1.10 ポアソン分布と指数分布

$\boxed{2}$ 題意より $X \sim Poisson(10)$． $\therefore P(X=6) = \dfrac{10^6}{6!} \cdot e^{-10} = \dfrac{10^6}{720} \times e^{-10} \fallingdotseq \underline{0.0631}$

$\boxed{3}$ $X=100$個の製品の中の不良品の個数とすると $X \sim B(100, 0.03)$

$$P(X \leqq 2)_{B(100,0.03)} \fallingdotseq P(X \leqq 2)_{Poisson(3)} = \sum_{k=0}^{2} \frac{3^k}{k!} e^{-3} = \frac{17}{2} \times e^{-3} \fallingdotseq \underline{0.4232}$$

ポアソン分布の二項近似

$np = 100 \times 0.03$

$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2) = 0.0498 + 0.1494 + 0.2240$
$= \underline{0.4228}$ ←Poisson分布表を利用

$\boxed{4}$ $X=1$ページ当りのミスプリントの個数とすると，この本は1ページ当り平均1個のミスプリントがあるので $X \sim Poisson(1)$．

$\therefore P(X=0) = \dfrac{1^0}{0!} \cdot e^{-1} = \dfrac{1}{2.718}$ $\therefore$ 求めるページ数 $= 1000 \times \dfrac{1}{2.718} = \underline{368\text{ページ}}$

$\boxed{5}$ $X \sim Exp(\lambda)$とすると 題意より $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = 2$ $\therefore \lambda = \dfrac{1}{2}$ $\therefore X \sim Exp\left(\dfrac{1}{2}\right)$

(1) $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} & (x \geqq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

(2) $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = 2$，$V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2} = 2^2 = 4$

(3) $P(1 \leqq X \leqq 2) = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} dx = \left[-e^{-\frac{x}{2}}\right]_1^2 = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1} = \underline{\frac{\sqrt{e}-1}{e}}$

$\boxed{6}$ (1) e^tのマクローリン展開

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \quad (1)$$

に $t=\lambda$を代入すると． $e^{\lambda} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k / k!$ $\therefore \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \lambda^k / k^2 = 1$

(2) (1)式の両辺をtで微分して．tを掛けると．

$$t e^t = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{t^k}{k!} \quad (2)$$

上式に $t=\lambda$を代入すると． $\lambda e^{\lambda} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$ $\therefore \lambda = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \left(e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}\right) = E(X)$.

次に(2)式の両辺をtで微分してtを掛けると $te^t + t^2e^t = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{t^k}{k!}$.

上式に $t=\lambda$ を代入すると. $\lambda e^\lambda + \lambda^2 e^\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$

$\therefore \lambda + \lambda^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \left(e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}\right) = E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2 = V(X) + \lambda^2 \quad \therefore V(X) = \lambda.$

$\boxed{17}$ (1) $\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^\infty = -\underbrace{\lim_{x\to\infty} e^{-\lambda x}}_{0} + e^0 = 1$

(2) $E(X) = \int_{-\infty}^\infty x \cdot f(x)dx = \lambda \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx$

ここで. $\int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx = \left[x\left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right) dx$

$= -\frac{1}{\lambda} \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{\lambda x}}}_{0} + \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}\left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^\infty = -\frac{1}{\lambda^2}\left\{\overbrace{\lim_{x\to\infty} e^{-\lambda x}}^{0} - 1\right\} = \frac{1}{\lambda^2}.$

$\therefore E(X) = \lambda \times \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$

次に. $E(X^2) = \lambda \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} dx$. ここで $\int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} dx = \underbrace{\left[x^2\left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right)\right]_0^\infty}_{-\frac{1}{\lambda}\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{\lambda x}} = 0}$

$- \int_0^\infty (2x)\left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right) dx$

$= \frac{2}{\lambda} \underbrace{\int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx}_{1/\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^3} \quad \therefore E(X^2) = \lambda \times \frac{2}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^2}$

$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$