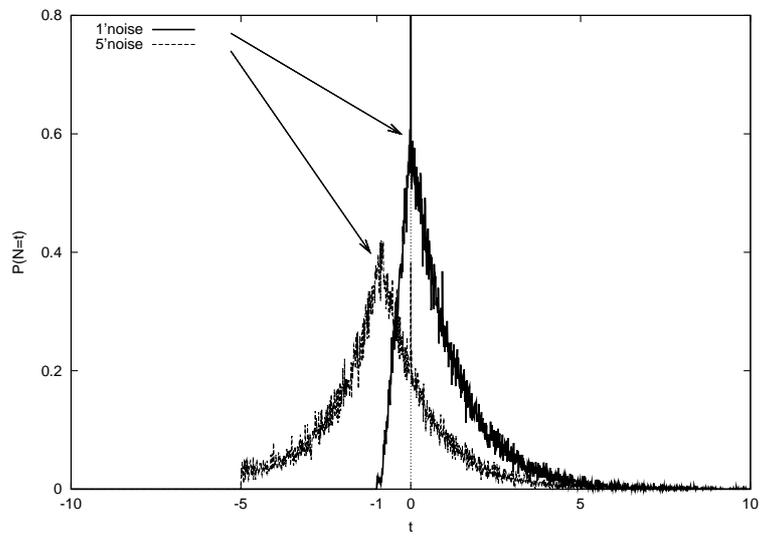


図 15: 到着間隔 1,5 にかかる雑音分布 ($\mu=0.8$)

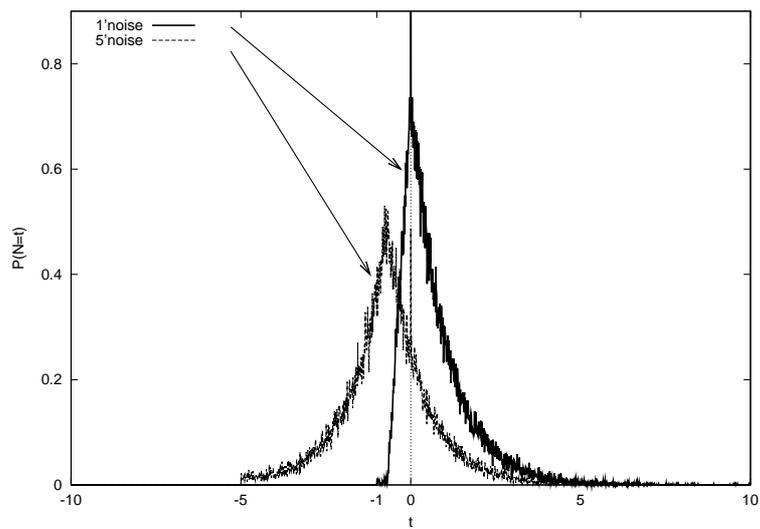


図 16: 到着間隔 1,5 にかかる雑音分布 ($\mu=1$)

μ	1 にかかる雑音の分布 $E[X]$	5 にかかる雑音の分布 $E[X]$
0.8	0.859	-0.856
1	0.694	-0.692
2	0.349	-0.348

表 4: 到着間隔 1,5 にかかる各雑音分布の期待値

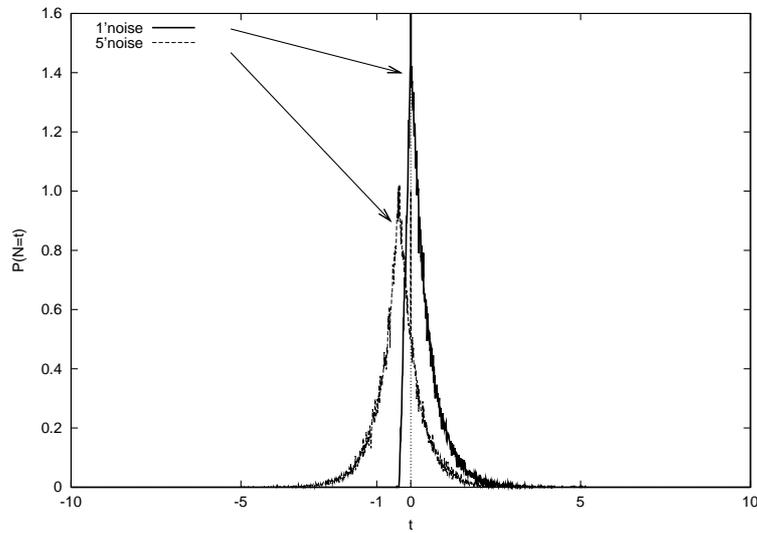


図 17: 到着間隔 1,5 にかかる雑音分布 ($\mu=2$)

