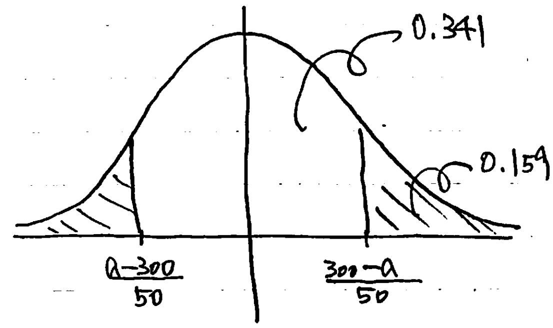
1.8 確率分布Ⅰ — 正規分布

2 (1) $P(X \leq a) = P\left(Z \leq \dfrac{a-300}{50}\right) = 0.159$

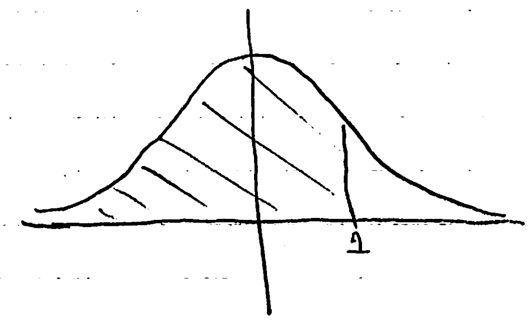
題意より $\Phi\left(\dfrac{300-a}{50}\right) = 0.341$ となる a を正規分布表Ⅱより求めると $\dfrac{300-a}{50} = 0.9986$

$\therefore a = 300 - 0.9986 \times 50 = \underline{250.07}$



(2) $P(X \leq 350) = P\left(Z \leq \dfrac{350-300}{50}\right) = P(Z \leq 1)$

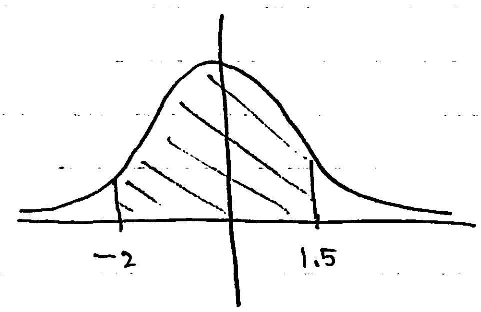
$= 0.5 + \Phi(1.00) = 0.5 + 0.3413 = \underline{0.8413}$



3 (1) $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 1.5\sigma) = P\left(\dfrac{\mu - 2\sigma - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \dfrac{\mu + 1.5\sigma - \mu}{\sigma}\right)$

$= P(-2 \leq Z \leq 1.5) = \Phi(2.00) + \Phi(1.50)$

$= 0.4773 + 0.4332 = \underline{0.9105}$



(2) $P(\mu + \sigma < X$ または $\mu - 2\sigma > X)$

$= P\left(\dfrac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma} < Z\right.$ または $\left.\dfrac{\mu - 2\sigma - \mu}{\sigma} > Z\right)$

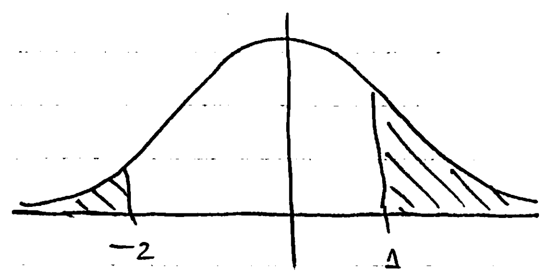
$= P(Z > 1$ または $Z < -2)$

$= P(Z > 1) + P(Z < -2)$

$= (0.5 - \Phi(1.00)) + (0.5 - \Phi(2.00))$

$= 1 - \Phi(1.00) - \Phi(2.00)$

$= 1 - 0.3413 - 0.4773 = \underline{0.1814}$



4 X = 受講者300名の中から無作為に選んだ1人の成績　$X \sim N(75, 15^2)$

(1) $P(60 \leq X \leq 85) = P\left(\dfrac{60-75}{15} \leq Z \leq \dfrac{85-75}{15}\right) = P(-1 \leq Z \leq 0.67)$

