第2章 連立1次方程式（復習）

定義1（行列の行基本変形）行列の行に対する次の3つの変形を行基本変形という.

(1) 1つの行を何倍（≠0倍）かする

(2) 2つの行を入れ替える

(3) 1つの行に他の行の何倍かを加える.

定義2（行の主成分）

行列の零ベクトルでない行ベクトルの0でない最初の成分をその主成分という.

例3（行の主成分）

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$ ：○印をつけた成分が各行の主成分

定義4（簡約な行列）次の性質(I)−(IV)を満たす行列を簡約な行列という：

(I) 行ベクトルのうちに零ベクトルがあれば，それは零ベクトルでないものより下にあ

(III) 零ベクトルでない行ベクトルの主成分は1である.

(III) 各行の主成分は下の行ほど右にある

(IV) 各行の主成分を含む列の他の成分は全て0である.

例15（簡約な行列）

簡約かどうかの見分け方

- 零ベクトルは他のものより下にある
- 主成分は1
- 0が階段上に並ぶ
- 主成分を含む列の他の成分は0

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

例題2.2.1.（簡約でない行列の例と行列の簡約化）

次の行列が簡約でない理由を述べ，基本変形で簡約な行列に変形せよ.

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(解) (1) (II)を満たさない.

$\longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ①$\times \frac{1}{2}$

(2) (I)を満たさない

$\longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ③ ②

(3) (IV)を満たさない

$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ①$+(-3)\times$②

$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ①$+(-2)\times$③

(4) (III)を満たさない.

$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ③ ②... ①

□

定義6（行列の簡約化）以下の操作を行列の簡約化という.

$$\text{行列 } A \xrightarrow[\text{行基本変形}]{\text{有限回の}} \text{簡約な行列 } B$$

例12（行列の簡約化の方法）

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -9 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

・零ベクトルがあれば最下行に移動

・主成分が最も左にある行を第1行に移動

$$\to \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & -6 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -9 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} ③ \\ \\ ① \end{matrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & -9 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} ① \times \frac{1}{2}$$

・第1行の主成分を1にする.

$$\to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} ② + (-3) \times ①$$

・第1行の主成分を含む列の他の成分を全て0にする.

$$\to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} ③ \\ ② \end{matrix}$$

・第2行以下の行ベクトルのうち主成分が最も左にある行を第2行に移動

$$\to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} ② \times \frac{1}{2}$$

・第2行の主成分を1にする

$$\to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 5/2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} ① + 3 \times ②$$

・第2行の主成分を含む列の他の成分を全て0にする.

$$\to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 5/2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} ③\times\frac{1}{2}$$

・第3行の主成分を1にする

$$\to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} ①+(-\frac{5}{2})\times③ \\ ②+(-\frac{3}{2})\times③ \end{matrix}$$

・第3行の主成分を含む列の他の成分を全て0にする

□

定理2.2.1（簡約化可能性と一意性）任意の行列は基本変形を繰り返すことにより簡約化できる。また、与えられた行列の簡約化は唯一通りに定まる

定義8.（行列の階数）行列Aの簡約化をBとすると

$\mathrm{rank}(A) :=$ Bの零ベクトルでない行の個数

$=$ Bの行の主成分を含む列の個数

定理2.2.2（階数の最大値）Aが $m\times n$ 行列ならば

$\mathrm{rank}(A) \leq \min(m, n)$.

例4（行列の階数の求め方）

行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -5 & -1 \end{bmatrix}$ の階数を求めよ。

（解）階数を求めるにはAを簡約化すればよい。

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} ③ \\ \\ ① \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ ② - ① \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ ② \times \frac{1}{2} \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} ① + 2 \times ② \\ \\ ③ - ② \end{array}$$

以上より $\mathrm{rank}(A) = 2$ □

定義8 (同次形の連立1次方程式)

$A = [A_{ij}]$: $m \times n$ 行列, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ とするとき, $Ax = 0$ の形の

連立1次方程式, i.e.,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

を 式の本数 $= m$，未知数の個数 $= n$ の 同次形 の連立1次方程式という.

$x = 0$ は常に解であるので これを 自明な解 という.

定理2.3.3（同次形連立1次方程式の解）

A : $m \times n$ 型とする.

(1) 同次形連立1次方程式 $Ax = 0$ は自明な解しかもたない

$\iff \mathrm{rank}(A) = n$

(2) $m < n$ ならば $Ax = 0$ は自明でない解をもつ.

例10（同次形連立1次方程式の解法）

次の連立1次方程式を解け

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \qquad + 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

(解) 解法の流れ

(1) 与式を行列表現して $Ax = 0$ と表す

(2) $A \xrightarrow[\text{簡約化}]{} B$

(3) $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を $x_1,\cdots,x_n$ を用いて書き直し、Bの主成分に対応しない変数の値を任意に与え、主成分に対応する変数で解く。

以上の各ステップを実行すると以下のようになる。

(1)
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2)
$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad ②-①$$

$$\to\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{B} \quad ①+2\times②$$

(3) $$B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\iff\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$x_3=c_1$, $x_4=c_2$ とおくと、 $x_1=-2c_1-c_2$, $x_2=-c_1+c_2$

$$\therefore\ x = \begin{bmatrix} -2c_1 - c_2 \\ -c_1 + c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

□

定義11.（正則行列，逆行列） A, B：n次正方行列とする．

BがAの逆行列 $\Longleftrightarrow$ $AB = BA = E_n$（n次単位行列）

このとき，Aは正則であるといい，BのことをA^{-1}で表す．

定理12（逆行列の一意性） 正方行列Aの逆行列は存在すればただ1つに定まる．

（証明） B、Cが共にAの逆行列とすると．

$AB = BA = E_n$ かつ $AC = CA = E_n$．

$\therefore B = BE_n = B(AC) = (BA)C = E_nC = C$ □

定理2.4.2.（逆行列が存在するための条件） A：n次正方行列とする．

このとき，次の(1)−(5)は同値：

(1) $\mathrm{rank}(A) = n$

(2) Aの簡約化はE_nである

(3) 任意のn次列ベクトルbに対して，$Ax = b$は唯一つの解をもつ

(4) $Ax = 0$ は自明な解しかもたない.

(5) A は正則, i.e., A は逆行列をもつ.

定理14 (逆行列の計算方法) n 次正方行列 A の逆行列が存在すれば

$$[A \,\vdots\, E_n] \xrightarrow{A\text{を簡約化}} [E_n \,\vdots\, A^{-1}]$$

で求まる. A の簡約化が E_n とならなければ逆行列は存在しない.

例題2.4.1. 次の行列の逆行列を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(解)

$$\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & -4 & 2 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\\ \\ \\
\\ ② + (-2) \times ① \\ ③ - ① \\
\\ ② \times (-1) \\ \\
① + (-2) \times ② \\ \\ \\
① + ③ \\ ② - ③ \\ \\
\end{array}$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□

第4章 ベクトル空間

4.1 ベクトル空間

定義4.1.1（体）

体＝四則演算がその中で閉じている数の集合

例

$\mathbb{Q}$＝有理数全体
$\mathbb{R}$＝実数全体
$\mathbb{C}$＝複素数全体

は体

$\mathbb{Z}$＝整数全体は体ではない

$\because$) $1, 2 \in \mathbb{Z}$ であるが $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ □

約束　以下では，考える"数全体"は実数体$\mathbb{R}$とする，i.e.，スカラー＝実数とする．特に断わらない限り，以下の議論は複素数体$\mathbb{C}$，i.e.，スカラー＝複素数の場合にも成り立つ．

定義4.1.2.（ベクトル空間）空でない集合Vに次の2つの演算

ベクトルの和：$u+v$　$(u, v \in V)$

ベクトルのスカラー倍：au　$(u \in V,\ a \in \mathbb{R})$

が定義され，$u+v,\ au \in V$であり，次の(1)－(8)の性質を満たすとき，

Vを($\mathbb{R}$上の)ベクトル空間といい、Vの要素をベクトルという.

(1) $u+v=v+u$

(2) $(u+v)+w=u+(v+w)$

(3) 「すべての$u\in V$に対して$u+0=0+u=u$」となるベクトル$0\in V$が存在する.

(4) $a(bu)=(ab)u$

(5) $(a+b)u=au+bu$

(6) $a(u+v)=au+bv$

(7) $1u=u$

(8) $0u=0$

上の(1)-(8)の性質をベクトル空間の公理という.

定義4.1.3.(零ベクトル) ベクトル空間の公理の(3)の性質「…」を満たすベクトル$0\in V$をVの零ベクトルという. "零ベクトルの条件"と呼ぶ

補足4.1.4A(零ベクトルの一意性) Vの零ベクトル0はただ1つしかない.

(証明) $0\in V$の他に、$0'\in V$も零ベクトルの条件を満たすとする.

