2.2　高次導関数

問 1.

(1) $y' = -\sin x = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$，$y'' = -\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \dfrac{2\pi}{2}\right)$，

$y''' = -\sin\left(x + \dfrac{2\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \dfrac{3\pi}{2}\right)$ なので，$y^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$　$(n = 1, 2, 3, \ldots)$ である．

(2) $y' = 2\cos 2x = 2\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$，$y'' = 2^2\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right) = 2^2\sin\left(2x + \dfrac{2\pi}{2}\right)$，

$y''' = 2^3\cos\left(2x + \dfrac{2\pi}{2}\right) = 2^3\sin\left(2x + \dfrac{3\pi}{2}\right)$ なので，$y^{(n)} = 2^n\sin\left(2x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$　$(n = 1, 2, 3, \ldots)$ である．

(3) $y' = \dfrac{(1-x)'}{1-x} = -(1-x)^{-1}$，$y'' = (-1)^2 \cdot (-1)(1-x)^{-2}$，$y''' = (-1)^3 \cdot (-1)(-2)(1-x)^{-3}$ なので，$y^{(n)} = (-1)^n \cdot (-1)(-2)\cdots\{-(n-1)\}(1-x)^{-n} = (-1)^{2n-1}(n-1)!(1-x)^{-n}$ である．これより，$y^{(n)} = -\dfrac{(n-1)!}{(1-x)^n}$　$(n = 1, 2, 3, \ldots)$ である．

問 2.

(1) $u = \cos 2x$，$v = x$ とおくと，$u^{(n)} = 2^n\cos\left(2x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$　$(n = 1, 2, \ldots)$．$v' = 1$，$v^{(n)} = 0$ $(n = 2, 3, \ldots)$．よって，ライプニッツの定理より

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= {}_nC_0 u^{(n)} v + {}_nC_1 u^{(n-1)} v' \\ &= 2^n x\cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) + n2^{n-1}\cos\left(2x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) \\ &= 2^{n-1}\left\{2x\cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) + n\sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)\right\} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \end{aligned}$$

(2) $u = e^x$，$v = x^3$ とおくと，$u^{(n)} = e^x$　$(n = 1, 2, \ldots)$．$v' = 3x^2$，$v'' = 6x$，$v''' = 6$，$v^{(n)} = 0$ $(n = 4, 5, \ldots)$．よって，ライプニッツの定理より

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= {}_nC_0 u^{(n)} v + {}_nC_1 u^{(n-1)} v' + {}_nC_2 u^{(n-2)} v'' + {}_nC_3 u^{(n-3)} v''' \\ &= e^x\left\{x^3 + n \cdot 3x^2 + \frac{1}{2!}n(n-1) \cdot 6x + \frac{1}{3!}n(n-1)(n-2) \cdot 6\right\} \\ &= e^x\left\{x^3 + 3nx^2 + 3n(n-1)x + n(n-1)(n-2)\right\} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \end{aligned}$$

(3) $y' = e^x(\sin x + \cos x) = \sqrt{2}\,e^x\left(\sin x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cos x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\,e^x\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$，

$y'' = \sqrt{2}\,e^x\left\{\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\right\} = (\sqrt{2}\,)^2 e^x\sin\left(x + \dfrac{2\pi}{4}\right)$，

$y''' = (\sqrt{2}\,)^2 e^x\left\{\sin\left(x + \dfrac{2\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \dfrac{2\pi}{4}\right)\right\} = (\sqrt{2}\,)^3 e^x\sin\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right)$ なので

$$y^{(n)} = (\sqrt{2}\,)^n e^x\sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

問 3.　$f(x) = \cos x$ とおく．2.2 節の問 1 (1) より $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ なので $f^{(n)}(0) = \cos\frac{n\pi}{2}$．よって，マクローリンの定理より

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\cos\frac{k\pi}{2}}{k!}\,x^k + R_n(x), \quad R_n(x) = \frac{\cos\left(\theta x + \frac{n\pi}{2}\right)}{n!}\,x^n$$

を満たす $\theta \in (0,1)$ が存在する．ここで，ラグランジュの剰余 $R_n(x)$ を評価すると

$$|\,R_n(x)\,| = \frac{|\,x\,|^n}{n!}\,\left|\cos\left(\theta x + \frac{n\pi}{2}\right)\right| \leqq \frac{|\,x\,|^n}{n!} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

よって，はさみうちの原理よりすべての実数 x に対して $R_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$．さらに，マクローリン展開式を偶数項と奇数項に分けて計算すると

$$\begin{aligned}
\cos x &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos\frac{k\pi}{2}}{k!}\,x^k \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos\frac{(2k)\pi}{2}}{(2k)!}\,x^{2k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos\frac{(2k+1)\pi}{2}}{(2k+1)!}\,x^{2k+1} \right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n}
\end{aligned}$$

となる．