ら引いた雑音は, それぞれ $-1, -5$ よりは小さくならないためである. また, 平均値は $t = 0$ 軸でおおよそ対称な値をとっている. これは前章での表 2 の 1, 5 を区別しない全体の雑音分布の平均値が約 0 となることからわかる. 他に, μ が大きくなるにしたがい平均値の絶対値は小さくなっている. それは, μ を大きくしていくとサービス時間を短くなり, 送った時間間隔はあまり変わることなく, 式 (4) より雑音は 0 に近い値とることが多くなるからである.

5.3.2 復号器の閾値の再設定

雑音の定義 (4) を変形し,

$$D_n = N_n + A_n$$

より, 求めた各雑音時間に到着間隔時間の 1 秒または 5 秒を加えることで, それぞれの出発間隔時間が表される. 図 8 と同様に $\mu = 0.8, 1, 2$ の時の出発間隔分布を図 18, 図 19, 図 20 に示す.

左側の分布が到着間隔が 1 秒である時の出発間隔分布で, 右側が到着間隔が 5 秒の時の出発間隔分布である. 簡略化通信路を用いた時の出発間隔の分布の図 8 と比べると, それぞれの分布の平均が内側に寄っていることが分かる. その理由は以下である. 実際の通信路の場合, サービス器は一つしかなくキューにパケットが待つという状況が多々発生することになる. その時, ある時間間隔で通信路へ到着してもその間隔は失われるので, 通信路からの出発時間はサービス時間のみに依存する. よって, 出発間隔はサービス時間の期待値であ

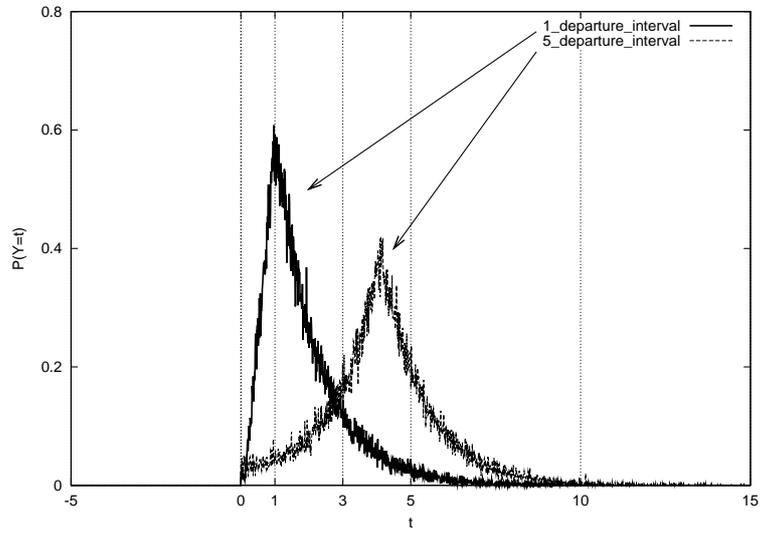


図 18: 出発間隔時間分布 ($\mu=0.8$)

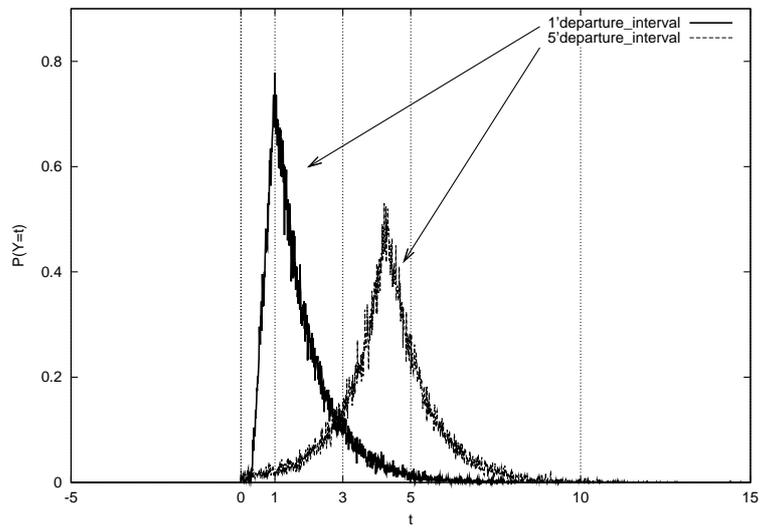


図 19: 出発間隔時間分布 ($\mu=1$)