このとき、すべてのu ($\in V$)に対して$u+0=0+u=0$、すべての$v\in V$に対して

$v+0'=0'+v=0'$. $u=0'$, $v=0$を代入すると.

$$\mathbf{0}'+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{0}'=\mathbf{0},\quad \mathbf{0}+\mathbf{0}'=\mathbf{0}'+\mathbf{0}=\mathbf{0}'$$

$$\therefore\ \mathbf{0}=\mathbf{0}'+\mathbf{0}=\mathbf{0}'$$

よって零ベクトルはただ1つしか存在しない。 □

補足4.1.4B（逆ベクトル） 各ベクトル $\mathbf{u}\in V$ に対して $(-1)\mathbf{u}$ を $-\mathbf{u}$ で表し、$\mathbf{u}$ の逆ベクトルという。このとき

$$\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=(-\mathbf{u})+\mathbf{u}=\mathbf{0}$$

が成り立つ。

（証明） $-\mathbf{u}=(-1)\mathbf{u}$ なので

$$\mathbf{u}+(-\mathbf{u})\underset{(1)}{=}(-\mathbf{u})+\mathbf{u}\underset{(7)}{=}(-1)\mathbf{u}+1\mathbf{u}\underset{(5)}{=}\{(-1)+1\}\mathbf{u}=0\mathbf{u}\underset{(8)}{=}\mathbf{0}$$

□

注意 ベクトル空間の公理として

(8) $0\mathbf{u}=\mathbf{0}$

の代わりに

(8)' 各 $\mathbf{u}\in V$ に対して、$\mathbf{u}+\mathbf{u}'=\mathbf{u}'+\mathbf{u}=\mathbf{0}$ となる $\mathbf{u}'\in V$ が存在する

を採用する教科書もあるが、補足4.1.4Bより、(8)と(8)'のどちらを公理として採用してもよいことがわかる。

例4.1.5 (ベクトル空間の例)

(1)

$$\mathbb{R}^n := \left\{ \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} : a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

実数を成分とする
n項ベクトル全体

$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, $c \in \mathbb{R}$ に対して

和 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$: $\mathbf{a}+\mathbf{b} := \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{bmatrix}$

スカラー倍 $c\mathbf{a}$: $c\mathbf{a} := \begin{bmatrix} ca_1 \\ ca_2 \\ \vdots \\ ca_n \end{bmatrix}$

零ベクトル $\mathbf{0}$: $\mathbf{0} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

とすると、線形空間の公理(1)−(8)が成り立つ　∴ $\mathbb{R}^n$ は ベクトル空間

(2) $\mathbb{R}_n := \{ \mathbf{a} = [a_1, a_2, \cdots, a_n] : a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$

← 実数を成分とする n 次行ベクトル全体

$\mathbf{a} = [a_1, a_2, \cdots, a_n]$, $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \cdots, b_n]$, $c \in \mathbb{R}$ に対して

和 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$: $\mathbf{a}+\mathbf{b} := [a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n]$

スカラー倍 $c\mathbf{a}$: $c\mathbf{a} := [ca_1, ca_2, \cdots, ca_n]$

零ベクトル $\mathbf{0}$: $\mathbf{0} := [0, 0, \cdots, 0]$

とすると、線形空間の公理(1)−(8)が成り立つ　∴ $\mathbb{R}_n$ はベクトル空間.

(3) $\mathbb{R}[x]_n :=$ x を変数とする実係数の高々 n 次の多項式全体

$f, g \in \mathbb{R}[x]_n$, $c \in \mathbb{R}$ に対して.

和 $f+g$: $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$

スカラー倍 cf : $(cf)(x) := c\,f(x)$

零ベクトル f_0 : $f_0(x) := 0$ ← 常に値が 0 の関数

とすると、線形空間の公理(1)−(8)が成り立つ.　∴ $\mathbb{R}[x]_n$ はベクトル空間

(4) $C(a,b) :=$ 開区間 (a,b) 上で連続な実数値関数全体

(3)と同じ和、スカラー倍、零ベクトルに関してベクトル空間となる.

(5) $(\mathcal{S}) := \{ \mathbf{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} :$ 各 $a_n \in \mathbb{R} \}$

← 各項が実数の数列全体

$\mathbb{a}=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\mathbb{b}=\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $c\in\mathbb{R}$に対して

和 $\mathbb{a}+\mathbb{b}$: $\mathbb{a}+\mathbb{b}:=\{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty}$

スカラー倍 $c\mathbb{a}$: $c\mathbb{a}:=\{ca_n\}_{n=1}^{\infty}$

零ベクトル $\mathbb{0}$: $\mathbb{0}:=\{0,0,\cdots\cdots\}$ ← すべての項が 0 の数列.

とすると 線形空間の公理(1)-(8)が成り立つ ∴ $(\mathcal{S})$は ベクトル空間

例 1.6 (ベクトル空間でない例)

(1) $V:=\{f\in\mathbb{R}[x]_n : f(0)=1\}$

← $f(0)=1$ を満たす高々n次の実係数の多項式全体

$f,g\in V$ とすると. $(f+g)(0)=f(0)+g(0)=1+1=2$

∴ $f+g\notin V$ ∴ 和 $f+g$ を Vの要素として定義できないので. Vは

ベクトル空間ではない.

(2) $V:=\{\mathbb{a}=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\in(\mathcal{S}) : \lim_{n\to\infty}a_n=1\}$

← 1に収束する実数列全体

$\mathbb{a}=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\in(\mathcal{S})$に対して. $2\mathbb{a}=\{2a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ここで $\lim_{n\to\infty}(2a_n)=2$

∴ $2\mathbb{a}\notin V$ ∴ スカラー倍 $2\mathbb{a}$を Vの要素として定義できないので. Vは

ベクトル空間ではない.

定義4.1.7 (部分空間) V: ベクトル空間, WはVの部分集合 (これを $W \subset V$とかく).

WがVの部分空間 $\overset{\text{def.}}{\iff}$ WはVの和, スカラー倍, 零ベクトルを用いて ベクトル空間となる.

定理4.1.1 (部分空間であるための条件)

V: ベクトル空間, $W \subset V$とする.

WがVの部分空間 $\iff$ (i) $0 \in W$

(ii) $u, v \in W$ならば $u+v \in W$

(iii) $u \in W$, $c \in \mathbb{R}$ ならば $cu \in W$

(証明) ($\Rightarrow$)は部分空間の定義より明らか.

($\Leftarrow$) (ii), (iii)より, WはVの和とスカラー倍に関して閉じている.

また(i)よりWは零ベクトル0を含む. Wの要素はVの要素でもあるので 線形空間の公理(1)−(8)が成り立つことは明らか. よって, Wはベクトル空間 □

例題4.1.1 (部分空間であることの証明)

A: $m \times n$行列, $W := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$ とすると, Wは$\mathbb{R}^n$の部分空間であることを示せ.

連立1次方程式 $Ax=0$の解空間という.

(解) 定理4.1.1の条件(i), (ii), (iii)を確かめればよい.

(i) $A\mathbf{0}=\mathbf{0}$ なので $\mathbf{0}\in W$

(ii) $x, y\in W$ とすると $A(x+y)=Ax+Ay=\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$

$\therefore x+y\in W$

(iii) $x\in W$, $c\in\mathbb{R}$ とすると $A(cx)=c(Ax)=c\mathbf{0}=\mathbf{0}$

$\therefore cx\in W$

以上より, W は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である □

例題4.1.2 (部分空間の判定) 次の W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間となるかどうか調べよ.

(1) $W=\left\{x\in\mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} 2x_1+3x_2-x_3=0 \\ x_1-2x_2+3x_3=0 \end{array}\right\}$

(2) $W=\left\{x\in\mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} 2x_1+3x_2-x_3=1 \\ x_1-2x_2+3x_3=2 \end{array}\right\}$

(解) $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ とおく.

(1) $W=\{x\in\mathbb{R}^3 : Ax=\mathbf{0}\}$ なので 例題4.1.1より W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間 (あるいは, 直接, 定理4.1.1の条件(i), (ii), (iii)を確かめてよい)

(2) $A\mathbf{0}=\mathbf{0}\neq\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ なので $\mathbf{0}\notin W$. よって, W は部分空間でない □

例題4.1.3（部分空間の判定）次の W は $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間となるかどうか調べよ.

(1) $W=\{f\in\mathbb{R}[x]_3 : f(1)=0,\ f(-1)=0\}$

(2) $W=\{f\in\mathbb{R}[x]_3 : f(1)=1\}$

(3) $W=\{f\in\mathbb{R}[x]_3 : xf'(x)=2f(x)\}$

（解）(1) 部分空間である. 定理4.1.1の条件(i),(ii),(iii)を確かめる.

(i) $f_0(x)=0$（常に0の値をとる関数）とすると, $f_0(1)=f_0(-1)=0$

$\therefore f_0\in W$

(ii) $f, g\in W$ とすると, $f(1)=f(-1)=g(1)=g(-1)=0$

$\therefore\ (f+g)(1)=f(1)+g(1)=0+0=0$

$(f+g)(-1)=f(-1)+g(-1)=0+0=0$

$\therefore f+g\in W$

(iii) $f\in W$, $c\in\mathbb{R}$ とすると,

$(cf)(1)=cf(1)=c\cdot 0=0$

$(cf)(-1)=cf(-1)=c\cdot 0=0$

$\therefore cf\in W$

(2) 部分空間でない. 何故なら, $f_0(1)=0\neq 1$ なので $f_0\notin W$ となるから.

(3) 部分空間である.

∵) (i) $f_0(x)=0$ なので $f_0'(x)=0$ $\therefore\ x f_0'(x) = x\cdot 0 = 0 = 2\cdot f_0(x)$

$\therefore\ f_0 \in \overline{W}$

(ii) $f, g \in \overline{W}$ とすると $x f'(x) = 2f(x)$, $x g'(x) = 2g(x)$

$$\therefore\ x(f+g)'(x) = x\{f(x)+g(x)\}' = x\{f'(x)+g'(x)\}$$
$$= xf'(x) + xg'(x) = 2f(x) + 2g(x)$$
$$= 2\{f(x)+g(x)\} = 2(f+g)(x)$$

$\therefore\ f+g \in \overline{W}$

(iii) $f \in \overline{W}$, $c \in \mathbb{R}$ とする. $xf'(x) = 2f(x)$

$$\therefore\ x\{(cf)'(x)\} = x\{cf(x)\}' = x\{cf'(x)\}$$
$$= c\cdot\{xf'(x)\} = c\cdot\{2f(x)\} = 2\{cf(x)\} = 2(cf)(x)$$

$\therefore\ cf \in \overline{W}$. ⋕ $\square$

4.2. 1次独立と1次従属

定義4.2.1.（1次結合，1次関係）

V：ベクトル空間，$u_1, u_2, \cdots, u_n \in V$，$v \in V$，$c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$ とする

(1) $c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n$ を ベクトル $u_1, \cdots, u_n$ の1次結合という．

(2) $v = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n$ のとき，ベクトル v は $u_1, \cdots, u_n$ の1次結合で書けるという．

(3) 等式 $c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n = 0$ のことを ベクトル $u_1, \cdots, u_n$ の1次関係という．

定義4.2.2.（1次独立，1次従属）V：ベクトル空間，$u_1, \cdots, u_n \in V$ とする

(1) $u_1, \cdots, u_n$ が 1次独立

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n = 0$ ならば $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ となる．

