

# 第1章 論理

## §1 命題論理

1.1.1 定義 (命題). 真であるか偽であるか、いずれか一方に決定される主張を命題といい、 $P, Q, R, \dots$  などの記号を用いて表す。

例. 「日本は島国である」とか、「 $2+3=5$  である」などは真の命題であり、「 $\sqrt{2}$  は有理数である」は偽の命題である。「城山公園の桜は綺麗だ」は、その真偽をはっきり定めることができないので命題ではない。

1.1.2 定義 (真理値). 命題  $P$  が真のとき、その命題は T (true) の値をもつといい、偽のときは F (false) の値をもつという。このとき、値 T や F を命題  $P$  の真理値という。命題  $P$  の真理値が T であるとき、 $P$  は成り立つという。いくつかの命題を結合してできる新たな命題の真理値を調べるには、真理値の表を作るとわかりやすい。このような表のことを真理表という。

例. 「日本は島国である」の真理値は T なので、この命題は成立する。「 $\sqrt{2}$  は有理数である」の真理値は F なので、この命題は成立しない。

1.1.3 定義 (選言). 2つの命題  $P$  と  $Q$  を記号  $\vee$  で結合した命題  $P \vee Q$  を  $P$  と  $Q$  の選言といい、これを「 $P$  または  $Q$ 」、「 $P$  or  $Q$ 」と読む。選言  $P \vee Q$  の真理値は次の真理表で定義される。

$P$	$Q$	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

例.  $P =$  「5 は 4 より小さい」、 $Q =$  「3 は 2 より大きい」とすると、 $P \vee Q =$  「5 は 4 より小さいか、または 3 は 2 より大きい」となる。 $P$  の真理値は F、 $Q$  の真理値は T なので、 $P \vee Q$  の真理値は T となる。

1.1.4 定理 (選言の基本法則). 選言について次の法則が成り立つ。ただし、以下の公式で等号 (=) は左辺と右辺の命題の真理表が一致することを意味する。

- (1)  $P \vee P = P$  (累同法則)
- (2)  $P \vee Q = Q \vee P$  (交換法則)
- (3)  $(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$  (結合法則)

1.1.5 定義 (連言). 2つの命題  $P$  と  $Q$  を記号  $\wedge$  で結合した命題  $P \wedge Q$  を  $P$  と  $Q$  の連言といい、これを「 $P$  かつ  $Q$ 」、「 $P$  and  $Q$ 」と読む。連言  $P \wedge Q$  の真理値は次の真理表で定義される。

$P$	$Q$	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

例.  $P =$  「5 は 4 より小さい」、 $Q =$  「3 は 2 より大きい」とすると、 $P \wedge Q =$  「5 は 4 より小さく、かつ 3 は 2 より大きい」となる。 $P$  の真理値は F、 $Q$  の真理値は T なので、 $P \wedge Q$  の真理値は F となる。

1.1.6 定理 (連言の基本法則). 連言について次の法則が成り立つ。

- (4)  $P \wedge P = P$  (冪同法則)
- (5)  $P \wedge Q = Q \wedge P$  (交換法則)
- (6)  $(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$  (結合法則)

1.1.7 定義 (否定). 命題  $P$  に記号  $'$  をつけた命題  $P'$  を  $P$  の否定といい, これを「 $P$  でない」, 「not  $P$ 」と読む. 否定  $P'$  の真理値は次の真理表で定義される.

$P$	$P'$
T	F
F	T

例.  $P =$ 「3 は偶数である」とすると,  $P' =$ 「3 は偶数でない」となる.  $P$  の真理値は F なので,  $P'$  の真理値は T である.

1.1.8 定理 (否定の基本法則). 否定に関して次の法則が成り立つ.

(7)  $P'' = P$  (二重否定の法則)

1.1.9 定理 (選言・連言の基本法則). 選言と連言に関して次の法則が成り立つ.

(8)  $P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$  (分配法則)

(9)  $P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$  (分配法則)

1.1.10 定理 (選言・連言・否定の基本法則). 選言, 連言, 否定に関して次の法則が成り立つ.

(10)  $(P \vee Q)' = P' \wedge Q'$  (ド・モルガンの法則)

(11)  $(P \wedge Q)' = P' \vee Q'$  (ド・モルガンの法則)

1.1.11 定義 (条件命題). 2つの命題  $P$  と  $Q$  を記号  $\rightarrow$  で結合した命題  $P \rightarrow Q$  を条件命題といい, これを「 $P$  ならば  $Q$ 」, 「if  $P$ , then  $Q$ 」と読む. 条件命題  $P \rightarrow Q$  の真理値は次の真理表で定義される.

$P$	$Q$	$P \rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

例.  $P =$ 「 $3 > 2$ 」,  $Q =$ 「 $3 < 2$ 」,  $R =$ 「 $9 > 4$ 」,  $S =$ 「 $9 < 4$ 」とすると,  $P \rightarrow R =$ 「 $3 > 2$  ならば  $9 > 4$ 」で真理値は T,  $P \rightarrow S =$ 「 $3 > 2$  ならば  $9 < 4$ 」で真理値は F,  $Q \rightarrow R =$ 「 $3 < 2$  ならば  $9 > 4$ 」で真理値は T,  $Q \rightarrow S =$ 「 $3 < 2$  ならば  $9 < 4$ 」で真理値は T となる. これらの中で,  $P \rightarrow R$  の真理値が T で,  $P \rightarrow S$  の真理値が F であることは素直に理解できるが,  $Q \rightarrow R$  と  $Q \rightarrow S$  の真理値がともに T であることに違和感を感じる人が多いと思う. 条件命題の真理値をこのように定めるのは, 命題論理を整合的に体系化するためであり,  $2^0 = 1$  と定めたり, 空集合はすべての集合の部分集合であると約束するのと目的は同じである. とはいっても, なお違和感を払拭できない人は, “嘘からでた真” という諺を思い出すと理解しやすい.