$= \Phi(1.00) + \Phi(0.67) = 0.3413 + 0.2486 = 0.5899$

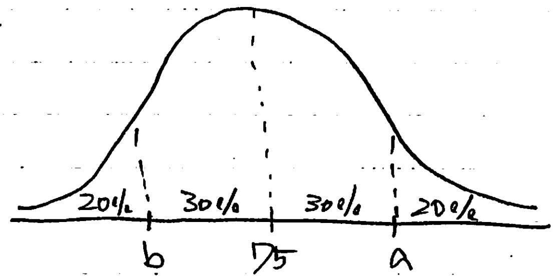
よって求める人数は $300\times 0.5899 \fallingdotseq 177$人.

(2) まず $P(75 \leqq X \leqq a)=0.30$ となる a を求める

$$P\left(\frac{75-75}{15} \leqq Z \leqq \frac{a-75}{15}\right)=0.30$$

$$\therefore P\left(0 \leqq Z \leqq \frac{a-75}{15}\right)=0.30.$$

よって $\Phi\left(\frac{a-75}{15}\right)=0.30$ $\therefore \frac{a-75}{15}=0.8416$



$\therefore a=75+15\times 0.8416 \fallingdotseq 88$

b については対称性より $b=75-(88-75)=62$. 以上より 62点, 75点, 88点で区切れればよい

5 X=300人の生徒の中から無作為に選んだ1人の成績とすると $X \sim N(65, 12^2)$.

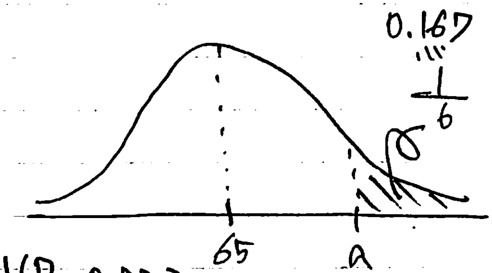
(1) $P(50 \leqq X \leqq 90)=P\left(\frac{50-65}{12} \leqq Z \leqq \frac{90-65}{12}\right)=P(-1.25 \leqq Z \leqq 2.08)$

$=\Phi(1.25)+\Phi(2.08)=0.3944+0.4812=0.8756$

よって求める人数 $=300\times 0.8756 \fallingdotseq 263$人

(2) 上から50番以内に入るには 上位16.7%以内に入ればよい. よって

$P(X \geqq a)=0.167$ となる a を求める.



$P\left(Z \geqq \frac{a-65}{12}\right)=0.167$ $\therefore \Phi\left(\frac{a-65}{12}\right)=0.5-0.167=0.333$

$\therefore \frac{a-65}{12}=0.9661$ $\therefore a=65+12\times 0.9661 \fallingdotseq 77$点

6 $X \sim N(2, 1^2)$, $Y \sim N(3, 2^2)$. $\therefore E(X)=2$, $V(X)=1$, $E(Y)=3$, $V(Y)=4$.

$\therefore E(X-Y)=E(X)-E(Y)=2-3=-1$ また X と Y は独立なので $V(X-Y)=V(X)+V(Y)$

$=1+4=5$

7 $X \sim N(20, 3^2)$, $Y \sim N(10, 4^2)$. X と Y は独立なので. 正規分布の再生性より

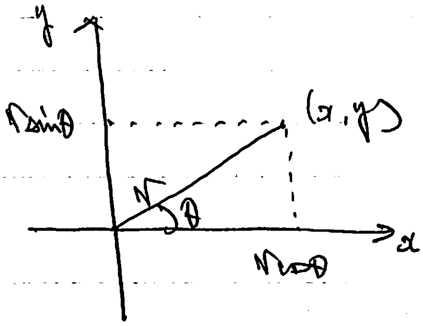
$X-Y \sim N(20-10, 3^2+4^2)=N(10, 5^2)$

$\therefore P(5 \leqq X-Y \leqq 15) = P\left(\frac{5-10}{5} \leqq Z \leqq \frac{15-10}{5}\right) = P(-1 \leqq Z \leqq 1)$