(2) $u_1, \cdots, u_n$ が 1次従属

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $u_1, \cdots, u_n$ は 1次独立でない．

例1（基本ベクトル）$V = \mathbb{R}^n$ とする．

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

← $\mathbb{R}^n$ の基本ベクトル

とおくと $e_1, \cdots, e_n$ は 1次独立．

(証明) $c_1 e_1 + c_2 e_2 + \cdots + c_n e_n = 0$ とすると

$$c_1 e_1 + \cdots + c_n e_n = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = 0 \quad \therefore c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

よって $e_1, \cdots, e_n$ は 1次独立 □

例2 ($\mathbb{R}[x]_n$ の 1次独立なベクトル) $V = \mathbb{R}[x]_n$．次の $n+1$ 個のベクトル

$f_1 = 1, f_2 = x, \cdots, f_{n+1} = x^n$ は 1次独立である．

(証明) $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_{n+1} f_{n+1} = f_0$ ($\mathbb{R}[x]_n$ の零ベクトル) とおくと．

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot x + \cdots + c_{n+1} \cdot x^n = 0$$

上式に $x = 0$ を代入： $c_1 = 0$

$$\therefore c_2 \cdot x + c_3 \cdot x^2 + \cdots + c_{n+1} \cdot x^n = 0$$

上式を x で微分： $c_2 + 2 c_3 \cdot x + \cdots + n \cdot c_{n+1} \cdot x^{n-1} = 0$

上式に $x = 0$ を代入： $c_2 = 0$

以下上を繰り返すと $c_3 = c_4 = \cdots = c_{n+1} = 0$． よって $f_1, \cdots, f_{n+1}$ は 1次独立 □

例題2.4.1　$\mathbb{R}^4$の次のベクトルは1次独立か1次従属か調べよ.

$$\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}2\\1\\-3\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{a}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{a}_3=\begin{bmatrix}3\\1\\2\\2\end{bmatrix}.$$

(解)　$c_1\mathbf{a}_1+c_2\mathbf{a}_2+c_3\mathbf{a}_3=\mathbf{0}$ とおくと.

$$A=\begin{bmatrix}2&1&3\\1&0&1\\-3&1&2\\1&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

上の連立方程式が

$$\begin{cases}\text{自明な解}\ (c_1=c_2=c_3=0)\ \text{しかもたない} \iff \mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\ \text{は1次独立}\\ \text{自明でない解をもつ} \iff \mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\ \text{は1次従属}\end{cases}$$

$$\begin{array}{rrrl}
2&1&3&\\
1&0&1&\\
-3&1&2&\\
1&0&2&\\ \hline
1&0&1&②\\
2&1&3&①\\
-3&1&2&\\
1&0&2&\\ \hline
1&0&1&\\
0&1&1&②-2\times①\\
0&1&5&③+3\times①\\
0&0&1&④-①\\ \hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrl}
1&0&1&\\
0&1&1&\\
0&0&4&③-②\\
0&0&1&\\ \hline
1&0&1&\\
0&1&1&\\
0&0&1&④\\
0&0&4&③\\ \hline
1&0&0&①-③\\
0&1&0&②-③\\
0&0&1&\\
0&0&0&④-4\times①\\ \hline
\end{array}$$

$\mathrm{rank}(A)=3=$ 未知数の個数

∴ 自明な解しかもたない.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore c_1 = c_2 = c_3 = 0$ $\therefore$ a_1, a_2, a_3 は1次独立 □

定理4.2.1 (1次従属であるための条件) V: ベクトル空間, $u_1, u_2, \cdots, u_n \in V$ とする。このとき

$u_1, u_2, \cdots, u_n$ が1次従属 $\Longleftrightarrow$ $u_1, \cdots, u_n$ の中の少なくとも1つが他の $n-1$ 個の
ベクトルの1次結合で書ける。

(証明) ($\Longrightarrow$) 仮定より、少なくとも1つは0でない定数 $c_1, \cdots, c_n$ が存在して

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n = 0$$

とできる。例えば $c_1 \neq 0$ とすると、

$$u_1 = -\frac{c_2}{c_1} u_2 - \cdots - \frac{c_n}{c_1} u_n$$

よって、u_1 が他の $n-1$ 個のベクトルの1次結合でかける。

($\Longleftarrow$) 例えば、u_1 が他の $n-1$ 個のベクトルの1次結合として

$$u_1 = c_2 u_2 + c_3 u_3 + \cdots + c_n u_n$$

と書けたとすると、

$$(-1) u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n = 0$$

$c_1=-1$ とおくと, $c_1 \neq 0$ であるが $c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n = 0$ となる.

よって. $u_1, u_2, \cdots, u_n$ は 1次従属である □

定理4.22 V: ベクトル空間, $u, u_1, u_2, \cdots, u_n \in V$ とする.

$u_1, \cdots, u_n$ が 1次独立で, $u, u_1, \cdots, u_n$ が 1次従属ならば u は $u_1, \cdots,$ u_n の 1次結合で書ける.

(証明) $u, u_1, \cdots, u_n$ が 1次従属なので, 少なくとも 1つは 0 でない $n+1$ 個の実数 $c, c_1, \cdots, c_n$ が存在して,

$$c u + c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n = 0$$

とできる. 今, $c=0$ とすると 上式より

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n = 0.$$

仮定より, $u_1, \cdots, u_n$ は 1次独立なので 上式より $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ となる.

これは. $c, c_1, \cdots, c_n$ の中に少なくとも 1つは 0 でない実数があることに反する.

よって $c \neq 0$. ゆえに.

$$u = -\frac{c_1}{c} u_1 - \cdots - \frac{c_n}{c} u_n$$

と書ける. □

（1次結合の記法）

記法4.2.3 $u_1, \cdots, u_m \in V$，$A = [a_{ij}]$：$m \times n$ 行列.

$$(u_1, \cdots, u_m)A = (u_1, \cdots, u_m)\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$:= (a_{11}u_1 + \cdots + a_{m1}u_m, \cdots, a_{1n}u_1 + \cdots + a_{mn}u_m)$$

例3（1次結合の記法の例）

$$(u_1, u_2)\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} = (3u_1 + u_2,\ 2u_1 - u_2,\ u_1 + 4u_2)$$

定理4.2.3 V：ベクトル空間，$u_1, \cdots, u_m$，$v_1, \cdots, v_n \in V$とする.

(1) $v_1, \cdots v_n$の各ベクトルは$u_1, \cdots, u_m$の1次結合で書ける

(2) $n > m$

ならば，$v_1, \cdots, v_n$は1次従属．すなわち，より個数の少ない1組のベクトルの1次結合として書けるベクトルの組は必ず1次従属となる.

（証明）．仮定(1)より，

$$\begin{cases} v_1 = c_{11}u_1 + c_{21}u_2 + \cdots + c_{m1}u_m \\ v_2 = c_{12}u_1 + c_{22}u_2 + \cdots + c_{m2}u_m \\ \vdots \\ v_n = c_{1n}u_1 + c_{2n}u_2 + \cdots + c_{mn}u_m \end{cases}$$

と表される．今，$A = [c_{ij}]$とおくと，記法4.2.3より．

$$(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m) A$$

と表される．

ここで同次形連立1次方程式の理論（定理2.3.3）より，仮定(2)より，

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は，自明でない解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \neq \boldsymbol{0}$ をもつ．

このとき，$c_1, \cdots, c_n$ の中には少なくとも1つは0でないものがあるが，

$$\begin{aligned} c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n &= (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n)(c_1, c_2, \cdots, c_n) \\ &= (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n)\boldsymbol{c} \\ &= (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m) A\boldsymbol{c} \\ &= (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m)\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

ゆえに，$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は1次従属である □

例4（定理4.2.3の活用）$\mathbb{R}^2$ のベクトル $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ は1次従属

（解）$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ とおくと，$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$，$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 4\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2$，

$\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = 5\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$．すなわち，3個のベクトルの各々が2個のベクトルの1次結合で

書けているので，1次従属となる □

定理4.2.4 (1次結合の記法の性質I) V：ベクトル空間, $u_1, \cdots, u_m \in V$ は1次独立, A：$m \times n$ 行列とする. このとき

$$(u_1, \cdots, u_m)A = (0, 0, \cdots, 0) \text{ ならば } A = O$$

(証明) $A = [a_{ij}]$ とおくと

$$(u_1, \cdots, u_m)\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (0, 0, \cdots, 0).$$

上式の両辺の第1成分を比較すると.

$$a_{11}u_1 + \cdots + a_{m1}u_m = 0$$

仮定より. $u_1, \cdots, u_m$ は1次独立なので上式より. $a_{11} = \cdots = a_{m1} = 0$

第2, …, 第m成分についても同様に比較すれば $a_{ij} = 0$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$.

ゆえに $A = O$ □

定理4.2.5 (1次結合の記法の性質II) V：ベクトル空間, $u_1, \cdots, u_m \in V$ は1次独立とする. 2つの $m \times n$ 型行列 A, B に対して

$$(u_1, \cdots, u_m)A = (u_1, \cdots, u_m)B$$

ならば $A = B$.

(証明) 仮定より. $(u_1, \cdots, u_m)(A - B) = (0, \cdots, 0)$.

よって. 定理4.2.4より $A - B = O$ $\therefore A = B$ □

例題4.2.2.（1次結合の記法の性質の活用）

$v_1 = u_1 - u_2 + 3u_3$, $v_2 = 2u_1 - u_2 + 6u_3 + u_4$

$v_3 = 2u_1 - 2u_2 + u_3 - u_4$, $v_4 = u_1 - u_3 + 3u_4$

であるとする.

(1) (v_1, v_2, v_3, v_4)を1次結合の記法を用いて表せ.

(2) $u_1, \cdots, u_4$が1次独立のとき, $v_1, \cdots, v_4$が1次独立か1次従属か調べよ.

