

平成 27 年度確率・統計試験問題 (河邊担当)

平成 28 年 2 月 3 日 2 時限 (10:40~12:10)

[1] あるウィルスに感染している人の割合は 1%であることが統計的に知られている。ウィルスに感染している人の 90%が検査で陽性反応 (ウィルスにかかっていると判断される) を示す。ウィルスに感染していない人の 0.5%が検査で陽性反応を示す。この検査を受けた人が陽性反応を示したとき、本当はウィルスに感染していない確率を求めよ。

[2] 過去の経験から、あるレストランではテーブル予約客の 8 人に 1 人は当日現れないという。このレストランの収容定員は 45 人であるが、毎晩 50 人までの予約を受け付けている。このレストランが当日現れた客のすべてを収容できる確率を二項分布の正規近似 (端点補正あり) を使って求めよ。

[3] 次の問いに答えよ。

- (1) ある溶液 1cc 当たりに入っているバクテリアの数は平均 4 個のポアソン分布に従っている。この溶液 1cc を試験管にとるとき、試験管内に少なくとも 1 個のバクテリアが入っている確率を求めよ。
- (2) 桃の缶詰の中身の重さは平均 300g、標準偏差 1.2g の正規分布に従い、空き缶の重さは平均 20g、標準偏差 0.5g の正規分布に従う。無作為に選んだ桃の缶詰 1 個の重さ (= 中身と空き缶の重さの和) が 323g 以上となる確率を求めよ。

[4] 確率変数 X と Y の同時確率密度関数 $p(x, y)$ が

$$p(x, y) = \begin{cases} c(1 + xy) & (-1 < x < 1, -1 < y < 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

のとき、次を求めよ。

- (1) 定数 c の値。
- (2) X の周辺確率密度関数 $p_1(x)$
- (3) X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$
- (4) $P(X + Y > 0)$

[5] 次の問いに答えよ。

- (1) ある測定方法で測定した製品 A の重さ (g) は標準偏差 0.04g の正規分布に従う。この測定方法を用いて、製品 A の重さを 10 回繰り返し測定したところ、次の測定値 (g) を得た。

8.99, 8.95, 9.01, 9.05, 9.05, 9.07, 8.91, 8.99, 9.04, 8.96

製品 A の重さの真の値 μ の信頼度 99%の信頼区間を求めよ。また、求めた 99%信頼区間の統計的な意味を説明せよ。

- (2) 政党 B の支持率調査を行う目的で、300 人の有権者に政党 B を支持するかどうかを無作為に尋ねたところ、72 人が支持すると答えた。政党 B の支持率の信頼度 95%の信頼区間を求めよ。

[6] 次の問いに答えよ。

- (1) A 空港から B 駅までを結ぶリムジンバスの昼間の所要時間は平均 30 分と宣伝されている。利用者側で所要時間を 100 回測ったところ、平均は 33.5 分、標準偏差は 8 分であった。所要時間は宣伝されている 30 分より長いといえるかを有意水準 5%で検定せよ。
- (2) ある会社で製造している電子部品の長さのばらつきは、標準偏差が 0.1mm の正規分布に従っている。定期点検のため、無作為に製品 14 個を抽出して長さ (mm) を調べたところ、標本標準偏差は 0.118mm であった。製品の長さのばらつきに変化が生じているかどうかを有意水準 5%で検定せよ。

① $A_1 = \text{ウイルスに感染していない}$, $A_2 = \text{ウイルスに感染している}$

$B_1 = \text{陽性反応}$, $B_2 = \text{陰性反応}$

よって、問題より、 $P(A_1) = 0.99$, $P(A_2) = 0.01$, $P(B_1|A_2) = 0.9$, $P(B_1|A_1) = 0.005$
 $P(B_2|A_1) = 0.995$

$$P(A_1|B_1) = \frac{P(A_1) \cdot P(B_1|A_1)}{P(A_1) \cdot P(B_1|A_1) + P(A_2) \cdot P(B_1|A_2)}$$

$$= \frac{0.99 \times 0.005}{0.99 \times 0.005 + 0.01 \times 0.9} = \frac{495}{1395} = \frac{11}{31} \approx 0.355$$

② $X = \text{1週間以内の当日現病者の人数}$ とする。 $X \sim B(50, 1/8)$ 。よって、 X の確率関数は $P(0 \leq X \leq 45)$ 。 $np = 50 \times \frac{1}{8} = 6.25 \geq 5$, $nq = 50 \times \frac{7}{8} = 37.5 \geq 5$

$\therefore B$ は正規分布に近似 (端点補正あり) する。 $npq = 50 \times \frac{1}{8} \times \frac{7}{8} = 5.47$ となる。

