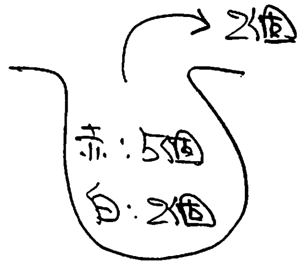
P(A|B), P(A|B^c)は2回目の結果が条件になっているので、文字的な意義が理解しにくい.

1.2 事象の独立性とベイズの定理



$\boxed{1}$ $P(A)=\dfrac{2}{7}$　2回目に赤玉が出るのは.

(1回目, 2回目) = (赤, 赤) と (白, 赤) の2通り

$\therefore P(B)=\dfrac{5}{7}\times\dfrac{4}{6}+\dfrac{2}{7}\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{20+10}{42}=\dfrac{30}{42}=\dfrac{5}{7}$　　$\therefore P(B^c)=1-P(B)=\dfrac{2}{7}$

$P(A\cap B)=\dfrac{2}{7}\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{5}{21}$, $P(A\cap B^c)=\dfrac{2}{7}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{21}$

(白, 赤)　　(白, 白)

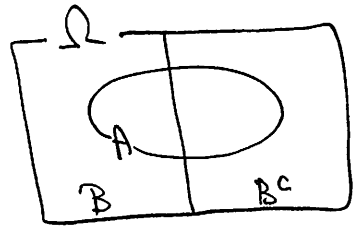
$\therefore P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{5}{21}\times\dfrac{7}{5}=\dfrac{1}{3}$, $P(A|B^c)=\dfrac{P(A\cap B^c)}{P(B^c)}=\dfrac{1}{21}\times\dfrac{7}{2}=\dfrac{1}{6}$

$\boxed{1}$の別解：赤玉5個を$r_1,\cdots,r_5$, 白玉2個をw_1, w_2とすると. すべての標本点は以下の通り.

$(r_1,r_2), (r_1,r_3), (r_1,r_4), (r_1,r_5), (r_1,w_1), (r_1,w_2)$
$(r_2,r_1), (r_2,r_3), (r_2,r_4), (r_2,r_5), (r_2,w_1), (r_2,w_2)$
$(r_3,r_1), (r_3,r_2), (r_3,r_4), (r_3,r_5), (r_3,w_1), (r_3,w_2)$
$(r_4,r_1), (r_4,r_2), (r_4,r_3), (r_4,r_5), (r_4,w_1), (r_4,w_2)$
$(r_5,r_1), (r_5,r_2), (r_5,r_3), (r_5,r_4), (r_5,w_1), (r_5,w_2)$
$(w_1,r_1), (w_1,r_2), (w_1,r_3), (w_1,r_4), (w_1,r_5), (w_1,w_2)$
$(w_2,r_1), (w_2,r_2), (w_2,r_3), (w_2,r_4), (w_2,r_5), (w_2,w_1)$

42通り（すべて同様に確からしく起る）

$\therefore P(A|B)=\dfrac{10}{30}=\dfrac{1}{3}$, $P(A|B^c)=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$



$\boxed{2}$ 原因：B = コインが正常
B^c = コインが不良品
結果：A = 2回とも表.

題意より $P(B)=2/3$, $P(B^c)=1/3$, $P(A|B)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$, $P(A|B^c)=1$

よって全確率の公式より

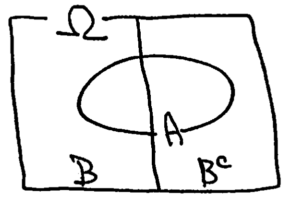
$P(A)=P(B)\cdot P(A|B)+P(B^c)\cdot P(A|B^c)=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}\cdot 1=\dfrac{1}{2}$

$\boxed{2}$ の後半の別解：2回とも表が出るのは、「コインが正常で2回とも表」または「コインが手品用で2回とも表」のいずれか。よって

$$P(A)=P(B\cap A)+P(B^c\cap A)=P(B)\cdot P(A|B)+P(B^c)\cdot P(A|B^c)$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot 1=\underline{\frac{1}{2}}$$

$\boxed{3}$ (1) 全確率の公式より $P(A)=P(B)P(A|B)+P(B^c)\cdot P(A|B^c)$
$=0.2\times 0.7+(1-0.2)\times 0.8=\underline{0.78}$

(2) $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{P(B)\cdot P(A|B)}{P(A)}=\dfrac{0.2\times 0.7}{0.78}=\dfrac{0.7}{3.9}=\underline{\dfrac{7}{39}}$