1.1.12 定理 (条件命題の基本法則). 条件命題に関して次の法則が成り立つ.

(12)  $P \rightarrow Q = P' \vee Q$

$$(13) (P \rightarrow Q)' = P \wedge Q'$$

1.1.13 定義 (双条件命題). 2つの命題  $P$  と  $Q$  を記号  $\leftrightarrow$  で結合した命題  $P \leftrightarrow Q$  を双条件命題といい, これを「 $P$  ならば  $Q$ , かつ  $Q$  ならば  $P$ 」, 「 $P$  のとき, かつそのときに限り  $Q$ 」, 「 $P$  if and only if  $Q$ 」と読む. 条件命題  $P \leftrightarrow Q$  の真理値は, 次の真理表で定義される.

$P$	$Q$	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

例.  $P = 「3 > 2」$ ,  $Q = 「3 < 2」$ ,  $R = 「9 > 4」$ ,  $S = 「9 < 4」$  とすると,  $P \leftrightarrow R = 「3 > 2$  ならば  $9 > 4$ , かつ  $9 > 4$  ならば  $3 > 2」$  で真理値は T,  $P \leftrightarrow S = 「3 > 2$  ならば  $9 < 4$ , かつ  $9 < 4$  ならば  $3 > 2」$  で真理値は F,  $Q \leftrightarrow R = 「3 < 2$  ならば  $9 > 4$ , かつ  $9 > 4$  ならば  $3 < 2」$  で真理値は F,  $Q \leftrightarrow S = 「3 < 2$  ならば  $9 < 4$ , かつ  $9 < 4$  ならば  $3 < 2」$  で真理値は T となる. この最後の命題  $Q \leftrightarrow S$  の真理値が T であることも, “嘘から出た真” と考えると理解しやすい.

1.1.14 定理 (双条件命題の基本法則).

$$(14) P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

1.1.15 定義 (論理記号, 論理式). 与えられたいくつかの命題から, 次の記号で表される結合方式を用いて, 新しい命題を作ることができる:

$$\vee, \quad \wedge, \quad ', \quad \rightarrow, \quad \leftrightarrow$$

これらの記号を論理記号といい, 論理記号で結合された式を論理式という. 論理式はそれ自体, 真であるか偽であるかいずれか一方に決定される主張なので, 命題である. 論理式  $A$  の真理値が T のとき,  $A$  は成り立つという.

1.1.16 定義 (真理関数, 命題変数). 一般に論理式は, そこに含まれる命題  $P$  や  $Q$  などを変数とした関数と考えられる. このように論理式を関数とみなしたとき, 特にそれを真理関数といい, そこに含まれる命題を命題変数という.

例. 論理式  $\{(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)\} \rightarrow (P \rightarrow R)$  は  $P, Q, R$  を命題変数とする真理関数である.

1.1.17 定義 (恒真命題, 恒偽命題). 命題変数の真偽にかかわらず常に真となる論理式を恒真命題といい, これを  $I$  で表す. 一方, 命題変数の真偽にかかわらず常に偽となる論理式を恒偽命題といい, これを  $O$  で表す.

例. 論理式  $\{P \wedge (P \rightarrow Q)\} \rightarrow Q$  は, 命題  $P$  と  $Q$  の真偽にかかわらず常に真なので恒真命題である. すなわち,  $\{P \wedge (P \rightarrow Q)\} \rightarrow Q = I$ . 一方,  $P \wedge P'$  は, 命題  $P$  の真偽にかかわらず常に偽なので恒偽命題である. すなわち,  $P \wedge P' = O$ .

1.1.18 定理 (排中・矛盾法則). 次の法則が成り立つ.

$$(15) P \vee P' = I \quad (\text{排中法則})$$

$$(16) P \wedge P' = O \quad (\text{矛盾法則})$$

例. 排中法則は, 命題  $P$  とその否定命題  $P'$  の少なくとも一方は真となること, 矛盾法則は,  $P$  と  $P'$  は同時に真とはならないことを示している.

1.1.19 定義 (同値). 論理式  $A$  と  $B$  は, 命題変数  $P, Q, R, \dots$  から作られた真理関数とする.  $A$  が真であるような命題変数  $P, Q, R, \dots$  に対して常に  $B$  が真であり, かつ  $A$  が偽であるような命題変数  $P, Q, R, \dots$  に対して常に  $B$  が偽であるとき, 言い換えれば  $A$  と  $B$  の真理表が完全に一致するとき,  $A$  と  $B$  は同値であるといい,  $A \Leftrightarrow B$  と書く.

例. 公式 (13) によれば, 論理式  $(P \rightarrow Q)'$  と  $P \wedge Q'$  の真理表は一致する. それゆえ,  $(P \rightarrow Q)'$  と  $P \wedge Q'$  は同値. すなわち,  $(P \rightarrow Q)' \Leftrightarrow P \wedge Q'$  である.

1.1.20 定義 (逆, 裏, 対偶). 条件命題  $P \rightarrow Q$  に対して, その逆, 裏, 対偶をそれぞれ  $Q \rightarrow P$ ,  $P' \rightarrow Q'$ ,  $Q' \rightarrow P'$  で定義する.

