1.1 確率

$\boxed{1}$ (I) $0 \leq \frac{N_A}{N} \leq 1$ なので $0 \leq P(A) = \lim_{N\to\infty}\frac{N_A}{N} \leq 1$　(II) $N_\phi = 0$, $N_\Omega = N$ なので

$P(\phi) = \lim_{N\to\infty}\frac{N_\phi}{N} = 0$, $P(\Omega) = \lim_{N\to\infty}\frac{N_\Omega}{N} = 1$　(III) A と B は互いに排反とする。このとき、

$N_{A\cup B} = N_A + N_B$ $\therefore P(A\cup B) = \lim_{N\to\infty}\frac{N_{A\cup B}}{N} = \lim_{N\to\infty}\frac{N_A}{N} + \lim_{N\to\infty}\frac{N_B}{N} = P(A) + P(B)$

$\boxed{2}$ (解法1) 外れくじの2本を区別する場合：分解不可能な結果は、a=1等を引く、b=2等を引く、c_1=外れくじ①を引く、c_2=外れくじ②を引くの4つが考えられる。

(1) 標本点：a, b, c_1, c_2

標本空間 $\Omega = \{a, b, c_1, c_2\}$

(2) すべての事象：

$$\left.\begin{array}{l} \phi, \{a\}, \{b\}, \{c_1\}, \{c_2\} \\ \{a,b\}, \{a,c_1\}, \{a,c_2\}, \{b,c_1\}, \{b,c_2\}, \{c_1,c_2\} \\ \{a,b,c_1\}, \{a,b,c_2\}, \{a,c_1,c_2\}, \{b,c_1,c_2\}, \Omega \end{array}\right\} \text{全部で } 16 = 2^4 \text{ 個}$$

各事象の確率：$P(\phi) = 0$, $P(\Omega) = 1$

$P(\{a\}) = P(\{b\}) = P(\{c_1\}) = P(\{c_2\}) = \frac{1}{4}$

$P(\{a,b\}) = P(\{a,c_1\}) = \cdots = P(\{c_1,c_2\}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$P(\{a,b,c_1\}) = \cdots = P(\{b,c_1,c_2\}) = \frac{3}{4}$

(3) $A = \{a\}$ $\therefore P(A) = \frac{1}{4}$、$B = \{c_1, c_2\}$ $\therefore P(B) = \frac{1}{2}$

(解法2) 外れくじの2本を区別しない場合：分解不可能な結果としては、a=1等を引く、b=2等を引く、c=外れを引くの3つが考えられる。

(1) 標本点：a, b, c. 標本空間 $\Omega = \{a, b, c\}$.

(2) すべての事象：

$$\left.\begin{array}{l} \phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \\ \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\} \\ \Omega \end{array}\right\} \text{全部で } 8 = 2^3 \text{ 個}$$

各事象の確率：$P(\phi) = 0$, $P(\Omega) = 1$

$P(\{a\}) = P(\{b\}) = 1/4$. $P(\{c\}) = 2/4 = 1/2$.

$P(\{a,b\}) = 2/4 = 1/2$. $P(\{a,c\}) = 3/4$, $P(\{b,c\}) = 3/4$

(3) $A = \{a\}$ $\therefore P(A) = 1/4$. $B = \{c\}$ $\therefore P(B) = 1/2$.

$\boxed{3}$ (解法1) 赤玉2個を区別し、取り出した玉の順序を考慮する場合：分解不可能な結果として ω_1 = (赤玉①, 赤玉②), ω_2 = (赤玉①, 白玉), ω_3 = (赤玉②, 赤玉①), ω_4 = (赤玉②, 白玉)

$\omega_5 = ($白玉, 赤玉①$)$, $\omega_6 = ($白玉, 赤玉②$)$ の6つが考えられる.

(1) 標本点: $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$, 標本空間 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$

(2) すべての事象:

$$\left.\begin{array}{l} \phi, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_4\}, \{\omega_5\}, \{\omega_6\} \\ \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \cdots, \{\omega_5, \omega_6\} \\ \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \cdots\cdots, \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\} \\ \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \cdots, \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} \\ \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}, \cdots, \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} \\ \Omega \end{array}\right\} \text{全部で } 64 = 2^6 \text{ 個}$$

各事象の確率: $P(\phi) = 0$, $P(\Omega) = 1$

$P(\{\omega_1\}) = \cdots = P(\{\omega_6\}) = 1/6$

$P(\{\omega_1, \omega_2\}) = \cdots = P(\{\omega_5, \omega_6\}) = 2/6 = 1/3$

$P(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}) = \cdots = P(\{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}) = 3/6 = 1/2$

$P(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}) = \cdots = P(\{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}) = 4/6 = 2/3$

$P(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}) = \cdots = P(\{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}) = 5/6$

(3) $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ $\therefore P(A) = 2/3$.

(解法2) 赤玉2個を区別するが玉の順序は考慮しない場合: 分解不可能な結果として,
$\omega_1 =$ 赤玉①と赤玉②, $\omega_2 =$ 赤玉①と白玉, $\omega_3 =$ 赤玉②と白玉の3つが考えられる.