$\boxed{4}$ 原因：$A=$ 男子である
$A^c=$ 女子である
結果：$B=$ メガネ使用者

題意より $P(A)=0.75$, $P(A^c)=0.25$, $P(B|A)=0.4$, $P(B|A^c)=0.15$
よってベイズの定理より

$$P(A|B)=\frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(A)\cdot P(B|A)+P(A^c)\cdot P(B|A^c)}=\frac{0.75\times 0.4}{0.75\times 0.4+0.25\times 0.15}=\underline{\frac{8}{9}}$$

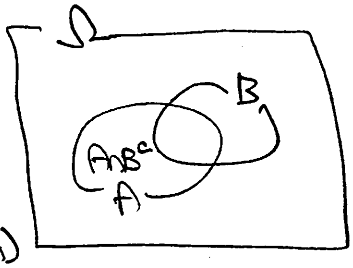
$\boxed{5}$ (1) $A\cap B\subset A$ なので $0\leq P(A\cap B)\leq P(A)$ $\therefore 0\leq P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}\leq 1$

次の頁へ！

(2) $P(\phi|A)=\frac{P(\phi\cap A)}{P(A)}=\frac{P(\phi)}{P(A)}=\frac{0}{P(A)}=0$. $P(\Omega|A)=\frac{P(\Omega\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1$

(3) $B_1\subset B_2$ ならば $A\cap B_1\subset A\cap B_2$ ∴ $P(A\cap B_1)\le P(A\cap B_2)$

∴ $P(B_1|A)=\frac{P(A\cap B_1)}{P(A)}\le\frac{P(A\cap B_2)}{P(A)}=P(B_2|A)$



(4) $A=(A\cap B^c)\cup(A\cap B)$ ∴ $P(A)=P(A\cap B^c)+P(A\cap B)$

互いに排反

∴ $P(B^c|A)=\frac{P(A\cap B^c)}{P(A)}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{P(A)}=1-\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=1-P(B|A)$

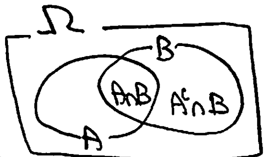
(5) $A\cap(B_1\cup B_2)=(A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)$, $(A\cap B_1)\cap(A\cap B_2)=A\cap(B_1\cap B_2)$

∴ $P(A\cap(B_1\cup B_2))=P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)-P((A\cap B_1)\cap(A\cap B_2))$

$=P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)-P(A\cap(B_1\cap B_2))$

∴ $P(B_1\cup B_2|A)=\frac{P(A\cap(B_1\cup B_2))}{P(A)}=\frac{P(A\cap B_1)}{P(A)}+\frac{P(A\cap B_2)}{P(A)}-\frac{P(A\cap(B_1\cap B_2))}{P(A)}$

$=P(B_1|A)+P(B_2|A)-P(B_1\cap B_2|A)$.



$\boxed{6}$ 題意より. $P(A)=\frac{26}{30}=\frac{13}{15}$. $B=(A\cap B)\cup(A^c\cap B)$ ∴ $P(B)=P(A\cap B)+P(A^c\cap B)$

互いに素

$=\frac{26}{30}\times\frac{4}{29}+\frac{4}{30}\times\frac{3}{29}=\frac{2}{15}$. $P(A\cap B)=\frac{26}{30}\times\frac{4}{29}=\frac{52}{435}$

1個目が良品で2個目が不良品

∴ $P(A\cap B)=\frac{52}{435}\neq\frac{13}{15}\times\frac{2}{15}=P(A)\cdot P(B)$ ∴ AとBは独立でない.

事象Bは「1個目が良品で2個目が不良品」と「1個目が不良品で2個目が不良品」の2つの互いに排反な場合に分かれる. よって

$\boxed{7}$ (1) $P(A)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$. $P(B)=\frac{12}{52}=\frac{3}{13}$. $P(C)=1-P(3枚ともハートでない)$

$=1-\left(\frac{39}{52}\right)^3=1-\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{37}{64}$

(2) $P(B|A)=\frac{12}{52}=\frac{3}{13}$. $P(C|A)=1$

(3) $P(B)=\frac{3}{13}=P(B|A)$ ∴ AとBは独立.

(4) $P(C)=\frac{37}{64}\neq1=P(C|A)$ ∴ AとCは独立でない.

$\boxed{8}$ 仮定より. $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$. $B=(A\cap B)\cup(A^c\cap B)$ ∴ $P(B)=P(A\cap B)+P(A^c\cap B)$.

互いに素

$\therefore P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \cdot P(B) = (1 - P(A)) \cdot P(B) = P(A^c)\, P(B)$.

$\therefore$ A^c と B は独立.