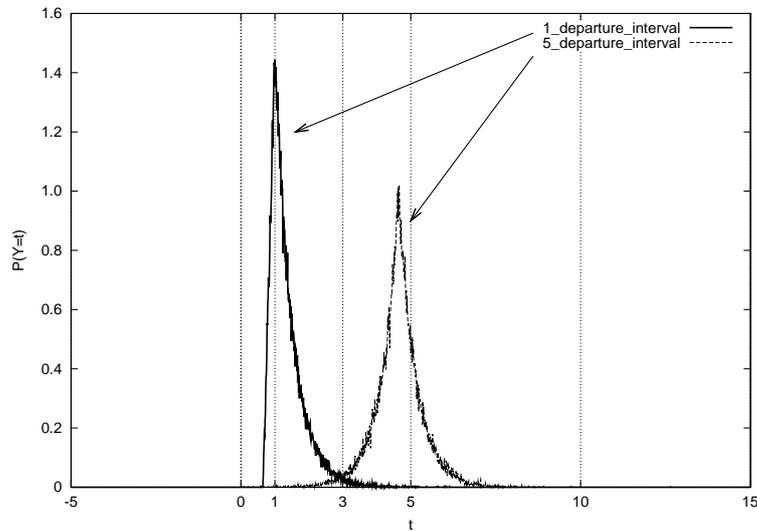


図 20: 出発間隔時間分布 ($\mu=2$)

る $1/\mu$ の値に近づくので、出発間隔の分布も期待値に若干寄る傾向があるのである。

ここで、2.3.3 節で行ったように新たな閾値を導出したい。そのためには交点の時間軸を調べる必要があるが、この実際の分布線は実測値で滑らかでないため知りたい交わる一点を求めることが出来ない。しかし図からおおよその位置だが、 $t=3$ より少し小さなところで交わると読み取れるのでその付近の時間を閾値とし、その閾値の復号器を用いた通信システムで 3 章の実験と同様に誤り確率を測定した。そして閾値を変化させて誤り確率の測定を繰り返し、誤り確率が最も小さくなる時の閾値を調べた。そのような時の復号器が最も性能が良いということが言えるので、それを基に各サービスレートの通信システムでの最適な復号器を決定する。図 18,19,20 から、サービスレートが大きいほど閾値となる交点は $t=3$ に近くなっていることが分かる。まず、3 章の結果で得た復号器を用いた時の誤り確率を、次に閾値を 0.01 ずつ変化させて最小となる誤り確率を調べた結果を表 5,6,7 に示す。

表 5 より $\mu=0.8$ の時の通信システムにふさわしい復号器の閾値は 2.74 である。 $\mu=1$ の時は 2.78、 $\mu=2$ の時は 2.94 と 2.95 で同じ値で最小となったのでその中間で誤りを調べると 2.945 で最小となった。閾値をこれ以上に細かく変化させるとさらに誤り確率が小さくなる値を見つけられるだろうが、少数第二位で十分として調べた。 $\mu=2$ は特別に間の中点一点を調べ最小値を得た。この到着間隔 1,5 にそれぞれかかる雑音分布を調べる実験によって誤り確率をより下げられる閾値を求めることが出来る。その新たな閾値で誤り確率を最小とすることが出来るので、最適な復号器を設計することが出来た。

閾値	誤り確率
2.72	0.17961
2.73	0.17943
2.74	0.17928
2.75	0.17942
2.76	0.17950
2.77	0.17939

表 5: 閾値を変化させた時の誤り確率 ($\mu=0.8$)

閾値	誤り確率
2.77	0.12013
2.78	0.12004
2.79	0.12007
2.80	0.12013
2.81	0.12018
2.82	0.12028

表 6: 閾値を変化させた時の誤り確率 ($\mu=1$)

閾値	誤り確率
2.91	0.01652
2.92	0.01611
2.93	0.01613
2.94	0.01608
2.945	0.01606
2.95	0.01608

表 7: 閾値を変化させた時の誤り確率 ($\mu=2$)