（解）(1) 与えられた関係式より.

$$(v_1, v_2, v_3, v_4) = (u_1, u_2, u_3, u_4)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(3) $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 = 0$とおくと.

$$0 = (v_1, v_2, v_3, v_4)\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

$$= (u_1, u_2, u_3, u_4)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

仮定より. u_1, u_2, u_3, u_4は1次独立なので. 定理4.2.4より.

$$(*)\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

である。よって、

$\Leftrightarrow \mathrm{rank}[\ \ ]=4$

$$\begin{cases} (*)\text{が自明な解}\ (c_1=c_2=c_3=c_4=0)\ \text{しかもたない} \Leftrightarrow v_1,\cdots,v_4\ \text{は1次独立} \\ (*)\text{が自明でない解をもつ} \Leftrightarrow v_1,\cdots,v_4\ \text{は1次従属} \end{cases}$$

$$\begin{array}{rrrrl} 1 & 2 & 2 & 1 & \\ -1 & -1 & -2 & 0 & \\ 3 & 6 & 1 & -1 & \\ 0 & 1 & -1 & 3 & \\ \hline 1 & 2 & 2 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & ②+① \\ 0 & 0 & -5 & -4 & ③-3\times① \\ 0 & 1 & -1 & 3 & \\ \hline 1 & 0 & 2 & -1 & ①-2\times② \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & -5 & -4 & \\ 0 & 0 & -1 & 2 & ④-② \\ \hline 1 & 0 & 2 & -1 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & -1 & 2 & ④ \\ 0 & 0 & -5 & -4 & ③ \\ \hline 1 & 0 & 2 & -1 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & -2 & ③\times(-1) \\ 0 & 0 & 5 & 4 & ④\times(-1) \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrl} \hline 1 & 0 & 0 & 3 & ①-2\times③ \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \\ 0 & 0 & 0 & 14 & ④-5\times③ \\ \hline 1 & 0 & 0 & 3 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ④\times\frac{1}{14} \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & ①-3\times④ \\ 0 & 1 & 0 & 0 & ②-④ \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ③+2\times④ \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline \end{array}$$

よって $c_1=c_2=c_3=c_4=0$

ゆえに $v_1,\cdots,v_4$ は1次独立. □

4.3 ベクトルの1次独立な最大個数

定義4.3.1 (1次独立な最大個数) X : ベクトルの集合とする.

r が X のベクトルの1次独立な最大個数

⟺ (1) X の中に r 個の1次独立なベクトルがある.

(2) X のどの $r+1$ 個のベクトルも1次従属である.

定理4.3.1 (1次独立な最大個数の性質) V : ベクトル空間, $u_1, \cdots, u_m \in V$, $v_1, \cdots, v_n \in V$ とする. $v_1, \cdots, v_n$ の各ベクトルが $u_1, \cdots, u_m$ の1次結合で書けるならば

$\{v_1, \cdots, v_n\}$ の1次独立な最大個数 $\leq$ $\{u_1, \cdots, u_m\}$ の1次独立な最大個数

(証明) $r = \{u_1, \cdots, u_m\}$ の1次独立な最大個数とし, 必要なら順序を変えて $u_1, \cdots, u_r$ が1次独立とする. 定理4.2.2より, $u_{r+1}, \cdots, u_m$ は $u_1, \cdots, u_r$ の1次結合で書ける. 仮定より, 各 $v_1, \cdots, v_n$ は $u_1, \cdots, u_m$ の1次結合で書けるので $v_1, \cdots, v_n$ は $u_1, \cdots, u_r$ の1次結合で書ける. よって, 定理4.2.3より, $v_1, \cdots, v_n$ の中の $r+1$ 個以上のベクトルは1次従属となる. ゆえに

$\{v_1, \cdots, v_n\}$ の中の1次独立な最大個数 $\leq r$ □

定理4.3.2. (1次独立な最大個数の判定条件)

$r = \{u_1, \cdots, u_m\}$ の1次独立な最大個数

(1) $u_1, \cdots, u_m$ の中に r 個の1次独立なベクトルがあり,

$\Leftrightarrow$

(2) 他の $m-r$ 個のベクトルはこの r 個のベクトルの1次結合で書ける.

(証明) ($\Rightarrow$) r 個の1次独立なベクトルを例えば $u_1, \cdots, u_r$ とする. このとき, $r+1$ 個のベクトル $u_1, \cdots, u_r, u_{r+1}$ は1次従属なので 定理4.2.2より, u_{r+1} は $u_1, \cdots, u_r$ の1次結合で書ける. $u_{r+2}, \cdots, u_m$ も同様に $u_1, \cdots, u_r$ の1次結合で書ける.

($\Leftarrow$) 例えば $u_1, \cdots, u_r$ が1次独立で, $u_{r+1}, \cdots, u_m$ は $u_1, \cdots, u_r$ の1次結合で書けるとすると

$$r \leq \{u_1, \cdots, u_m\} \text{の1次独立な最大個数}.$$

一方, $u_1, \cdots, u_m$ は $u_1, \cdots, u_r$ の1次結合で書けるから, 定理4.3.1より,

$$\{u_1, \cdots, u_m\} \text{の1次独立な最大個数} \leq \{\underbrace{u_1, \cdots, u_r}_{\text{これは1次独立}}\} \text{の1次独立な最大個数} = r$$

以上より, $\{u_1, \cdots, u_m\}$ の1次独立な最大個数 $= r$ □

補題4.3.2 (元の行列と簡約化された行列の列ベクトルの1次関係)

行列 A の列ベクトル $a_1, a_2, \cdots, a_n$ と A を簡約化した行列 B の列ベクトル $b_1, b_2, \cdots, b_n$ は同じ1次関係をもつ. すなわち

$$c_1\mathbf{a}_1+c_2\mathbf{a}_2+\cdots+c_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0} \Leftrightarrow c_1\mathbf{b}_1+c_2\mathbf{b}_2+\cdots+c_n\mathbf{b}_n=\mathbf{0}$$

(証明) $A=[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n]$, $B=[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_n]$ である. 簡約化は行基本変形だけを用いて行われるので, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ に対して $A\mathbf{x}=\mathbf{0} \Leftrightarrow B\mathbf{x}=\mathbf{0}$. すなわち, 2つの連立1次方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ と $B\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の解は同じである. よって $\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^n$ に対して

$$\underbrace{x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+\cdots+x_n\mathbf{a}_n}_{=A\mathbf{x}}=\mathbf{0} \Leftrightarrow \underbrace{x_1\mathbf{b}_1+x_2\mathbf{b}_2+\cdots+x_n\mathbf{b}_n}_{=B\mathbf{x}}=\mathbf{0}$$

□

補題4.3.3 (簡約な行列の列ベクトルの性質) 簡約な行列の主成分を含む列ベクトルの全体は1次独立で, 残りのベクトルはそれらの1次結合で書ける.

(証明) 簡約な行列に対して, 必要なら列の交換を行い, 主成分を含む列を前に移動すれば必ず

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & 1 & & \vdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \\ \hline & O & & & O \end{array}\right]$$

となる. よって主成分を含む列ベクトルの全体は1次独立で, 残りはそれらの1次結合で書ける.

例題4.3.1（1次独立な最大個数の求め方）次の列ベクトル（の中から選べる）1次独立な最大個数 r と r 個の1次独立なベクトルを1組求め、他のベクトルをこれらの1次結合で表せ。

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix},\ a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},\ a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix},\ a_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ a_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

（解）解法の手順

① $A = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5] \xrightarrow[\text{簡約化}]{\text{(被約)階段行列}} B = [b_1, b_2, b_3, b_4, b_5]$.

② B の主成分を含む列ベクトルの全体を1次独立なベクトルとに選び、残りをそれらの1次結合で書く（← 補足4.3.3）

③ 1次独立な最大個数 ＝ B の主成分を含む列ベクトルの個数

1次独立なベクトル ＝ B で選んだ1次独立なベクトルと同じ列番号の A の列ベクトル全体

1次結合での表現 ＝ B での表現で b を a に変えたもの

（定理4.3.2、補足4.3.2、補足4.3.3）

実行例.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	1	1	−2	−1
1	2	3	−4	−4
3	0	−3	1	7
0	−1	−2	−1	0

$$
\begin{array}{rrrrrl}
1 & 1 & 1 & -2 & -1 & \\
0 & 1 & 2 & -2 & -3 & ②-① \\
0 & -3 & -6 & 7 & 10 & ③-3\times① \\
0 & -1 & -2 & -1 & 0 & \\
\hline
1 & 0 & -1 & 0 & 2 & ①-② \\
0 & 1 & 2 & -2 & -3 & \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & ③+3\times② \\
0 & 0 & 0 & -3 & -3 & ④+② \\
\hline
1 & 0 & -1 & 0 & 2 & \\
0 & 1 & 2 & 0 & -1 & ②+2\times③ \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ④+3\times③ \\
\hline
\mathbb{b}_1 & \mathbb{b}_2 & \mathbb{b}_3 & \mathbb{b}_4 & \mathbb{b}_5 &
\end{array}
$$

以上より, $\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \mathbb{b}_4$ が1次独立で $\mathbb{b}_3 = -\mathbb{b}_1 + 2\mathbb{b}_2$, $\mathbb{b}_5 = 2\mathbb{b}_1 - \mathbb{b}_2 + \mathbb{b}_4$

よって,

$$
\left.\begin{array}{l}
\mathbb{a}_1, \cdots, \mathbb{a}_5 \text{ の1次独立な最大個数 } r = 3 \\
\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \mathbb{a}_4 \text{ が1次独立} \\
\mathbb{a}_3 = -\mathbb{a}_1 + 2\mathbb{a}_2, \ \mathbb{a}_5 = 2\mathbb{a}_1 - \mathbb{a}_2 + \mathbb{a}_4
\end{array}\right\} \text{(答)}
$$

□

定理4.3.3 (1次独立な最大個数と階数)

$\mathrm{rank}(A)$ = Aの列ベクトルの1次独立な最大個数

= Aの行ベクトルの1次独立な最大個数

(証明) 1番目の等号:

$$A = [\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \cdots, \mathbb{a}_n] \xrightarrow{\text{簡約化}} B = [\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \cdots, \mathbb{b}_n]$$

とする. 階数の定義より,

$$\mathrm{rank}(A) = B\text{の主成分を含む列ベクトルの個数}$$

$$= a_1, \cdots, a_n\text{の1次独立な最大個数}$$

例題4.3.1の解での説明

<u>2番目の等号:</u> Aの簡約化をBとし,

$r = A$の行ベクトルの1次独立な最大個数, $s = B$の行ベクトルの1次独立な最大個数とする. 行基本形で変形された行列の各行ベクトルは, 元の行列の行ベクトルの1次結合で書けるので, Bの行ベクトルはAの行ベクトルの1次結合で書ける. よって, 定理4.3.1より, $s \leq r$.