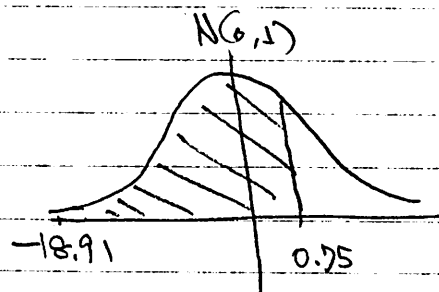
$$P(0 \leq X \leq 45) \underset{B(50, 1/8)}{=} P(-0.5 \leq X \leq 45.5) \underset{N(6.25, 5.47)}{=}$$

$$= P\left(\frac{-0.5 - 6.25}{\sqrt{5.47}} \leq Z \leq \frac{45.5 - 6.25}{\sqrt{5.47}}\right) \underset{N(0, 1)}{=}$$

$$= P\left(-\frac{6.75}{2.34} \leq Z \leq \frac{39.25}{2.34}\right) = P(-18.91 \leq Z \leq 16.77)$$

$$= P(Z \leq 16.77) - P(Z \leq -18.91)$$

$$= 0.5 + 0.2734 = 0.7734$$



③

(1) $X = \text{試験管内のバクテリアの個数}$ とする。 $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ 。問題より

$\lambda = E(X) = 4$ 。 $X \sim \text{Poisson}(4)$ 。よって Poisson 分布を用いる。

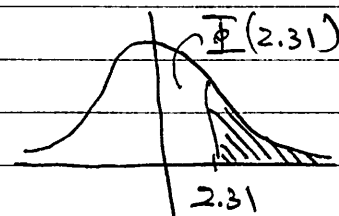
$$P(X=0)=0.0183 \therefore P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0.0183 = \underline{0.9817}$$

(2) $X = \text{中身の重さ (g)}, Y = \text{空缶の重さ (g)}$ とおく。題意より。

$X \sim N(300, 1.2^2), Y \sim N(20, 0.5^2)$ であり、 X と Y は独立である。

また、 $X+Y \sim N(320, 1.2^2 + 0.5^2) = N(320, 1.69)$

$$\begin{aligned} \therefore P(X+Y \geq 323) &= P\left(Z \geq \frac{323-320}{\sqrt{1.69}}\right) = P\left(Z \geq \frac{3}{1.3}\right) = P(Z \geq 2.31) \\ &= 0.5 - \Phi(2.31) = 0.5 - 0.4896 = \underline{0.0104} \end{aligned}$$



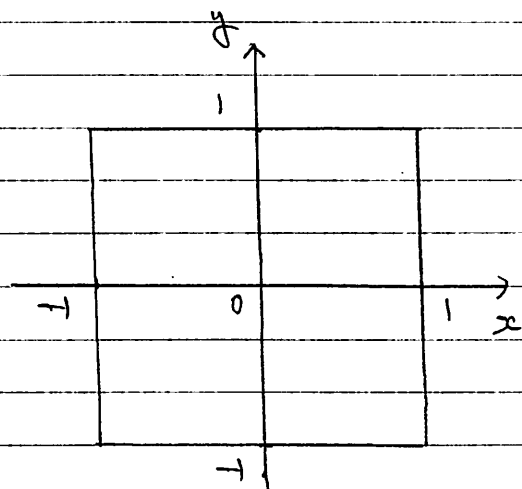
[4] $D = \{(x, y) : -1 < x < 1, -1 < y < 1\} \in \mathbb{R}^2$

$$(1) I = \iint_D c(1+xy) dx dy \quad (\text{2重積分})$$

$$= c \int_{-1}^1 dx \left(\int_{-1}^1 (1+xy) dy \right) \quad (\text{累次積分})$$

$$\geq 2 \int_{-1}^1 (1+xy) dy = \int_{-1}^1 dy = 2$$

$$\therefore I = c \cdot \int_{-1}^1 2 dx = 4c \therefore \underline{c = 1/4}$$



$$(2) \bullet -1 < x < 1 \text{ かつ } y \in \mathbb{R} : p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4}(1+xy) dy = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} 1 dy = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\bullet x \notin (-1, 1) \text{ かつ } y \in \mathbb{R} : p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} 0 dy = 0$$

$$\text{したがって } p(x) = \begin{cases} 1/2 & (-1 < x < 1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$$(3) E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{x}{2} dx = \underline{\underline{0}}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{2} dx = \left[\frac{x^3}{6} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

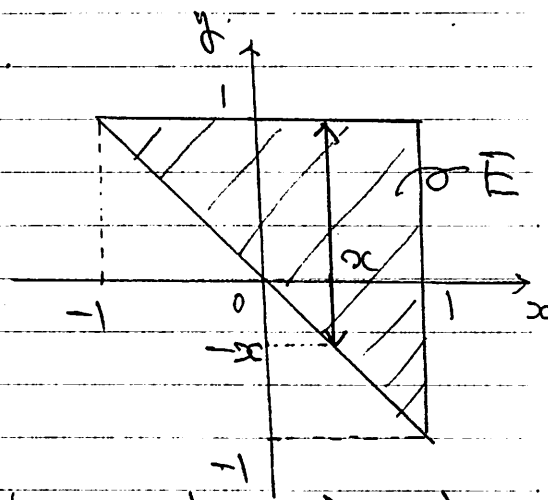
$$(4) E = \{(x, y) : -1 < x < 1, -1 < y < 1, x+y > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$P(X+Y > 0) = \iint_E \frac{1}{4} (1+xy) dx dy \quad (2 \text{ 重積分})$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 dx \int_{-x}^1 (1+xy) dy \quad (累次積分)$$

$$\stackrel{=2}{=} \int_{-1}^1 (1+xy) dy = \left[y + \frac{x}{2} y^2 \right]_{-x}^1 = 1 - (-x) + \frac{x}{2} (1 - (-x)^2) = 1 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^3$$

$$\therefore P(X+Y > 0) = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (1 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^3) dx = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 1 dx = \frac{2}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$