新たに発見した閾値の誤り確率が表 1 で示した簡略化に基づく復号器の時より小さくなり性能が上がったと述べたが、どれほどよくなったのか調べる。その歩合を向上率と決め、

$$\text{向上率} = \frac{\text{二つの誤り確率の差}}{\text{閾値 3 時の誤り確率}} \times 100 \text{ [\%]}$$

と定義する。各向上率を次の表 8 に示す。新たな閾値で誤り確率を下げるこ

μ	閾値 3 時の誤り確率	新閾値時の誤り確率	向上率
0.8	0.18193	0.17928	1.46
1	0.12199	0.12004	1.60
2	0.01639	0.01606	2.01

表 8: 誤り確率の向上率

が出来たのだが、この結果から向上率は非常に小さく、あまりよくなっていないことが分かる。しかし逆に考えれば、最初に算出した閾値 3 の復号器でも最も誤り確率を小さく出来る閾値の復号器とそこまで変わらない性能であると言え、この通信システムの復号器は閾値 3 の簡略化に基づく復号器を十分に利用出来るのである。

6 まとめ

通信手段として通信路に送られるパケットの間隔に着目し、パケット送信間隔時間に情報意味を持たせると [1] で指摘された。そこで図 1 のような一般的な通信システムを考え、サービス器や時間間隔に生じる雑音に様々な設定を与えた。まず送信するシンボルは 2 種類とし、符号器でパケットを 1 秒と 5 秒の送信間隔 (通信路への到着間隔) を確率 $1/2$ で出現させて十分なサンプル数 10 万パケットを送信した。そして指数分布に従って処理時間が決定する単一のサービス器と待ち行列を作るキューで構成される通信路を考える。本研究で用いた符号器では伝送レート (到着レート) が一定であることから、その場合で誤りをできるだけ少なくするシステムがどうなるか調べた。

最初から通信路の様子を表すことが出来ないで、まず簡略化通信路を図 5 と提案し、通信路に送り込んだ到着間隔に影響を与える雑音を分布式 (8) と求めた。そのような通信路を考えた時に誤りを出来るだけ小さく抑える最適な復号器を最尤法によって設計した。そしてこの簡略化通信路に基づく復号器を用いて通信システムが二元対称通信路とみなせるかどうか調べるためそれぞれの推移確率を観察した。推移確率は等しくならず BSC とみなせるとはいえないかったが、サービスレートを大きくした時、それぞれの誤りが少なくなり差が小さくなることから、その時 BSC に近づくと考えられた。

4 章の実験から $\mu = 0.8$ 以上の実際の雑音分布と両側指数雑音の分布を比較するとほぼ一致する結果が得られた。 $\mu = 0.8$ 以下では仮説分布との誤差が大きくなっていったが、 0.3 以上の確率で誤りが生じてしまい通信路としては使い物にならないので考慮しないものとした。次に 5 章では到着間隔 1.5 に別々にかかる雑音分布からそれぞれの出発間隔時間分布を調べ、各サービスレートにおける誤り確率が最も小さくなる最適な復号器を求めた。確かに良くはなっているのだが表 8 よりあまり変化はなかったと述べる方が近いと思われる。以上の雑音分布の比較や新たな閾値の復号器と簡略化に基づく復号器の性能から、この通信システムでは最初考えた簡略化通信路に基づく復号器で十分通用すると結論づけた。

パケットの到着間隔によって情報をおくるモデルとしての今後の課題はまだまだたくさんある。今回は確率 $1/2$ で出現させた 1 秒と 5 秒の送信間隔の場合でしか考えられなかったが、各時間間隔の使用頻度はいくつが最適なのか、また異なる時間間隔を用いた場合はどうなるか、時間間隔の種類を増加させた場合と、たくさんの送信パターンが考えられる。本研究では送信間隔で情報が送れると考え、パケットの大きさは考えず通信モデルを作成した。この提案と従来からたくさん存在するパケットの内容が情報を伝える通信モデルと組み合わせてモデルが考えられるかどうかに興味がある。

謝辞

本研究を行うにあたり、数多くの助言、指導をしていただいた指導教員の西新幹彦准教授、また西新研究室の皆様へ感謝の意を表す。

参考文献

- [1] Venkat Anantharam, Sergio Verdú, “Bits Through Queues,” IEEE Transactions on Information Theory, vol. 42, no.1, January 1996.
- [2] 甘利俊一, 情報理論, ダイヤモンド社, 1983.