逆にAはBからも行基本変形を繰り返して得られるので, 上と同じ理由で$r \leq s$.

ゆえに, $r = s$. 簡約な行列Bの零ベクトルでない行ベクトル全体は1次独立なので, $r = s = B$の零ベクトルでない行ベクトルの個数$= \mathrm{rank}(A)$

階数の定義

∵)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & & & \end{bmatrix} \quad \text{上4行: 1次独立}$$

□

定理4.3.4（正則であるための条件）n次正方行列Aに対して次の3条件は同値：

(1) Aは正則、すなわち逆行列が存在

(2) Aのn個の列ベクトルは1次独立

(3) Aのn個の行ベクトルは1次独立

（証明）(1)⇒(2)：定理2.4.2より $\mathrm{rank}(A)=n$。定理4.3.3より、Aの列ベクトルの1次独立な最大個数がn。よってAのn個の列ベクトルは1次独立。

(2)⇒(1)：定理4.3.3より $\mathrm{rank}(A)=n$。よって定理2.4.2より、Aは正則。

(1)⇔(3)も同様に示せる □

定理4.3.5.（簡約化の一意性）行列の簡約化はただ1通りに定まる。

（証明）
$$A=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n] \xrightarrow{\text{簡約化}} B=[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n]$$

とする。このとき、$\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_n$がただ1通りに定まることを示す。

(i) $\mathbf{a}_1=\mathbf{0}$ なら $\mathbf{b}_1=\mathbf{0}$；$\mathbf{a}_1\neq\mathbf{0}$ ならば $\mathbf{b}_1=\mathbf{e}_1$となる。

(ii) $\mathbf{b}_k\ (2\le k\le n)$については、

(ii-1) $\mathbf{a}_k$が$\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_{k-1}$の1次結合で書けなければ、$\mathbf{b}_k$は主成分を含む基本ベクトル。

(ii-2) $\mathbf{a}_k$が$\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_{k-1}$の1次結合で書けるときは、$\mathbf{b}_k$の成分は、$\mathbf{a}_k$を$\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_{k-1}$から順に取った1次独立なベクトルの1次結合で書き

表した係数があらわれる．ベクトルを1次独立なベクトルの1次結合で書き表す方法はただ1通りしかないので，b_kはただ1つ決まる．

以上より，Aの簡約化Bはただ1つ定まる．(例題4.3.1のA→Bを見ながらこの証明を見ると理解しやすい) □

定理4.3.6.（一般のベクトルの1次関係を数ベクトルの1次関係に帰着させる方法）V：ベクトル空間，$u_1, u_2, \cdots, u_m \in V$は1次独立とする．

ベクトル$v_1, \cdots, v_n$が$m \times n$行列Aを用いて

$$(v_1, v_2, \cdots, v_n) = (u_1, u_2, \cdots, u_m)A$$

と表されているとする．

(1) $v_1, v_2, \cdots, v_n$とAの列ベクトル$a_1, a_2, \cdots, a_n$には同じ1次関係が成り立つ．

(2) $m=n$のとき．

$v_1, v_2, \cdots, v_n$が1次独立 $\Longleftrightarrow$ Aが正則

(証明) (1) $v_1, \cdots, v_n$が1次関係 $c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = 0$を満たすとする．$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$とおくと，

$$0 = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = (v_1, v_2, \cdots, v_n)c$$

$= (u_1, u_2, \cdots, u_m) A c.$

ここで. $u_1, \cdots, u_m$ は1次独立なので定理4.2.4より $Ac = 0$.

$\therefore \underbrace{[a_1, a_2, \cdots, a_n]}_{= A} c = 0 \quad \therefore c_1 a_1 + c_2 a_2 + \cdots + c_n a_n = 0.$

逆は. 上の証明を逆にたどればよい.

(2) (1)と定理4.3.4よりわかる □

例題4.3.2. (一般のベクトルの1次独立な最大個数の求め方) 次の $R[x]_3$ のベクトルの1次独立な最大個数 r と, r 個の1次独立なベクトルを一組求め, 他のベクトルをこれらの1次結合で表せ.

$f_1(x) = 1 + x + 3x^2, \quad f_2(x) = 1 + 2x - x^3,$

$f_3(x) = 1 + 3x - 3x^2 - 2x^3, \quad f_4(x) = -2 - 4x + x^2 - x^3,$

$f_5(x) = -1 - 4x + 7x^2$

(解) $f_1, \cdots, f_5$ を $R[x]_3$ の1次独立なベクトル $\{1, x, x^2, x^3\}$ の1次結合で表すと

$$(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) = (1, x, x^2, x^3) \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & -4 \\ 3 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}}^{A}$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5$$

$\{1, x, x^2, x^3\}$ は1次独立なので. 定理4.3.6より. $f_1, \cdots, f_5$ の1次関係と.

$a_1, \cdots, a_5$ の1次関係は同じ．よって，$f_1, \cdots, f_5$ の1次関係を調べるには

$a_1, \cdots, a_5$ の1次関係を調べればよい．例題4.3.1の結果より，

a_1, a_2, a_4 は1次独立で

$a_3 = -a_1 + 2a_2$,

$a_5 = 2a_1 - a_2 + a_4$.

ゆえに，

$$\left.\begin{array}{l} f_1, f_2, f_4 \text{ は1次独立で} \\ f_3 = -f_1 + 2f_2, \\ f_5 = 2f_1 - f_2 + f_4. \\ \text{よって，1次独立な最大個数} = 3 \end{array}\right\} \text{(答)}$$

□

4.4. ベクトル空間の基と次元

定義4.4.1（Vを生成する）V：ベクトル空間，$u_1, u_2, \cdots, u_n \in V$とする．

$u_1, u_2, \cdots, u_n$はVを<u>生成する</u>．$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ Vの任意のベクトルは$u_1, u_2, \cdots, u_n$の1次結合で表される．

例1（$\mathbb{R}^n$を生成するベクトル）$\mathbb{R}^n$の基本ベクトル $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

は$\mathbb{R}^n$を生成する．

（証明）$\mathbb{R}^n$の任意のベクトル $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ は $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n$ と表される $\square$

定義4.4.2（ベクトル空間の基）V：ベクトル空間，$u_1, \cdots, u_n \in V$とする．

$\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$が$V$の<u>基</u>（または<u>基底</u>）

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ ① $u_1, u_2, \cdots, u_n$は1次独立である．

② $u_1, u_2, \cdots, u_n$はVを生成する．

この基を$\mathbb{R}^n$の<u>標準基</u>という．

例2（$\mathbb{R}^n$の基）$\mathbb{R}^n$の基本ベクトルの組$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$は$\mathbb{R}^n$の基である．

（証明）§4.2の例1より，$e_1, \cdots, e_n$は1次独立で，この§の例1より，$\mathbb{R}^n$を

独立しているから □

補足 4.4.3 (基の多様性) ベクトル空間の基は一般には1つではなく沢山存在する。しかし、各基を構成するベクトルの個数は一定である(定理4.4.1を見よ)

(説明) $\mathbb{R}^2$ において、$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ は基である。

その他にも $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ も基である

∵) $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ は平行でないので1次独立.

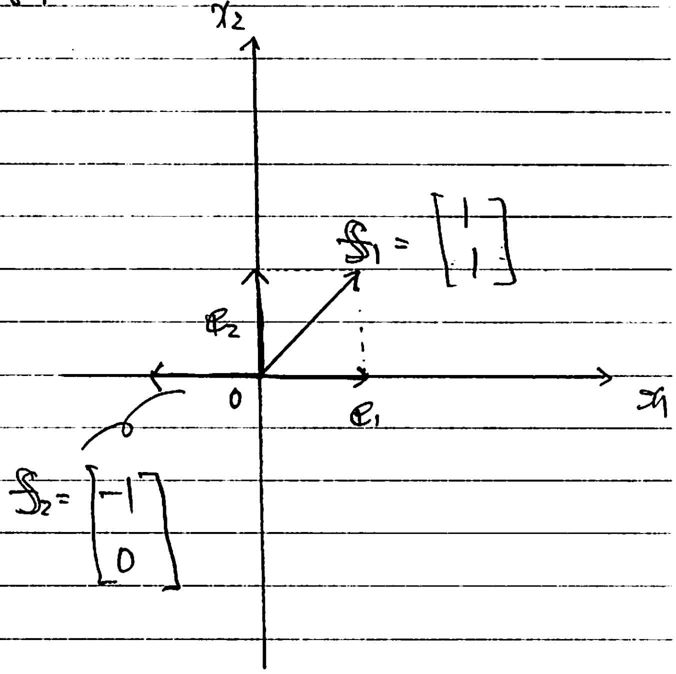
さらに、任意の $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ は、

$$\mathbf{a} = a_2 \mathbf{f}_1 + (a_2 - a_1)\mathbf{f}_2$$

と表されるので、$\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ は $\mathbb{R}^2$ を生成.

よって、$\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ は $\mathbb{R}^2$ の基.

その他にも多数存在する! □



定理4.4.1 (基の個数の一意性) ベクトル空間 V の基に含まれるベクトルの個数は、基の取り方によらず一定である.

(証明) $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ と $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ は共に V の基とする。$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ は V の要素なので各々は $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ の1次結合で書ける。$n > m$ とすると定理4.2.3より $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ は1次従属となるので $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ が V の基であることに反する。よって、$n \leq m$.