1.1.21 定理 (逆・裏・対偶の基本法則). 逆, 裏, 対偶に関して次の法則が成り立つ.

$$(17) P \rightarrow Q = Q' \rightarrow P' \quad (\text{もとの条件命題とその対偶とは同値})$$

$$(18) Q \rightarrow P = P' \rightarrow Q' \quad (\text{逆と裏は同値})$$

$$(19) P \rightarrow Q \neq Q \rightarrow P \quad (\text{逆は必ずしも真ならず!})$$

1.1.22 定義 (推論, 演繹, 仮定, 結論). いくつかの命題  $P, Q, R, \dots$  から作られた論理式  $A$  と  $B$  に対して, 条件命題  $A \rightarrow B$  が, 各命題  $P, Q, R, \dots$  の真偽にかかわらず常に真となるとき, すなわち, 論理式  $A \rightarrow B$  が恒真命題であるとき,  $A$  から  $B$  が推論される, あるいは演繹されるといい,  $A \Rightarrow B$  と書く. これは,  $A$  が真であるような命題変数  $P, Q, R, \dots$  の真理値に対して常に  $B$  が真となることと同じである. このとき,  $A$  を仮定,  $B$  を結論という.

1.1.23 定理 (推論方式). 次の推論方式は古典論理学でよく用いられる.

$$(20) P \wedge Q \Rightarrow P \quad (\text{簡約の法則})$$

$$(21) P \Rightarrow P \vee Q \quad (\text{付加の法則})$$

$$(22) P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q \quad (\text{三段論法肯定式})$$

$$(23) (P \rightarrow Q) \wedge Q' \Rightarrow P' \quad (\text{三段論法否定式})$$

$$(24) (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow (P \rightarrow R) \quad (\text{仮言三段論法})$$

$$(25) (P \vee Q) \wedge P' \Rightarrow Q \quad (\text{選言的三段論法})$$

$$(26) (P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (Q' \vee S') \Rightarrow P' \vee R' \quad (\text{破壊的ディレンマ})$$

例. 今まで特に意識はしていなかったと思うが, われわれは上で述べた方式を用いて数学的推論を行っていたことを思い起こして欲しい.

1.1.24 定義 (必要条件, 十分条件)  $A$  から  $B$  が推論される, すなわち  $A \Rightarrow B$  であるとき,  $B$  は  $A$  であるための必要条件,  $A$  は  $B$  であるための十分条件という.

例. 公式 (22) によれば,  $P \wedge (P \rightarrow Q)$  は  $Q$  であるための十分条件,  $Q$  は  $P \wedge (P \rightarrow Q)$  であるための必要条件である.

## §2 述語論理

§1 の命題論理では, 1 つの命題を 1 つの記号, 例えば  $P$  で表したが, ここで学ぶ述語論理では, 1 つの命題を主部と述部に区別して表す. これにより, より詳細な数学的論理展開が可能となる.

1.2.1 定義 (命題関数). 一般に、「変数  $x$  は性質  $P$  をもつ」とき、あるいは「変数  $x$  は条件  $P$  を満たす」とき、それを  $P(x)$  で表し、変数  $x$  の命題関数という。

例.  $P(x) =$  「 $x$  は偶数である」とすると、 $P(x)$  は命題関数である。 $P(x)$  それ自体は、真偽が定まらないので従来の意味での命題ではないが、 $x$  に具体的な値を代入すると命題となる。例えば、 $P(2)$  は真、 $P(3)$  は偽である。

1.2.2 定義 (全称命題, 全称記号). 命題関数  $P(x)$  に対して、「すべての  $x$  に対して  $P(x)$  が成り立つ」、あるいは「任意の  $x$  に対して  $P(x)$  が成り立つ」という命題を全称命題といい、 $\forall x, P(x)$  で表し、記号  $\forall$  を全称記号という。全称命題  $\forall x, P(x)$  の真偽は次のように定義される:

- $x$  の変域内の任意の要素  $a$  に対して、命題  $P(a)$  が真のとき、 $\forall x, P(x)$  は真。
- $x$  の変域内のある要素  $a$  に対して命題  $P(a)$  が偽のとき、 $\forall x, P(x)$  は偽。

例. 「任意の  $x$  に対して  $x > 3$  ならば  $x^2 > 9$ 」という全称命題は、「 $\forall x, x > 3 \rightarrow x^2 > 9$ 」と表され、真である。一方、「すべての実数  $x$  に対して  $x^2 < 0$ 」という全称命題は、「 $\forall x, x$  は実数  $\rightarrow x^2 < 0$ 」と表され、偽である。これらの全称命題を簡単に、「 $\forall x > 3, x^2 > 9$ 」や「 $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$ 」と書くことも多い。ただし、 $\mathbb{R}$  は実数全体を表す記号である。

1.2.3 定義 (存在命題, 存在記号). 命題関数  $P(x)$  に対して、「ある  $x$  が存在して、 $P(x)$  が成り立つ」、あるいは「 $P(x)$  が成り立つ  $x$  が存在する」という命題を存在命題といい、 $\exists x, P(x)$  で表し、記号  $\exists$  を存在記号という。存在命題  $\exists x, P(x)$  の真偽は次のように定義される:

- $x$  の変域内のある要素  $a$  に対して、命題  $P(a)$  が真のとき、 $\exists x, P(x)$  は真。
- $x$  の変域内の任意の要素  $a$  に対して命題  $P(a)$  が偽のとき、 $\exists x, P(x)$  は偽。

例. 「方程式  $x^3 - 1 = 0$  は実数解をもつ」という存在命題は、「 $\exists x, x$  は実数  $\wedge x^3 - 1 = 0$ 」と表され、真である。一方、「 $x^3 + 2^3 = 5^3$  を満たす自然数  $x$  が存在する」という存在命題は、「 $\exists x, x$  は自然数  $\wedge x^3 + 2^3 = 5^3$ 」と表され、偽である (フェルマー・ワイルズの定理)。これらの存在命題も簡単に、「 $\exists x \in \mathbb{R}, x^3 - 1 = 0$ 」や「 $\exists x \in \mathbb{N}, x^3 + 2^3 = 5^3$ 」と書くことも多い。ただし、 $\mathbb{N}$  は自然数全体を表す記号である。

