

4 章 線形空間

4.1 線形空間と部分空間

約束

- $\mathbb{R}$: 実数全体の集合, real numbers
- $\mathbb{C}$: 複素数全体の集合, complex numbers
- 線形空間の理論では, 扱う数を実数としても複素数としても共通に議論できることが多い. そこで, 共通に議論できるような定義, 命題, 定理においては, $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ を K で表し, K に属する数のことを, スカラーとよぶ.

定義 1 (線形空間, ベクトル, スカラー). 空でない集合 V が次の公理系 (I), (II) を満たしているとき, V を K 上の線形空間またはベクトル空間といい, V の要素をベクトル, K の要素をスカラーという.

(I) V の 2 つのベクトル x と y に対して, それらの和とよばれる V の要素 $x + y$ が定義されていて, V の任意のベクトル x, y, z に対して, 次の公理が成り立つ.

- (1) $x + y = y + x$
- (2) $(x + y) + z = x + (y + z)$
- (3) 零ベクトルとよばれる V の要素 0 が存在し, 任意のベクトル $x \in V$ に対して

$$x + 0 = 0 + x = x$$

を満たす (零ベクトルの存在性).

- (4) 任意のベクトル $x \in V$ に対して

$$x + (-x) = (-x) + x = 0$$

を満たす V のベクトル $-x$ が存在する. このベクトル $-x$ を x の逆ベクトルという (逆ベクトルの存在性).

(II) V のベクトル x とスカラー $r \in K$ に対して, ベクトルのスカラー倍とよばれる V の要素 rx が定義されていて, 任意の $r, s \in K$ と任意の $x, y \in V$ に対して, 次の公理が成り立つ.

- (5) $(r + s)x = rx + sx$
- (6) $r(x + y) = rx + ry$
- (7) $(rs)x = r(sx)$
- (8) $1x = x$

スカラー K を実数全体 $\mathbb{R}$ とするとき, V は実線形空間といい, K を複素数全体 $\mathbb{C}$ とするとき, V は複素線形空間という.

例 4.1 (線形空間の例). 以下はすべて線形空間となる.

$$(1) K^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in K, 1 \leq i \leq n \right\} \text{ の 2 つのベクトル } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ と } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ に対}$$

して，それらの和とよばれる K^n の要素 $x + y$ を

$$x + y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

で定義する．また， V の要素 x とスカラー $r \in K$ に対して，ベクトルのスカラー倍とよばれる K^n の要素 rx を

$$rx := \begin{pmatrix} rx_1 \\ \vdots \\ rx_n \end{pmatrix}$$

で定義する．さらに，公理 (3) を満たす K^n の零ベクトル 0 (の候補) を， n 項零ベクトルを用いて

$$0 := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

で定義する．また，任意のベクトル $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ に対して，公理 (4) を満たす x の逆ベクトル $-x$ (の候補) を

$$-x := \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$$

で定義する．このとき， K^n の和とスカラー倍は，線形空間の公理 (1)–(8) を満たすことが容易に確かめられるので， K^n は線形空間となる．この例では，ベクトルとは n 項縦ベクトルのことであり，ベクトルの和，スカラー倍はそれぞれ，縦ベクトルの和とスカラー倍のことである．

$$(2) \ M(m, n; K) := \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} : x_{ij} \in K, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \right\} \text{ のベクトル}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1} & \cdots & y_{mn} \end{pmatrix}$$

に対して，それらの和とよばれる $M(m, n; K)$ の要素 $x + y$ を

$$x + y := \begin{pmatrix} x_{11} + y_{11} & \cdots & x_{1n} + y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} + y_{m1} & \cdots & x_{mn} + y_{mn} \end{pmatrix}$$

で定義する．また， V の要素 x とスカラー $r \in K$ に対して，ベクトルのスカラー倍とよばれる $M(m, n; K)$ の要素 rx を

$$rx := \begin{pmatrix} rx_{11} & \cdots & rx_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ rx_{m1} & \cdots & rx_{mn} \end{pmatrix}$$

で定義する．さらに，公理 (3) を満たす $M(m, n; K)$ の零ベクトル $\mathbf{0}$ (の候補) を， (m, n) 型の零行列を用いて

$$\mathbf{0} := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

で定義する．また，任意のベクトル $x = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$ に対して，公理 (4) を満たす x の逆ベクトル $-x$ (の候補) を

$$-x := \begin{pmatrix} -x_{11} & \cdots & -x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -x_{m1} & \cdots & -x_{mn} \end{pmatrix}$$

で定義する．このとき， $M(m, n; K)$ の和とスカラー倍は，線形空間の公理 (1)–(8) を満たすことが容易に確かめられるので， $M(m, n; K)$ は線形空間となる．この例では，ベクトルとは (m, n) 型の行列のことであり，ベクトルの和，スカラー倍はそれぞれ，行列の和とスカラー倍のことである．

(3) 実数 $\mathbb{R}$ を係数にもつ変数 t の多項式全体を $\mathbb{R}[t]$ で表す．このとき， $\mathbb{R}[t]$ の要素は多項式なので，それらを P, Q などで表す．多項式 P, Q と実数 r に対して，それらの和 $P + Q$ と定数倍 rP は，すべての実数 t に対して，それぞれ

$$(P + Q)(t) := P(t) + Q(t), \quad (rP)(t) := rP(t)$$

で定義される多項式であることを思い起こして欲しい．

さて， $\mathbb{R}[t]$ の2つのベクトル $x = P$ と $y = Q$ に対して，それらの和とよばれる $\mathbb{R}[t]$ の要素 $x + y$ を，多項式の和を用いて

$$x + y := P + Q$$

で定義する．また， V の要素 $x = P$ とスカラー $r \in K$ に対して，ベクトルのスカラー倍とよばれる $\mathbb{R}[t]$ の要素 rx を，多項式の定数倍を用いて

$$rx := rP$$

で定義する．さらに，公理 (3) を満たす $\mathbb{R}[t]$ の零ベクトル $\mathbf{0}$ (の候補) を，すべての実数 t に対して $O(t) := 0$ で定義される多項式 O を用いて

$$\mathbf{0} := O$$

で定義する．また，任意のベクトル $x = P$ に対して，公理 (4) を満たす x の逆ベクトル $-x$ (の候補) を

$$-x := -P$$

で定義する．このとき， $\mathbb{R}[t]$ の和とスカラー倍は，線形空間の公理 (1)–(8) を満たすことが容易に確かめられるので， $\mathbb{R}[t]$ は線形空間となる．この例では，ベクトルとは，実数を係数にもつ変数 t の多項式のことであり，ベクトルの和，スカラー倍はそれぞれ，多項式の和とスカラー倍のことである．