A 付録

両側指数雑音の分布の期待値・分散を求める. 両側指数雑音の確率密度関数は

$$P(x) = \frac{\mu}{2} e^{-\mu|x|}$$

であるので期待値は

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} xP(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{\mu}{2} e^{-\mu|x|} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 x \frac{\mu}{2} e^{\mu x} dx + \int_0^{\infty} x \frac{\mu}{2} e^{-\mu x} dx \\ &= E_1 + E_2 \end{aligned}$$

となり, ここで

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_{-\infty}^0 x \frac{\mu}{2} e^{\mu x} dx \\ &= \frac{\mu}{2} \left(\left[x \frac{e^{\mu x}}{\mu} \right]_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \frac{e^{\mu x}}{\mu} dx \right) \\ &= \frac{\mu}{2} \left(0 - \frac{1}{\mu} \left[\frac{e^{\mu x}}{\mu} \right]_{-\infty}^0 \right) \\ &= \frac{\mu}{2} \left(-\frac{1}{\mu^2} (1 - 0) \right) \\ &= -\frac{1}{2\mu} \end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned} E_2 &= \int_0^{\infty} x \frac{\mu}{2} e^{-\mu x} dx \\ &= \frac{\mu}{2} \left(\left[x \frac{e^{-\mu x}}{-\mu} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu x}}{-\mu} dx \right) \\ &= \frac{\mu}{2} \left(0 + \frac{1}{\mu} \left[\frac{e^{-\mu x}}{-\mu} \right]_0^{\infty} \right) \\ &= \frac{\mu}{2} \left(-\frac{1}{\mu^2} (0 - 1) \right) \\ &= \frac{1}{2\mu} \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} E[X] &= E_1 + E_2 \\ &= -\frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2\mu} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる. 分散は

$$\begin{aligned} V[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 P(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 \frac{\mu}{2} e^{-\mu|x|} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 (x - 0)^2 \frac{\mu}{2} e^{\mu x} dx + \int_0^{\infty} (x - 0)^2 \frac{\mu}{2} e^{-\mu x} dx \\ &= V_1 + V_2 \end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_{-\infty}^0 (x - 0)^2 \frac{\mu}{2} e^{\mu x} dx \\ &= \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^0 x^2 e^{\mu x} dx \\ &= \frac{\mu}{2} \left(\left[x^2 \frac{e^{\mu x}}{\mu} \right]_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \frac{2x e^{\mu x}}{\mu} dx \right) \\ &= \frac{\mu}{2} \left(0 - \frac{2}{\mu} \int_{-\infty}^0 x e^{\mu x} dx \right) \\ &= \frac{\mu}{2} \left(-\frac{2}{\mu} \left(\left[x \frac{e^{\mu x}}{\mu} \right]_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \frac{e^{\mu x}}{\mu} dx \right) \right) \\ &= \frac{\mu}{2} \left(-\frac{2}{\mu} \left(0 - \frac{1}{\mu} \left[\frac{e^{\mu x}}{\mu} \right]_{-\infty}^0 \right) \right) \\ &= \frac{\mu}{2} \left(-\frac{2}{\mu} \left(-\frac{1}{\mu^2} (1 - 0) \right) \right) \\ &= \frac{1}{\mu^2} \end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned} V_2 &= \int_0^{\infty} (x-0)^2 \frac{\mu}{2} e^{-\mu x} dx \\ &= \frac{\mu}{2} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\mu x} dx \\ &= \frac{\mu}{2} \left(\left[-x^2 \frac{e^{-\mu x}}{\mu} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{2xe^{-\mu x}}{\mu} dx \right) \\ &= \frac{\mu}{2} \left(0 + \frac{2}{\mu} \int_0^{\infty} xe^{-\mu x} dx \right) \\ &= \frac{\mu}{2} \left(\frac{2}{\mu} \left(\left[-x \frac{e^{-\mu x}}{\mu} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu x}}{\mu} dx \right) \right) \\ &= \frac{\mu}{2} \left(\frac{2}{\mu} \left(0 + \frac{1}{\mu} \left[-\frac{e^{-\mu x}}{\mu} \right]_0^{\infty} \right) \right) \\ &= \frac{\mu}{2} \left(\frac{2}{\mu} \left(\frac{1}{\mu^2} (0+1) \right) \right) \\ &= \frac{1}{\mu^2} \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} V[X] &= V_1 + V_2 \\ &= \frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\mu^2} \\ &= \frac{2}{\mu^2} \end{aligned}$$

となる.