1.2.4 定義 (限定命題, 限定記号). 全称命題  $\forall x, P(x)$  や存在命題  $\exists x, P(x)$  を総称して限定命題といい、全称記号  $\forall$  や存在記号  $\exists$  を総称して限定記号という。

1.2.5 命題 (限定命題の否定). 限定命題の否定に関して次の法則が成り立つ。

$$(27) (\forall x, P(x))' = \exists x, P'(x)$$

$$(28) (\exists x, P(x))' = \forall x, P'(x)$$

$$(29) (\forall x, P(x) \rightarrow Q(x))' = \exists x, P(x) \wedge Q'(x)$$

$$(30) (\exists x, P(x) \wedge Q(x))' = \forall x, P(x) \rightarrow Q'(x)$$

例. 「どんな実数  $x$  に対しても  $\sin x \leq 1/2$ 」を限定記号を用いて表すと、「 $\forall x, x$  は実数  $\rightarrow \sin x \leq 1/2$ 」または「 $\forall x \in \mathbb{R}, \sin x \leq 1/2$ 」となり、その否定は「 $\exists x, x$  は実数  $\wedge \sin x > 1/2$ 」または「 $\exists x \in \mathbb{R}, \sin x > 1/2$ 」である。また、「どんな  $x$  に対しても  $x > 0$  ならば  $\log x > 0$ 」を限定記号を用いて表すと、「 $\forall x, x > 0 \rightarrow \log x > 0$ 」または「 $\forall x > 0, \log x > 0$ 」となり、その否定は「 $\exists x, x > 0 \wedge \log x \leq 0$ 」または「 $\exists x > 0, \log x \leq 0$ 」である。

1.2.6 定義 (2変数命題関数). 一般に、「変数  $x$  と  $y$  は性質  $P$  をもつ」とき、あるいは「変数  $x$  と  $y$  は条

件  $P$  を満たす」ととき、それを  $P(x, y)$  で表し、2 変数  $x$  と  $y$  の命題関数という。変数が 3 つ以上の場合も、同じ考え方で定義される。

1.2.7 定義 (2 変数命題関数の限定命題) 変数  $x$  と  $y$  の 2 変数命題関数  $P(x, y)$  の限定命題は「 $\forall x, \forall y, P(x, y)$ 」、 $\forall x, \exists y, P(x, y)$ 、 $\exists x, \forall y, P(x, y)$ 、 $\exists x, \exists y, P(x, y)$  の 4 種類あり、これらはすべて異なる命題である。これらの命題の真偽は 1 変数の場合と同じ考え方で定義される。例えば、 $\forall x, \forall y, P(x, y)$  の真偽は以下のように定義される:

- $x$  の変域内の任意の要素  $a$  と  $y$  の変域内の任意の要素  $b$  に対して命題  $P(a, b)$  が真のとき、 $\forall x, \forall y, P(x, y)$  は真。
- 上で述べた以外の場合、すなわち、「 $x$  の変域内のある要素  $a$  と  $y$  の変域内の任意の要素  $b$  に対して  $P(a, b)$  が偽」または「 $x$  の変域内の任意の要素  $a$  と  $y$  の変域内のある要素  $b$  に対して  $P(a, b)$  が偽」または「 $x$  の変域内のある要素  $a$  と  $y$  の変域内のある要素  $b$  に対して  $P(a, b)$  が偽」のとき、 $\forall x, \forall y, P(x, y)$  は偽。

さらに、変数が 3 つ以上の場合も同じ考え方で定義される。

例。「任意の正の数  $\varepsilon$  に対して、自然数  $n_0$  が存在して、任意の自然数  $n$  に対して、 $n \geq n_0$  ならば  $|a_n - a| < \varepsilon$ 」を限定命題を用いて表すと「 $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$ 」となる。また、「 $x^3 + y^3 = z^3$  を満たす自然数  $x, y, z$  が存在する」を限定命題で表すと「 $\exists x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, \exists z \in \mathbb{N}, x^3 + y^3 = z^3$ 」となるが、この命題は偽である (フェルマー・ワイルズの定理)。

1.2.8 否定命題の作り方。

- 限定記号 ( $\forall, \exists$ ) の順序は変更しない
- 限定記号の変域は変更しない (直前の例では、 $\varepsilon$  の変域は正の数全体、 $n_0$  と  $n$  の変域はともに自然数全体)
- $\forall$  は  $\exists$  に変更
- $\exists$  は  $\forall$  に変更
- $P$  は  $P'$  に変更
- $P \rightarrow Q$  は  $P \wedge Q'$  に変更
- $P \vee Q$  は  $P' \wedge Q'$  に変更
- $P \wedge Q$  は  $P' \vee Q' = P \rightarrow Q'$  に変更

例。日本語で表現された命題を限定記号で表す仕方およびその否定命題の作り方を味わって欲しい。

- 「任意の正の数  $\varepsilon$  に対して、自然数  $k$  が存在して、どんな自然数  $n$  に対しても、 $n \geq k$  ならば  $|a_n - a| < \varepsilon$ 」を限定記号を用いて表すと「 $\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq k \rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$ 」となる。これは数列  $\{a_n\}$  が  $a$  に収束することの定義に他ならない。否定命題は「 $\exists \varepsilon > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq k \wedge |a_n - a| \geq \varepsilon$ 」となり、これをこねた日本語で表現すれば、「正の数  $\varepsilon$  が存在して、どんな自然数  $k$  に対しても、それに応じて自然数  $n$  をうまくみつければ、 $n \geq k$  かつ  $|a_n - a| \geq \varepsilon$  となるようにできる」ことを意味している。
- 「任意の正の数  $\varepsilon$  に対して、正の数  $\delta$  が存在して、どんな実数  $x$  に対しても、 $|x - a| < \delta$  ならば  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ 」を限定記号を用いて表すと「 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ 」