$= 2\times\Phi(1.00) = 2\times 0.3413 = \underline{0.6826}$

$\boxed{8}$ (1) $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ とおく. $I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right)$

$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$ (2重積分)



① $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ と変数変換する

② 積分領域:

$\{(x,y): -\infty<x<\infty, -\infty<y<\infty\} \to D := \{(r,\theta): 0\leqq r<\infty,\ 0\leqq\theta<2\pi\}$

③ ヤコビアン: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix} = r(\cos^2\theta+\sin^2\theta) = r$

④ 2重積分の変数変換

$$I^2 = \iint_D e^{-\frac{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}{2}}\, r\,dr\,d\theta = \iint_D r e^{-\frac{r^2}{2}}dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\infty} r e^{-r^2/2}dr \text{ (累次積分)} = \left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^{\infty} r e^{-r^2/2}dr\right) = 2\pi\int_0^{\infty} r e^{-r^2/2}dr$$

ここで $\int_0^{\infty} r e^{-r^2/2}dr = \left[-e^{-r^2/2}\right]_0^{\infty} = -\underbrace{\lim_{r\to\infty} e^{-r^2/2}}_{=0} - (-1) = 1$

$\therefore I^2 = 2\pi \quad \therefore I = \sqrt{2\pi}$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \underset{dz=\frac{1}{\sigma}dx}{\overset{z=\frac{x-\mu}{\sigma}}{=\!=\!=\!=}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\cdot\sigma dz = \sigma\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}dz = \sqrt{2\pi\sigma^2}$

$\begin{array}{c|c} x & -\infty\to\infty \\ \hline z & -\infty\to\infty \end{array}$

$\boxed{4}$ $$E(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \xlongequal[\substack{dz=\frac{1}{\sigma}dx \\ x\,|\,-\infty\to\infty \\ z\,|\,-\infty\to\infty}]{z=\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma z+\mu)e^{-z^2/2}\,\sigma dz$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\mu\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2/2}dz}_{=\sqrt{2\pi}}+\sigma\int_{-\infty}^{\infty}z\cdot e^{-z^2/2}dz\right\}=(*)$$

一方. $$\int_{-\infty}^{\infty}ze^{-z^2/2}dz=\left[-e^{-z^2/2}\right]_{-\infty}^{\infty}=-\lim_{z\to\infty}e^{-z^2/2}+\lim_{z\to-\infty}e^{-z^2/2}=0.$$

よって. $$(*)=\frac{1}{\cancel{\sqrt{2\pi}}}\times\cancel{\sqrt{2\pi}}\,\mu=\mu.$$

次に. $$V(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$\xlongequal[\substack{dz=\frac{1}{\sigma}dx \\ x\,|\,-\infty\to\infty \\ z\,|\,-\infty\to\infty}]{z=\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma^2z^2\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}\cdot\sigma dz=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}z^2e^{-\frac{z^2}{2}}dz=(**)$$

ここで $$\int_{-\infty}^{\infty}z^2e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\left[z\cdot\left(-e^{-z^2/2}\right)\right]_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\left(-e^{-z^2/2}\right)dz$$

$$=-\underbrace{\lim_{z\to\infty}\frac{z}{e^{z^2/2}}}_{=0}+\underbrace{\lim_{z\to-\infty}\frac{z}{e^{z^2/2}}}_{=0}+\sqrt{2\pi}$$

よって. $$(**)=\frac{\sigma^2}{\cancel{\sqrt{2\pi}}}\times\cancel{\sqrt{2\pi}}=\sigma^2$$