また，$u_1, \cdots, u_m$ と $v_1, \cdots, v_n$ を取り替えると全く同様の議論で $m \leq n$ となる．

よって $m=n$．すなわち，基に含まれるベクトルの個数は一定である □

定義4.4.4（零空間，有限次元）

(1) 零ベクトルだけからなるベクトル空間 $V=\{0\}$ を零空間という．

(2) 零空間及び有限個のベクトルからなる基をもつベクトル空間を有限次元ベクトル空間という．

定義4.4.5（次元） V：有限次元ベクトル空間

$$\dim V := \begin{cases} 0 & \text{if } V \text{ が零空間} \\ V \text{ の1組の基を構成するベクトルの個数} & \text{if } V \text{ が零空間でない有限次元空間} \end{cases}$$

↑

V の次元

定理4.4.1より，V の次元は基の取り方によらない！

例13（$\mathbb{R}^n$ の次元） $\dim(\mathbb{R}^n)=n$

∵) $\{e_1, \cdots, e_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の基だから．□

例14（$\mathbb{R}[x]_n$ の次元） $\dim(\mathbb{R}[x]_n)=n+1$．

∵) $\{1, x, \cdots, x^n\}$ は $\mathbb{R}[x]_n$ の基だから □

"基"を導入する意義：一般のベクトル空間の中に"座標"を導入して $\mathbb{R}^n$ と同様な取り扱いができるようにしたい

$\Downarrow$

行列の理論や計算が活用できる.

定理4.4.2.（次元と1次独立な最大個数）V：零空間でないベクトル空間

V が有限次元 $\Leftrightarrow$ V のベクトルの1次独立な最大個数が有限.

このとき

$\dim(V) = V$ のベクトルの1次独立な最大個数

（証明）（$\Rightarrow$）$\dim(V)=n$ とすると. V には n 個のベクトルからなる基が存在する. 基は V を生成しているので. V の任意の $n+1$ 個のベクトルはこれらの n 個のベクトルの1次結合で書けるので. 定理4.2.3より. 1次従属となる.

ゆえに. V のベクトルの1次独立な最大個数は n である.

（$\Leftarrow$）V の1次独立な最大個数が n で, $u_1, \cdots, u_n$ は1次独立とする. このとき. V の任意のベクトル u に対して $n+1$ 個のベクトル $u, u_1, \cdots, u_n$ は1次従属となるので. 定理4.2.2により. u は $u_1, \cdots, u_n$ の1次結合で書ける. ゆえに $\{u_1, \cdots, u_n\}$ は V の基となり. $\dim(V)=n$ である □

例題4.4.1（次元と基の求め方）次の解空間の次元と1組の基を求めよ.

$$W=\left\{x\in\mathbb{R}^5:\ \begin{array}{l}x_1-2x_2+x_3+2x_4+3x_5=0\\ 2x_1-4x_2+3x_3+3x_4+8x_5=0\end{array}\right\}$$

（解）① 連立方程式を解く

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	−2	1	2	3	
2	−4	3	3	8	
1	−2	1	2	3	
0	0	1	−1	2	②−2×①
1	−2	0	3	1	①−②
0	0	1	−1	2	

$$\therefore\ \left\{\begin{array}{l}x_1-2x_2+3x_4+x_5=0\\ x_3-x_4+2x_5=0\end{array}\right.$$

$x_2=c_1,\ x_4=c_2,\ x_5=c_3$ と置くと. $\left\{\begin{array}{l}x_1=2c_1-3c_2-c_3\\ x_3=c_2-2c_3\end{array}\right.$

$$\therefore\ x=\begin{bmatrix}2c_1-3c_2-c_3\\ c_1\\ c_2-2c_3\\ c_2\\ c_3\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-3\\0\\1\\1\\0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}-1\\0\\-2\\0\\1\end{bmatrix}\quad(*)$$

② ここで $a_1=\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$, $a_2=\begin{bmatrix}-3\\0\\1\\1\\0\end{bmatrix}$, $a_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\-2\\0\\1\end{bmatrix}$ とおくと. $(*)$より. a_1,a_2,a_3 は W

を生成する. また a_1,a_2,a_3 は明らかに1次独立である.

③ 以上より $\{a_1,a_2,a_3\}$ は W の1組の基で $\dim(W)=3$ …(答)

cut

定義4.4.6.(基本解) 同次形の連立1次方程式の解空間の1組の基を、その連立1次方程式の基本解という.

例15(基本解の例) 例題4.4.1のベクトル a_1, a_2, a_3 は連立1次方程式

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 8x_5 = 0 \end{cases}$$

の基本解である.

定理4.4.3(解空間の次元) A: $m\times n$ 行列. 同次形の連立1次方程式 $Ax = 0$ の解空間を $W = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$ とする. このとき

$$\dim(W) = n - \mathrm{rank}(A).$$

(証明) A の簡約化を B とすると. 例題4.4.1でみたように. 解空間 W の基は $n-$(Bの行の主成分を含む列の個数)だけのベクトルからなる. よって

$$\dim(W) = n - (\text{Bの行の主成分を含む列の個数})$$
$$= n - \mathrm{rank}(A) \quad \because) \text{ 階数の定義 p.26} \qquad \square$$

cut

定義4.4.7(ベクトルの集合で生成される部分空間) V: ベクトル空間. $u_1, u_2, \cdots, u_t \in V$ とする.

$$\langle u_1, u_2, \cdots, u_t \rangle := \{c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_tu_t : c_i \in \mathbb{R}\}$$

は V の部分空間である. これを $u_1, u_2, \cdots, u_t$ によって生成される V の部分空間

という。

定理4.4.4.（生成される部分空間の次元）

$$\dim(\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_t \rangle) = \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_t \text{ の1次独立な最大個数}$$

（証明）$W = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_t \rangle$ とおく。右辺を r とおく。$\dim(W) = r$ を示せばよい。定理4.3.2より、$\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_t$ の中に r 個の1次独立なベクトルがあり、他の $t-r$ 個のベクトルは、この r 個のベクトルの1次結合で書ける。そこでこの1次独立な r 個のベクトルを $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_r$ とする。このとき W の任意のベクトルは $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_r$ の1次結合で表せるので、$\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_r$ は W を生成する。よって $\dim(W) = r$ □

例16（生成される部分空間の次元の求め方）$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

のとき、部分空間 $W = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$ の次元は2である。

（解）定理4.4.4より、$\dim(W) = \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ の1次独立な最大個数

$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	
1	2	−1	
1	2	−1	
0	1	2	
1	2	−1	
0	0	0	②−①
0	1	2	

1	2	−1	
0	1	2	③
0	0	0	②
1	0	−5	①−2×②
0	1	2	
0	0	0	
$\mathbf{b}_1$	$\mathbf{b}_2$	$\mathbf{b}_3$	

$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ が1次独立で

$\mathbf{b}_3 = -5\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2$

∴ $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ が1次独立で

$\mathbf{a}_3 = -5\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2$

Bの主成分を含むこの2つのベクトルを1次独立なベクトルとして選ぶ

よって. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ の1次独立な最大個数は2. $\therefore \dim(W) = 2$ □

定理4.4.5 (基であるための判定条件) V: ベクトル空間で $\dim(V) = n$.
$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n \in V$ とする. このとき 次の3条件は同値:

(1) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$ は V の基.

(2) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$ は1次独立

(3) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$ は V を生成する.

(証明) (1)⇒(2), (1)⇒(3)は明らか. よって. (2)⇔(3)を示せばよい.

(2)⇒(3): $\mathbf{u}$ を V の任意のベクトルとする. 定理4.4.2より.

$$n = \dim(V) = V \text{のベクトルの1次独立な最大個数}$$

なので, $n+1$ 個のベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$ は1次従属. ここで $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$ は1次独立なので 定理4.2.2より $\mathbf{u}$ は $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$ の1次結合で書ける. よって. $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$ は V を生成する.

(3)⇒(2): $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$ は V を生成するので $V = \langle \mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n \rangle$. よって. 定理4.4.4より

$$n = \dim(V) = \dim(\langle \mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n \rangle)$$
$$= \mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n \text{の1次独立な最大個数}$$

よって $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$ は1次独立 □

例17 (1組の基の求め方I) $\mathbb{R}^3$ の1組の基を求めよ.

(解) $\dim(\mathbb{R}^3)=3$ で. $a_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $a_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$, $a_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ は1次独立なので

$\mathbb{R}^3$ の1組の基である.

例18 (1組の基の求め方II) $\mathbb{R}[x]_2$ の1組の基を求めよ.

(解) $\dim(\mathbb{R}[x]_2)=3$ で. 3個のベクトル $f_1=x+x^2$, $f_2=1-x^2$, $f_3=x$ を

考えると. 任意の $f=a+bx+cx^2$ (2次以下の多項式) $\in \mathbb{R}[x]_2$ は.

$$f=a+bx+cx^2=(a+c)(x+x^2)+a(1-x^2)+(-a+b-c)x.$$

$$=(a+c)f_1+af_2+(-a+b-c)f_3$$

と表される. よって. f_1, f_2, f_3 は $\mathbb{R}[x]_2$ を生成する. よって. $\{x+x^2, 1-x^2, x\}$ は

$\mathbb{R}[x]_2$ の1組の基である □

NO. 50

第5章 線形写像

5.1 線形写像

定義5.1.1（線形写像）U, V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間，$T: U \to V$ は写像とする

T が（$\mathbb{R}$ 上の）線形写像（あるいは1次写像）

$\Leftrightarrow$ (1) $T(u+v) = T(u) + T(v)$ $(u, v \in U)$

(2) $T(cu) = cT(u)$ $(u \in U, c \in \mathbb{R})$

補足5.1.2（線形写像は零ベクトルを零ベクトルに移す）

線形写像 $T: U \to V$ は U の零ベクトルを V の零ベクトルに移す

（証明）0_U：U の零ベクトル，0_V：V の零ベクトルとすると

$$T(0_U) = T(0 \cdot 0_U) \underset{(2)}{=} 0\,T(0_U) = 0_V \quad \square$$

定義5.1.3（零写像）

$$O(u) := 0_V \quad (u \in U)$$

で定義される線形写像 $O: U \to V$ を零写像という．

例1.1（行列で定まる線形写像）A：$m \times n$ 行列，写像 $T_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を

$$T_A(x) := Ax \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

で定義すると，T_A は線形写像である．

(証明) $x, y \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$とすると.

$$T_A(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = T_A(x) + T_A(y)$$

$$T_A(cx) = A(cx) = c(Ax) = cT_A(x).$$

よって. T_Aは線形写像 □

定義5.1.4. (線形写像の像と核) $T: U \to V$は線形写像とする.

$$\mathrm{Im}(T) := \{T(u) : u \in U\} \quad T\text{の像}$$

$$\mathrm{Ker}(T) := \{u \in U : T(u) = 0_V\} \quad T\text{の核}$$

定理5.1.1 (線形写像の像と核は部分空間) $T: U \to V$は線形写像とする.