となる．これは関数  $f(x)$  が点  $x = a$  で連続であることの定義に他ならない．否定命題は「 $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in \mathbb{R}, |x - a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$ 」となり，これをこなれた日本語で表現すれば，「正の数  $\varepsilon$  が存在して，どんな正の数  $\delta$  に対しても，それに応じて実数  $x$  をうまくみつければ， $|x - a| < \delta$  かつ  $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$  となるようにできる」ことを意味している．

- 「任意の正の数  $\varepsilon$  に対して，正の数  $\delta$  が存在して，どんな実数  $x$  と  $y$  に対しても， $|x - y| < \delta$  ならば  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ 」を限定記号を用いて表すと，「 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ 」となる．これは関数  $f(x)$  が実数直線上で一様連続であることの定義に他ならない．否定命題は「 $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$ 」となり，これをこなれた日本語で表現すれば，「正の数  $\varepsilon$  が存在して，どんな正の数  $\delta$  に対しても，それに応じて実数  $x$  と実数  $y$  をうまくみつければ， $|x - y| < \delta$  かつ  $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$  となるようにできる」ことを意味している．

## 第2章 集合と写像

### §1 集合と演算

2.1.1 定義 (集合). どんなものをもってきても, それがその集まりの中にあるかないかがはっきりと定まっているようなものの集まりのことを集合といい, 個々のものを要素または元という. 通常, 集合を表すには,  $A, B, C, \dots$  などのアルファベットの大文字を, 要素を表すには,  $x, y, z, \dots$  などの小文字を用いる.  $x$  が集合  $A$  の要素であることを,  $x \in A$  または  $A \ni x$  と書き,  $x$  は  $A$  に属するという.

例. 有理数全体の集まりを  $A$  で表すと,  $A$  は集合である. 実際,  $1/3 \in A, \sqrt{2} \notin A$  などと, どんなものをもってきても, それが  $A$  に属するか属さないかがはっきりと定まっている. 一方, 賢い犬の集まりを  $B$  とすると,  $B$  は集合ではない. なぜなら, 我が家の2匹の愛犬チェリーとランちゃんは,  $B$  の要素か, 要素でないかが判定できないからである.

2.1.2 定義 (集合の表記法). 集合を定義するには2つの方法がある. その1つは, 集合の要素を1つずつ並べ立てる方法で

$$A = \{x, y, z, \dots\}$$

のように表す. 他の1つは, 定義したい集合が, ある条件  $P(x)$  を満たすような要素  $x$  の集まりである場合に有効で

$$A = \{x : P(x)\}$$

と表す. 前者を列記する方法, 後者を条件を書く方法という. 定義したい集合が2つ条件  $P(x)$  と  $Q(x)$  をともに満たすような要素の  $x$  の集まりの場合には,  $A = \{x : P(x) \text{ かつ } Q(x)\}$  のことを, “かつ” の代わりに, “,” を用いて, 簡単に  $A = \{x : P(x), Q(x)\}$  と略記する. 条件が3つ以上の場合も同様である.

例. 1以上5以下の整数の集合  $A$  は,  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  のように要素を列記する方法でも,  $A = \{x : x \text{ は } 1 \text{ 以上 } 5 \text{ 以下の整数}\}$  のように条件を書く方法でも表記できる. 一方, 正の実数の集合  $B$  は,  $B = \{x : x > 0\}$  のように条件を書く方法でしか表記できない.

2.1.3 記号 (数の集合). 数の集合は次の記号を用いて表す習慣がある.

- $\mathbb{N}$  : 自然数 (正の整数) の全体 (natural number)
- $\mathbb{Z}$  : 整数の全体 (integer, ドイツ語の Zahl (数) の頭文字)
- $\mathbb{Q}$  : 有理数の全体 (rational number, quotient (商) の頭文字)
- $\mathbb{R}$  : 実数の全体 (real number)
- $\mathbb{C}$  : 複素数の全体 (complex number)

2.1.4 定義 (包含関係).  $A$  のすべての要素が  $B$  の要素となっているとき,  $A$  は  $B$  の部分集合であるといい,  $A \subset B$  または  $B \supset A$  と書く. すなわち, 「 $A \subset B$ 」は「 $\forall x, x \in A \rightarrow x \in B$ 」で定義する.  $A \subset B$  のとき,  $A$  は  $B$  に含まれるまたは  $B$  は  $A$  を含むといい, 含む, 含まれるという関係を包含関係という.

2.1.5 定義 (相等).  $A \subset B$  かつ  $B \subset A$  が成り立つとき,  $A$  と  $B$  は等しいといい,  $A = B$  と書く. すなわち, 「 $A = B$ 」は「 $\forall x, x \in A \leftrightarrow x \in B$ 」で定義する. これは, 集合  $A$  と  $B$  の要素が完全に一致することを意味する.

2.1.6 定義 (真部分集合).  $A \subset B$  かつ  $A \neq B$  のとき,  $A$  は  $B$  の真部分集合であるといい,  $A \subsetneq B$  と書く.

2.1.7 定理 (包含関係の基本性質).