[5] (1) 題意: 母平均 μ 的信赖区间为

$$\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z(\alpha/2) < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z(\alpha/2)$$

$$\begin{aligned} \therefore \bar{X} &= \frac{1}{10} (8.99 + 8.95 + 9.01 + 9.05 + 9.05 + 9.07 + 8.91 + 8.99 + 9.04 + 8.96) \\ &= 9.002 \end{aligned}$$

$$\sigma = 0.04, n = 10, 100(1-\alpha) = 99 \therefore \alpha = 0.01 \therefore z(\alpha/2) = z(0.005) = 2.5758$$

$$\therefore \text{此 } \bar{X} \text{ 的 } 99\% \text{ 信赖区间为 } 8.967 < \mu < 9.033$$

99% 信赖区间的意义: 假设 A 重复 100 回抽样调查, 信赖区间 E 的作法, 在 100 回中只有 1 回的信赖区间 E 不包含 μ , 3 个中的 99 回的信赖区间 E 包含 μ . 则 1 值的信赖区间为 μ 的估计值 $\bar{X}$ 的信赖区间.

$$(2) np = nP = 300 \times \frac{72}{300} = 72 \geq 5, nq = 300 - 72 = 228 \geq 5 \text{ 適用 } B_n$$

支持率 P の信頼区間 PI

$$P - \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} \cdot z(\alpha/2) < p < P + \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} \cdot z(\alpha/2)$$

$$\therefore P = \frac{72}{300} = 0.24, n = 300, 100(1-\alpha) = 95 \therefore \alpha = 0.05$$

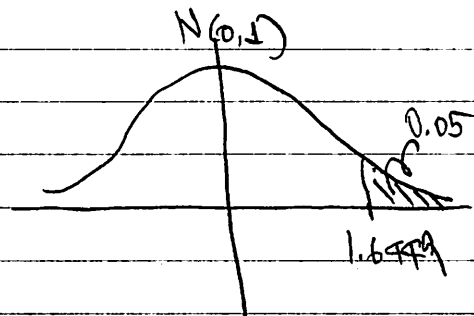
$$\therefore z(\alpha/2) = z(0.025) = 1.96. \text{ したがって } 0.19 < p < 0.29$$

[6] (1) 帰無仮説 $H_0: \mu = 30$ (2) 対立仮説 $H_1: \mu > 30$ (右側検定)

(3) 検定統計量: 標本平均 $\bar{X}$. 仮説 H_0 かつ $z \in 2\pi$ $z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - 30}{0.8/\sqrt{100}}$
 $= \frac{\bar{X} - 30}{0.8} \sim N(0, 1)$

(4) 棄却域 α 設定: 有意水準 $\alpha = 0.05$

$$\therefore z(0.05) = 1.6449 \therefore \text{棄却域 } z > 1.6449$$



(5) 検定値の計算: $z = \frac{33.5 - 30}{0.8} = 4.375$

(6) 結論: z の検定値が棄却域に入っているため、仮説 H_0 を棄却する。p.2.

「所要時間平均が30分以内である」 (有意水準5%)

(2) (1) 帰無仮説 $H_0: \sigma = 0.1$ (2) 対立仮説 $H_1: \sigma \neq 0.1$ (両側検定)

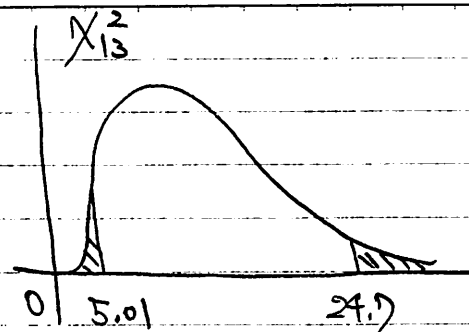
(3) 検定統計量: 標本分散 S^2 . 仮説 H_0 かつ $\chi^2 \in 2\pi$ $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{13S^2}{0.1^2}$
 $= 1300 S^2 \sim \chi_{13}^2$

(4) 棄却域の設定: 有意水準 $\alpha = 0.05$

$$\therefore \chi^2_{13}(\alpha/2) = \chi^2_{13}(0.025) = 24.7$$

$$\chi^2_{13}(1-\alpha/2) = \chi^2_{13}(1-0.025) = \chi^2_{13}(0.975)$$

$$= 5.01 \quad \text{よって棄却域は } \chi^2 < 5.01 \text{ かつ } \chi^2 > 24.7$$



(5) 果理値の計算: $\chi^2 = 1300 \times 0.118^2 = 18.10$

(6) 結論: χ^2 の値は棄却域に入らず、仮説 H_0 を棄却しない。よって

製品の長さのばらつきに変化はない (有意水準 5%)