(1) Tの像$\mathrm{Im}(T)$はVの部分空間である.

(2) Tの核$\mathrm{Ker}(T)$はUの部分空間である.

(証明) (1) $v_1, v_2, v \in \mathrm{Im}(T)$, $c \in \mathbb{R}$とすると. $v_1 = T(u_1)$, $v_2 = T(u_2)$, $v = T(u)$ $(u_1, u_2, u \in U)$と書ける. ここで $u_1 + u_2$, $cu \in U$なので

$$v_1 + v_2 = T(u_1) + T(u_2) \underset{(1)}{=} T(u_1 + u_2) \in \mathrm{Im}(T)$$

$$cv = c(T(u)) \underset{(2)}{=} T(cu) \in \mathrm{Im}(T)$$

ゆえに. $\mathrm{Im}(T)$はVの部分空間.

(2) $u_1, u_2, u \in \mathrm{Ker}(T)$, $c \in \mathbb{R}$とすると. $T(u_1) = T(u_2) = T(u) = 0_V$.

ここで $u_1+u_2,\ cu \in V$ であり

$$T(u_1+u_2) \underset{(1)}{=} T(u_1)+T(u_2) = 0_W + 0_W = 0_W$$

$$T(cu) \underset{(2)}{=} cT(u) = c\,0_W = 0_W$$

なので $u_1+u_2,\ cu \in \mathrm{Ker}(T)$. ゆえに $\mathrm{Ker}(T)$ は部分空間. □

<u>定義5.1.5</u> (線形写像の階数と退化次数) $T: V \to W$ は線形写像とする

$$\mathrm{rank}(T) := \dim(\mathrm{Im}(T)) \quad T\text{の}\underline{\text{階数}}$$

$$\mathrm{null}(T) := \dim(\mathrm{Ker}(T)) \quad T\text{の}\underline{\text{退化次数}}$$

<u>例12</u> (行列で定まる線形写像の階数と退化次数) $A: m\times n$ 行列,

$T_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を行列 A で定まる線形写像とすると,

$$\mathrm{null}(T_A) + \mathrm{rank}(T_A) = n.$$

(証明) $T_A(x) = Ax \ (x \in \mathbb{R}^n)$ なので

$$\mathrm{Ker}(T_A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}.$$

よって $\mathrm{Ker}(T_A)$ は斉次1次方程式 $Ax=0$ の解空間である. よって定理4.4.3より

$$\mathrm{null}(T_A) = \dim(\mathrm{Ker}(T_A)) = n - \mathrm{rank}(A).$$

次に, $A = [a_1, a_2, \cdots, a_n]$ と列ベクトルで表すと,

$$\mathrm{Im}(T_A) = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\} \underset{\uparrow}{=} \{x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n : x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

($x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ と書けるので)

$= \langle a_1, a_2, \cdots, a_n \rangle$

ここで、$\mathrm{rank}(A) = A$ の列ベクトル $a_1, \cdots, a_n$ の1次独立な最大個数

定理4.3.3

$= \dim(\langle a_1, a_2, \cdots, a_n \rangle) = \dim(\mathrm{Im}(T_A)) = \mathrm{rank}(T_A)$.

定理4.4.4

よって、$\mathrm{null}(T_A) + \mathrm{rank}(T_A) = n$ となる □

定理5.1.2.（一般の線形写像の階数と退化次数）$T : V \to V'$ を線形写像とすると、$\mathrm{null}(T) + \mathrm{rank}(T) = \dim(V)$.

（証明）$r = \mathrm{null}(T)$, $s = \mathrm{rank}(T)$ とおく。$\{u_1, \cdots, u_r\}$ を $\mathrm{Ker}(T)$ の1組の基、$\{v_1, \cdots, v_s\}$ を $\mathrm{Im}(T)$ の1組の基とする。V のベクトル $u_{r+1}, \cdots, u_{r+s}$ を

$T(u_{r+1}) = v_1,\ T(u_{r+2}) = v_2,\ \cdots,\ T(u_{r+s}) = v_s$

となるように選ぶ。このとき、$r+s$ 個のベクトル $u_1, \cdots, u_r, u_{r+1}, \cdots, u_{r+s}$ が V の基となることを示せばよい。

V を生成すること：u を V の任意のベクトルとすると、$T(u) \in \mathrm{Im}(T)$ なので

$T(u) = b_1 v_1 + \cdots + b_s v_s \quad (b_i \in \mathbb{R})$

と書ける。ここで

$T(u - b_1 u_{r+1} - \cdots - b_s u_{r+s})$

$$= T(\mathbf{u}) - b_1 T(\mathbf{u}_{r+1}) - \cdots - b_s T(\mathbf{u}_{r+s})$$

$$= b_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + b_s \mathbf{v}_s - (b_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + b_s \mathbf{v}_s) = \mathbf{0}$$

となる。よって、$\mathbf{u} - b_1 \mathbf{u}_{r+1} - \cdots - b_s \mathbf{u}_{r+s} \in \mathrm{Ker}(T)$. よって、

$$\mathbf{u} - b_1 \mathbf{u}_{r+1} - \cdots - b_s \mathbf{u}_{r+s} = a_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + a_r \mathbf{u}_r$$

と書ける。ゆえに

$$\mathbf{u} = a_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + a_r \mathbf{u}_r + b_1 \mathbf{u}_{r+1} + \cdots + b_s \mathbf{u}_{r+s}$$

となるので、V は $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{r+1}, \ldots, \mathbf{u}_{r+s}$ で生成される。

1次独立であること：$a_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + a_r \mathbf{u}_r + b_1 \mathbf{u}_{r+1} + \cdots + b_s \mathbf{u}_{r+s} = \mathbf{0}$ $(a_i, b_j \in \mathbb{R})$ $(*)$

とおく。両辺に T を作用させると、$T\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$ $(1 \leq i \leq r)$ なので

$$a_1 \underbrace{T(\mathbf{u}_1)}_{\mathbf{0}} + \cdots + a_r \underbrace{T(\mathbf{u}_r)}_{\mathbf{0}} + b_1 \underbrace{T(\mathbf{u}_{r+1})}_{\mathbf{v}_1} + \cdots + b_s \underbrace{T(\mathbf{u}_{r+s})}_{\mathbf{v}_s} = T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

$$\therefore b_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + b_s \mathbf{v}_s = \mathbf{0}$$

$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s$ は1次独立なので $b_1 = \cdots = b_s = 0$. よって、$(*)$ は

$$a_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + a_r \mathbf{u}_r = \mathbf{0}$$

となる。ここで、$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ も1次独立なので $a_1 = \cdots = a_r = 0$

以上より $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{r+1}, \ldots, \mathbf{u}_{r+s}$ は1次独立 □

例題5.1.1.（線形写像の階数と退化次数の求め方）次の線形写像 T に対し、(1) T の退化次数と $\mathrm{Ker}(T)$ の一組の基、(2) T の階数と $\mathrm{Im}(T)$ の一組

の基を求めよ.

$$T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3,\quad T(x) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} x. \quad (x \in \mathbb{R}^5)$$

(解) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ とおくと. $\mathrm{Ker}(T) = \{x \in \mathbb{R}^5 : T(x) = 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R}^5 : Ax = 0\}$ なので Tの退化次数と$\mathrm{Ker}(T)$の一組の基を求めるには

$Ax = 0$の解空間の次元と一組の基を求めればよい (例題4.4.1を参照).

$$\begin{array}{rrrrrl}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline
2 & -1 & 1 & 5 & 0 & \\
1 & 3 & 4 & -1 & 7 & \\
1 & 0 & 1 & 2 & 1 & \\ \hline
1 & 3 & 4 & -1 & 7 & ② \\
2 & -1 & 1 & 5 & 0 & ① \\
1 & 0 & 1 & 2 & 1 & \\ \hline
1 & 3 & 4 & -1 & 7 & \\
0 & -7 & -7 & 7 & -14 & ② - 2\times① \\
0 & -3 & -3 & 3 & -6 & ③ - 2\times① \\ \hline
1 & 3 & 4 & -1 & 7 & \\
0 & 1 & 1 & -1 & 2 & ② \times (-\frac{1}{7}) \\
0 & 1 & 1 & -1 & 2 & ③ \times (-\frac{1}{3}) \\ \hline
1 & 0 & 1 & 2 & 1 & \\
0 & 1 & 1 & -1 & 2 & ① - 3\times② \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ③ - ② \\ \hline
\end{array}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$x_3 = c_1,\ x_4 = c_2,\ x_5 = c_3$ とおくと.

$$\begin{cases} x_1 = -c_1 - 2c_2 - c_3, \\ x_2 = -c_1 + c_2 - 2c_3 \end{cases}$$

$$\therefore x = \begin{bmatrix} -c_1 - 2c_2 - c_3 \\ -c_1 + c_2 - 2c_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$= c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ここで、$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ は、$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解空間を生成し、明らかに1次独立

なので、解空間の一組の基である。ゆえに、$\mathrm{null}(T)=3$ で、上の3つのベクトルが

$\mathrm{Ker}(T)$ の一組の基となる。(答)