(31)  $A \subset A$  (反射法則)

(32)  $A \subset B$  かつ  $B \subset A$  ならば  $A = B$  (反対称法則)

(33)  $A \subset B$  かつ  $B \subset C$  ならば  $A \subset C$  (推移法則)

2.1.8 定義 (全体集合, 空集合). 集合を用いて理論を展開する場合, 議論の土俵となる 1 つの集合  $X$  を固定して論じることが多い. このとき,  $X$  を全体集合という. 一方, 要素を 1 つも含まない集合を考えておくと都合がよいので, それを空集合とよび,  $\emptyset$  で表す. 空集合はすべての集合の部分集合であると約束する. 以下では,  $A, B, C$  などはずべて全体集合  $X$  の部分集合であるとする.

2.1.9 定義 (和集合).  $A$  と  $B$  の少なくとも一方に属する要素の全体を  $A \cup B$  で表し,  $A$  と  $B$  の和, 和集合, 合併集合, 結びなどという. すなわち

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ または } x \in B\} = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

で定義する.

2.1.10 定義 (積集合, 互いに素).  $A$  と  $B$  の両方に属する要素の全体を  $A \cap B$  で表し,  $A$  と  $B$  の積, 積集合, 共通集合, 交わりなどという. すなわち

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ かつ } x \in B\} = \{x : x \in A \wedge x \in B\} = \{x : x \in A, x \in B\}$$

で定義する. また,  $A$  と  $B$  に共通要素がないとき, すなわち,  $A \cap B = \emptyset$  のとき,  $A$  と  $B$  は互いに素であるという.

2.1.11 定理 (集合の和・積の基本性質). 集合の和・積に関して以下が成り立つ.

(34)  $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$  (交換法則)

(35)  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$  (結合法則)

(36)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  (分配法則)

2.1.12 定理 (包含関係と和・積との関係).

(37)  $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

2.1.13 定義 (補集合, 差集合). 全体集合  $X$  の要素で, 部分集合  $A$  に属さないものの全体を  $A$  の補集合といい,  $A'$  で表す. すなわち

$$A' = \{x : x \notin A\}$$

で定義する. 同様に,  $A$  に属して  $B$  に属さない要素の全体を,  $A$  から  $B$  を引いた差または差集合といい,  $A - B$  または  $A \setminus B$  で表す. すなわち

$$A - B = \{x : x \in A \text{ かつ } x \notin B\} = \{x : x \in A \wedge x \notin B\} = \{x : x \in A, x \notin B\}$$

で定義する. 明らかに  $A - B = A \cap B'$  である.

2.1.14 定理 (補集合の基本法則). 補集合に関して以下が成り立つ.

(38)  $X' = \emptyset, \emptyset' = X$

(39)  $(A \cup B)' = A' \cap B', (A \cap B)' = A' \cup B'$  (ド・モルガンの法則)

## §2 写像

2.2.1 定義 (写像, 定義域, 値域).  $X$  と  $Y$  を 2 つの全体集合とする.  $X$  の各要素  $x$  に  $Y$  の 1 つの要素  $y$  が対応しているとき, この対応を  $f$  で表し,  $X$  から  $Y$  への写像といい,  $f : X \rightarrow Y$  で表す. このとき,  $X$

の要素  $x$  に対応する  $Y$  の要素を  $f(x)$  で表し,  $x$  の  $f$  による像という.  $X$  を  $f$  の定義域,  $Y$  を  $f$  の値域という. 特に,  $X$  と  $Y$  が数の集合のときは, 写像のことを関数ということが多い.

例.  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}, Y = \{1, 4, 9, 16, 25\}$  のとき,  $f(1) = 1, f(2) = 4, f(3) = 9, f(4) = 16, f(5) = 25$  で定まる対応は写像である. 一方,  $X = Y = \mathbb{R}$  のとき,  $x \in X$  に  $y^2 = x^2 + 1$  の実数解  $y$  を対応させたものは写像ではない.

**2.2.2 定義 (集合の像, 逆像).**  $f$  を  $X$  から  $Y$  への写像とする. 定義域  $X$  の部分集合  $A$  に対して,  $A$  に属する要素  $x$  の  $f$  による像  $f(x)$  の全体を, 集合  $A$  の  $f$  による像といい,  $f(A)$  で表す. すなわち

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

で定義する. また, 値域  $Y$  の部分集合  $B$  に対して,  $f(x) \in B$  となる  $X$  の要素  $x$  の全体を,  $f$  による  $B$  の逆像といい,  $f^{-1}(B)$  で表す. すなわち

$$f^{-1}(B) = \{x : f(x) \in B\}$$

で定義する. 特に,  $f(\emptyset) = \emptyset, f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$  と約束する.

注意.  $f^{-1}(B)$  という記号はこれでひとかたまりのものであって,  $f$  の逆写像  $f^{-1}$  による集合  $B$  の像のことではない. 2.2.7 で説明するように, 写像の逆写像は 1 対 1 かつ上への写像に対してしか定義できないことに注意せよ!

**2.2.3 定理 (集合の像と逆像に関する公式).** 写像  $f : X \rightarrow Y$ ,  $X$  の部分集合  $A_1, A_2$ ,  $Y$  の部分集合  $B_1, B_2$  に対して, 以下の公式が成り立つ.