(1) 標本点: $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, 標本空間 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$

(2) すべての事象:

$$\left.\begin{array}{l} \phi, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\} \\ \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \Omega \end{array}\right\} \text{全部で } 8 = 2^3 \text{ 個}$$

各事象の確率: $P(\phi) = 0$, $P(\Omega) = 1$

$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = P(\{\omega_3\}) = 1/3$

$P(\{\omega_1, \omega_2\}) = P(\{\omega_1, \omega_3\}) = P(\{\omega_2, \omega_3\}) = 2/3$

(3) $A = \{\omega_2, \omega_3\}$ $\therefore P(A) = 2/3$

(解法3) 赤玉2個を区別しないが玉の順序は考慮する場合: 分解不可能な結果として.
$\omega_1 = ($赤玉, 赤玉$)$, $\omega_2 = ($赤玉, 白玉$)$, $($白玉, 赤玉$)$ の3つが考えられる.

(1) 標本点: $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. 標本空間 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

(2) すべての事象:

$$\left.\begin{array}{l} \phi, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\} \\ \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \Omega \end{array}\right\} \text{全部で } 8 = 2^3 \text{ 個}$$

各事象の確率: $P(\phi) = 0$, $P(\Omega) = 1$

$P(\{\omega_1\}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$, $P(\{\omega_2\}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$,

$P(\{\omega_3\}) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{1}{3}$

$P(\{\omega_1, \omega_2\}) = P(\{\omega_1, \omega_3\}) = P(\{\omega_2, \omega_3\}) = 2/3$

(3) $A = \{\omega_2, \omega_3\}$ $\therefore P(A) = 2/3$

(解法4) 赤玉2個を区別せず、玉の順序も考慮しない場合：分解不可能な結果として、

ω_1 = 赤玉と赤玉，ω_2 = 赤玉と白玉 の2つが考えられる。

(1) 標本点：ω_1, ω_2．標本空間 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$

(2) すべての事象：ϕ, $\{\omega_1\}$, $\{\omega_2\}$, Ω 全部で $4 = 2^2$ 個

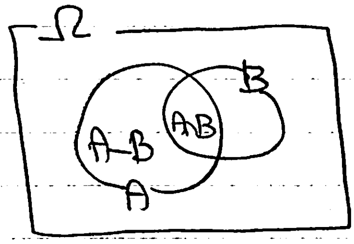
各事象の確率：$P(\phi) = 0$, $P(\Omega) = 1$

$P(\{\omega_1\})$, $P(\{\omega_2\})$ は相対度数的定義で求める．

(3) $A = \{\omega_2\}$ $\therefore P(A) = P(\{\omega_2\})$．

4 $A \subset B$ ならば $A \cap B = A$, $A \cup B = B$ $\therefore (A \cap B) \cup (A \cup B)^c = A \cup B^c$．よって表と裏が出るか、または両方とも裏．言い換えれば、少なくとも一方が裏

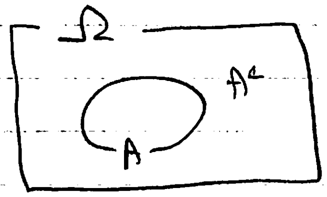
5 (1) $A = \underbrace{(A-B) \cup (A \cap B)}_{\text{互いに排反}}$



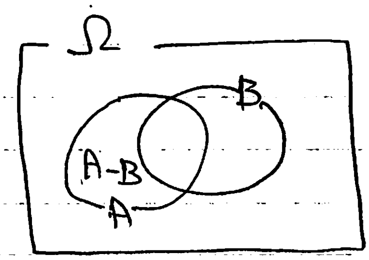
$\therefore P(A) = P(A-B) + P(A \cap B)$

$\therefore P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$．

(2) $\Omega = \underbrace{A \cup A^c}_{\text{互いに排反}}$



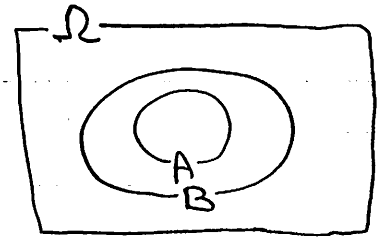
$\therefore \underbrace{P(\Omega)}_{= 1} = P(A) + P(A^c)$ $\therefore P(A^c) = 1 - P(A)$



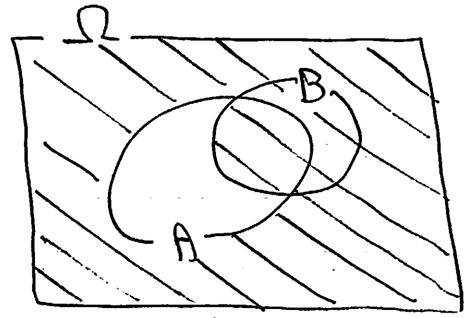
(3) $A \cup B = \underbrace{(A-B) \cup B}_{\text{互いに排反}}$ $\therefore P(A \cup B) = P(A-B) + P(B)$

ここで (1)より $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$ $\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$．

(4) $B = \underbrace{A \cup (B-A)}_{\text{互いに排反}}$ $\therefore P(B) = P(A) + P(B-A) \geqq P(A)$



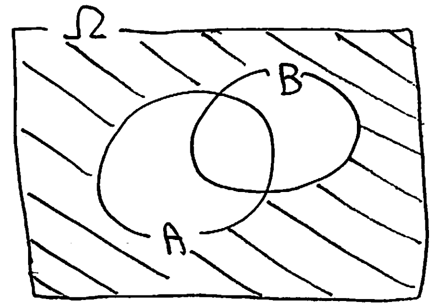
$\boxed{6}$ (1) $A^c \cup B = \underbrace{A^c \cup (A \cap B)}_{\text{互いに排反}}$



$\therefore P(A^c \cup B) = P(A^c) + P(A \cap B)$

$= 1 - P(A) + P(A \cap B) = 1 - p + r$

(2) $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$



$\therefore P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\}$

$= 1 - p - q + r$