$$(40) A_1 \subset A_2 \text{ ならば } f(A_1) \subset f(A_2)$$

$$(41) B_1 \subset B_2 \text{ ならば } f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$$

$$(42) f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$$

$$(43) f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

$$(44) f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$$

$$(45) f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

$$(46) A \subset f^{-1}(f(A))$$

$$(47) B = f(f^{-1}(B))$$

**2.2.4 定義 (単射, 全射, 全単射).** 写像  $f : X \rightarrow Y$  が  $f(X) = Y$  を満たすとき,  $f$  は  $X$  から  $Y$  への全射または上への写像という. すなわち,  $f$  が全射であるとは

$$\forall y \in Y, \exists x \in X, y = f(x)$$

が成立することである. また, 写像  $f$  は異なる要素を異なる要素に移すとき, すなわち

$$\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

が成り立つとき, 1 対 1 の写像あるいは単射であるという. 上記の対偶命題を考えれば,  $f$  が単射であるとは

$$\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

が成立することであるといってもよい。さらに、 $f$  は単射かつ全射であるとき、全単射であるという。

2.2.5 定義 (合成写像). 写像  $f: X \rightarrow Y$  と  $g: Y \rightarrow Z$  が与えられたとき、 $X$  の各要素  $x$  に対して、その  $f$  による像  $f(x)$  の  $g$  による像  $g(f(x))$  を対応させれば、 $X$  から  $Z$  への写像が得られる。この写像を  $f$  と  $g$  の合成といい、 $g \circ f$  で表す。

2.2.6 定理 (合成写像の基本法則). 写像  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$ ,  $h: Z \rightarrow W$  の合成に関して次の公式が成り立つ。

$$(48) (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \quad (\text{結合法則})$$

2.2.7 定義 (逆写像). 写像  $f$  が  $X$  から  $Y$  への全単射のとき、 $Y$  の各要素  $y$  に対して、ただ 1 つの  $X$  の要素  $x$  が対応する。この対応を  $f^{-1}$  で表し、 $f$  の逆写像という。逆写像は、全単射写像に対してしか定義できないことに注意せよ！

### §3 集合族

2.3.1 定義 (べき集合). 集合  $X$  のすべての部分集合の全体を  $X$  のべき集合といい、 $2^X$  で表す。すなわち

$$2^X = \{A : A \subset X\}$$

で定義される。

2.3.2 定義 (集合族). 全体集合  $X$  の部分集合  $A_1, A_2, \dots, A_n$  に対して、 $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  は集合を要素とする集合である。このように集合を要素とする集合のことを集合族という。

集合の無限列  $A_1, A_2, \dots$  からなる集合  $\{A_1, A_2, \dots\}$  も集合族である。これを  $\{A_i : i = 1, 2, \dots\}$ ,  $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ ,  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  などで表す。

一般に、有限個または無限個の集合からなる集合族を  $\mathcal{A} = \{A_\mu : \mu \in M\}$  または  $\mathcal{A} = \{A_\mu\}_{\mu \in M}$  のように表す。ここで、 $\mu$  を集合  $A$  の添え字あるいは指標、 $M$  を添え字の集合あるいは指標集合という。

2.3.3 定義 (集合族の演算).  $X$  は全体集合、 $\mathcal{A} = \{A_\mu\}_{\mu \in M}$  は  $X$  の部分集合の族とする。

- $A_\mu$  のどれかに含まれているような  $X$  の要素の全体を  $\{A_\mu\}_{\mu \in M}$  の和集合といい、 $\bigcup \{A_\mu : \mu \in M\}$  または  $\bigcup_{\mu \in M} A_\mu$  などで表す。すなわち

$$\bigcup_{\mu \in M} A_\mu = \{x : \exists \mu \in M, x \in A_\mu\}$$

で定義される。特に、 $M = \emptyset$  の場合は、 $\bigcup_{\mu \in M} A_\mu = \emptyset$  と約束する。

- $A_\mu$  のすべてに含まれているような  $X$  の要素の全体を  $\{A_\mu\}_{\mu \in M}$  の積集合といい、 $\bigcap \{A_\mu : \mu \in M\}$  または  $\bigcap_{\mu \in M} A_\mu$  などで表す。すなわち

$$\bigcap_{\mu \in M} A_\mu = \{x : \forall \mu \in M, x \in A_\mu\}$$

で定義される。特に、 $M = \emptyset$  の場合は、 $\bigcap_{\mu \in M} A_\mu = X$  と約束する。

- 集合の無限列  $\{A_i : i = 1, 2, \dots\}$  に対しては、特に

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

のような表し方をする。

2.3.4 定理 (集合族の演算公式). 集合族  $\{A_\mu\}_{\mu \in M}$  に対して, 以下の公式が成り立つ.

$$(49) \left( \bigcup_{\mu \in M} A_\mu \right) \cup B = \bigcup_{\mu \in M} (A_\mu \cup B) \quad (\text{結合法則})$$

$$(50) \left( \bigcap_{\mu \in M} A_\mu \right) \cap B = \bigcap_{\mu \in M} (A_\mu \cap B) \quad (\text{結合法則})$$

$$(51) \left( \bigcup_{\mu \in M} A_\mu \right) \cap B = \bigcup_{\mu \in M} (A_\mu \cap B) \quad (\text{分配法則})$$

$$(52) \left( \bigcap_{\mu \in M} A_\mu \right) \cup B = \bigcap_{\mu \in M} (A_\mu \cup B) \quad (\text{分配法則})$$

$$(53) \left( \bigcup_{\mu \in M} A_\mu \right)' = \bigcap_{\mu \in M} A'_\mu \quad (\text{ド・モルガンの法則})$$

$$(54) \left( \bigcap_{\mu \in M} A_\mu \right)' = \bigcup_{\mu \in M} A'_\mu \quad (\text{ド・モルガンの法則})$$

2.3.5 定理 (集合族の像と逆像に関する公式).  $f: X \rightarrow Y$  は写像,  $\{A_\mu\}_{\mu \in M}$  は  $X$  の部分集合からなる族,  $\{B_\mu\}_{\mu \in M}$  は  $Y$  の部分集合からなる族とする. このとき以下の公式が成り立つ.

$$(55) f\left(\bigcup_{\mu \in M} A_\mu\right) = \bigcup_{\mu \in M} f(A_\mu), \quad f^{-1}\left(\bigcup_{\mu \in M} B_\mu\right) = \bigcup_{\mu \in M} f^{-1}(B_\mu)$$

$$(56) f\left(\bigcap_{\mu \in M} A_\mu\right) \subset \bigcap_{\mu \in M} f(A_\mu), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{\mu \in M} B_\mu\right) = \bigcap_{\mu \in M} f^{-1}(B_\mu)$$

2.3.6 定義 (直積). 集合の直積は以下のように定義される.

- 2 個の場合:  $X, Y$  を空でない集合とする.  $X$  の要素  $x$  と  $Y$  の要素  $y$  の順序対, すなわち順序を考慮した対  $(x, y)$  全体の集合を考え, これを  $X$  と  $Y$  の直積といい,  $X \times Y$  で表す. すなわち

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

と定義する. ただし,  $X \times Y$  の 2 つの要素  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  に対して,  $x_1 = x_2$  かつ  $y_1 = y_2$  のとき,  $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$  と定める.  $X$  の部分集合  $A$  と,  $Y$  の部分集合  $B$  に対しても, その直積を

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

で定義する.  $A, B$  の少なくとも一方が空集合のとき,  $A \times B$  は空集合と約束する. すなわち

$$A \times \emptyset = \emptyset \times B = \emptyset \times \emptyset = \emptyset$$

と規約する.

- $n$  個の場合:  $n$  個の空でない集合  $X_1, X_2, \dots, X_n$  の直積と, それらの部分集合  $A_1, A_2, \dots, A_n$  の直積は上と同様に

$$\prod_{i=1}^n X_i = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n\}$$

$$\prod_{i=1}^n A_i = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n\}$$

で定義する.  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) の少なくとも一つが空集合のとき,  $\prod_{i=1}^n A_i = \emptyset$  と約束する. 特に,  $X_1 = X_2 = \dots = X_n = X$  や  $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$  のとき,  $\prod_{i=1}^n X_i$  や  $\prod_{i=1}^n A_i$  をそれぞれ  $X^n$  や  $A^n$  で表す.

- 一般の場合: 空でない集合からなる集合族  $\{X_\mu\}_{\mu \in M}$  と, 各  $X_\mu$  の部分集合  $A_\mu$  からなる集合族  $\{A_\mu\}_{\mu \in M}$  の直積は以下のように定義される.

$$\prod_{\mu \in M} X_\mu = \{x : x \text{ は } M \text{ から } \cup_{\mu \in M} X_\mu \text{ への写像で, 任意の } \mu \in M \text{ に対して } x(\mu) \in X_\mu\}$$

$$\prod_{\mu \in M} A_\mu = \{x : x \text{ は } M \text{ から } \cup_{\mu \in M} X_\mu \text{ への写像で, 任意の } \mu \in M \text{ に対して } x(\mu) \in A_\mu\}$$

$A_\mu$  ( $\mu \in M$ ) の少なくとも一つが空集合のとき,  $\prod_{\mu \in M} A_\mu = \emptyset$  と約束する. 特に, すべての  $\mu \in M$  に対して  $X_\mu = X$  や  $A_\mu = A$  のときは,  $\prod_{\mu \in M} X_\mu$  や  $\prod_{\mu \in M} A_\mu$  を  $X^M$  や  $A^M$  で表す.

**2.3.7 定義 (選出公理).** 空でない集合からなる集合族  $\{X_\mu\}_{\mu \in M}$  と, 各  $X_\mu$  の部分集合  $A_\mu$  からなる集合族  $\{A_\mu\}_{\mu \in M}$  に対して, 次の命題

$$(\exists \mu \in M, A_\mu = \emptyset) \rightarrow \prod_{\mu \in M} A_\mu = \emptyset$$

が成り立つことは容易に示せる. 実際,  $A_\mu = \emptyset$  なので, どんな写像  $x : M \rightarrow \cup_{\mu \in M} X_\mu$  に対しても  $x(\mu) \notin A_\mu$  となり,  $\prod_{\mu \in M} A_\mu$  はひとつも要素をもたない集合となる.

さて, 上の命題の裏 (逆の対偶) 命題

$$(\forall \mu \in M, A_\mu \neq \emptyset) \rightarrow \prod_{\mu \in M} A_\mu \neq \emptyset$$

は必ずしも真とは限らず, 真であると主張するためには証明が必要である. 現代数学では上の命題, すなわち

$$(AC) \quad (\forall \mu \in M, A_\mu \neq \emptyset) \rightarrow \prod_{\mu \in M} A_\mu \neq \emptyset$$

は常に成立することを 1 つの原理として認めて理論を進める. この仮定 (AC) のことを選出公理 (axiom of choice) という. この公理は, 空でない集合からなる集合族  $\{A_\mu\}_{\mu \in M}$  が与えられたとき, 写像  $x : M \rightarrow \cup_{\mu \in M} X_\mu$  で, 各要素  $\mu \in M$  における値  $x_\mu = x(\mu)$  が  $A_\mu$  の要素となっているものが少なくとも一つは存在することを意味する. 言い換えれば, 「すべての  $A_\mu$  から要素  $x_\mu$  をいっせいに選出できる」ことに他ならない. これは, 何らかの規則によって, その選出方法が具体的に指示されているのでなければ, いわば “理念上の操作” である. このような理念上の操作の可能性を, 1 つの原理として認めることにしたのが, 選出公理である.

**2.3.8 定理 (選出公理の応用).**  $X$  と  $Y$  は 2 つの空でない集合とする. このとき, 単射  $f : X \rightarrow Y$  が存在することと, 全射  $g : Y \rightarrow X$  が存在することは同値.