(2) $A=[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5]$ とする。$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+x_5\boldsymbol{e}_5 \in \mathbb{R}^5$ に対して

$$T(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}=x_1\underbrace{A\boldsymbol{e}_1}_{=\boldsymbol{a}_1}+x_2\underbrace{A\boldsymbol{e}_2}_{=\boldsymbol{a}_2}+\cdots+x_5\underbrace{A\boldsymbol{e}_5}_{=\boldsymbol{a}_5}$$

$$=x_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+x_5\boldsymbol{a}_5$$

なので、$\mathrm{Im}(T)=\{T(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^5\}=\{x_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+x_5\boldsymbol{a}_5 : x_1,\cdots,x_5\in\mathbb{R}\}$

$$=\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5\rangle.$$

よって、T の階数と $\mathrm{Im}(T)$ の一組の基を求めるには、行列 A の列ベクトルの1次独立な最大個数と、それを与える1次独立な A の列ベクトルを求めればよい

(例題4.3.1参照)。

(1)で計算した簡約化より、

$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$
2	−1	1	5	0
1	3	4	−1	7
1	0	1	2	1
1	0	1	2	1
0	1	1	−1	2
0	0	0	0	0
$\boldsymbol{b}_1$	$\boldsymbol{b}_2$	$\boldsymbol{b}_3$	$\boldsymbol{b}_4$	$\boldsymbol{b}_5$

右表より

$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ は1次独立で

$\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2$,

$\boldsymbol{b}_4=2\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2$

$\boldsymbol{b}_5=\boldsymbol{b}_1+2\boldsymbol{b}_2$

よって、$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ は1次独立で、$\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4 = 2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_5 = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2$

となる。以上より、$\mathrm{rank}(T) = 2$ で、$\underset{\mathbf{a}_1}{\underset{\shortparallel}{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}}, \underset{\mathbf{a}_2}{\underset{\shortparallel}{\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}}}$ が $\mathrm{Im}(T)$ の一組の基となる

$\square$

5.2 線形写像の表現行列

定義5.2.1.（表現行列）$T: U \to V$ は線形写像，$\{u_1, \cdots, u_n\}$ は U の基，$\{v_1, \cdots, v_m\}$ は V の基とする．このとき

$$
\begin{aligned}
T(u_1) &= a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \cdots + a_{m1} v_m \\
T(u_2) &= a_{12} v_1 + a_{22} v_2 + \cdots + a_{m2} v_m \\
&\vdots \\
T(u_n) &= a_{1n} v_1 + a_{2n} v_2 + \cdots + a_{mn} v_m
\end{aligned}
$$

と表されるので，$A = [a_{ij}]$: $m \times n$ 行列と置けば 1次結合の記法 (p.71) より

$$(T(u_1), \cdots, T(u_n)) = (v_1, \cdots, v_m) A$$

となる．この行列 A を U の基 $\{u_1, \cdots, u_n\}$，V の基 $\{v_1, \cdots, v_m\}$ に関する T の表現行列という．

例1.1（標準基に関する表現行列）線形写像 $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ は

$$T(x) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} x \quad (x \in \mathbb{R}^2)$$

で定義されているとする．このとき $\mathbb{R}^2$ の標準基 $\left\{ e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$，$\mathbb{R}^3$ の標準基 $\left\{ e_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ に関する T の表現行列は $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

である．

(証明) $T(\mathbb{e}_1)=\begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix}=2\mathbb{e}_1'+\mathbb{e}_2'+4\mathbb{e}_3'$, $T(\mathbb{e}_2)=\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}=\mathbb{e}_1'+3\mathbb{e}_3'$

なので
$$(T(\mathbb{e}_1),T(\mathbb{e}_2))=(\mathbb{e}_1',\mathbb{e}_2',\mathbb{e}_3')\begin{bmatrix}2&1\\1&0\\4&3\end{bmatrix}$$

ゆえに. Tの表現行列は $A=\begin{bmatrix}2&1\\1&0\\4&3\end{bmatrix}$ □

例1の証明と同様にして次の事実が示せる.

補足5.2.2 (行列によって定まる線形写像の表現行列) A: $m\times n$ 行列. $T_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ は A によって定まる線形写像, すなわち. $T_A(x)=Ax\ (x\in\mathbb{R}^n)$ とする. このとき $\mathbb{R}^n$ の標準基と $\mathbb{R}^m$ の標準基に関する T_A の表現行列は A である.

定義5.2.3 (基の変換行列) $T:U\to V$ は線形写像で, $\dim(U)=n$, $\dim(V)=m$ とする.

U の基として $\{u_1,\cdots,u_n\}$, $\{u_1',\cdots,u_n'\}$

V の基として $\{v_1,\cdots,v_m\}$, $\{v_1',\cdots,v_m'\}$

を考える. $u_1',\cdots,u_n'$ は $\{u_1,\cdots,u_n\}$ の1次結合で表されるので

$$u_1'=p_{11}u_1+p_{21}u_2+\cdots+p_{n1}u_n$$
$$u_2'=p_{12}u_1+p_{22}u_2+\cdots+p_{n2}u_n$$

$$u_n' = p_{1n}u_1 + p_{2n}u_2 + \cdots + p_{nn}u_n$$

と表わされるので $P=[p_{ij}]$: $n\times n$ 行列と置けば 1次結合の記法より

$$(u_1', u_2', \ldots, u_n') = (u_1, u_2, \ldots, u_n)P$$

となる. 同様に. $Q=[q_{ij}]$: $m\times m$ 行列に対して

$$(v_1', v_2', \ldots, v_m') = (v_1, v_2, \ldots, v_m)Q$$

となる. この P, Q のことを基の変換行列という.

補足 5.2.4. (基の変換行列の正則性) 基の変換行列 P, Q は正則行列である.

(証明) 定理 4.3.6 (2) より直ちにわかる □

定理 5.2.1. (異なる基に対する表現行列) $T: U \to V$ は線形写像, $\{u_1, \ldots, u_n\}, \{u_1', \ldots, u_n'\}$ は U の二組の基で $(u_1', \ldots, u_n') = (u_1, \ldots, u_n)P$, $\{v_1, \ldots, v_m\}, \{v_1', \ldots, v_m'\}$ は V の二組の基で $(v_1', \ldots, v_m') = (v_1, \ldots, v_m)Q$ とする.

T の $\{u_1, \ldots, u_n\}, \{v_1, \ldots, v_m\}$ に関する表現行列を A,

T の $\{u_1', \ldots, u_n'\}, \{v_1', \ldots, v_m'\}$ に関する表現行列を B

とすると. $B = Q^{-1}AP$.

(証明) $P=[p_{ij}]$ とおくと. T の線形性と表現行列 A の定義より.

$$(T(u_1'), \cdots, T(u_n'))$$

$$= (T(p_{11}u_1 + \cdots + p_{n1}u_n), \cdots, T(p_{1n}u_1 + \cdots + p_{nn}u_n))$$

$$= (p_{11}T(u_1) + \cdots + p_{n1}T(u_n), \cdots, p_{1n}T(u_1) + \cdots + p_{nn}T(u_n))$$

$$= (T(u_1), \cdots, T(u_n))P = (v_1, \cdots, v_m)AP$$

一方，表現行列 B と基の変換行列 Q の定義より

$$(T(u_1'), \cdots, T(u_n')) = (v_1', \cdots, v_m')B$$

$$= (v_1, \cdots, v_m)QP$$

以上より

$$(v_1, \cdots, v_m)AP = (v_1, \cdots, v_m)QP$$

$v_1, \cdots, v_m$ は1次独立なので 定理4.2.5より $AP = QB$.

補題5.2.4より Q は正則なので Q^{-1} は存在，よって $B = Q^{-1}AP$ □

例題5.2.1.（線形写像の表現行列の求め方）$U = \mathbb{R}^3$，$V = \mathbb{R}^2$ とし，U から V への線形写像を

$$T(x) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} x, \quad x \in U$$

と定義する．U と V の以下に与えられた基に関する T の表現行列 B を求めよ．

U の基 $\left\{ a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

V の基 $\left\{ b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

(解) Uの標準基$\{e_1, e_2, e_3\}$, Vの標準基$\{e_1', e_2'\}$に関するTの表現行列は補足5.2.2より $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ である.

① Uの基の変換行列Pを求める:

$$(a_1, a_2, a_3) = (2e_1 + 3e_3,\ e_2 + e_3,\ e_1 + e_3)$$

$$= (e_1, e_2, e_3)\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \therefore P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

② Vの基の変換行列Qを求める:

$$(b_1, b_2) = (e_1' + e_2',\ 2e_1' + 3e_2') = (e_1', e_2')\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \therefore Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

ここで $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ なので 定理5.2.1より

$$B = Q^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 17 & 7 \\ -5 & -6 & -2 \end{bmatrix}$$

定義5.2.5 (線形変換) ベクトル空間Uから自分自身への線形写像をUの線形変換という. Uの基$\{u_1, \cdots, u_n\}$に関するUの線形変換Tの表現行列Aを

$$(T(u_1), \cdots, T(u_n)) = (u_1, \cdots, u_n)A$$

で定義する.

定理5.2.2.（異なる基に対する線形変換の表現行列）V：ベクトル空間，

$\{u_1, \cdots, u_n\}$，$\{u_1', \cdots, u_n'\}$をVの2組の基，Pは基の変換行列，すなわち

$$(u_1', \cdots, u_n') = (u_1, \cdots, u_n)P$$

とする．Vの線形変換Tの$\{u_1, \cdots, u_n\}$に関する表現行列をA，

$\{u_1', \cdots, u_n'\}$に関する表現行列をB

とすると　$B = P^{-1}AP$.

（証明）定理5.2.1で$V = V$，$Q = P$と置けばよい　□

例題5.2.2.（線形変換の表現行列の求め方）$\mathbb{R}^2$の線形変換$T(x) = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} x$に対して，次の$\mathbb{R}^2$の基に関する表現行列$B$を求める．

$$\left\{ u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

（解）補足5.2.2より，$\mathbb{R}^2$の標準基$\{e_1, e_2\}$に関するTの表現行列は

$A = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$である．

① 基の変換行列Pを求める：

$$(u_1, u_2) = (e_1 + e_2,\ 2e_1 + e_2) = (e_1, e_2)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \therefore P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore P^{-1} = \frac{1}{1-2}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

よって 定理5.2.2より、

$$B=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1&2\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&-6\\3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&4\end{bmatrix}\quad\square$$

例題5.2.3. (線形変換の表現行列の求め方：数ベクトルでない場合) $\mathbb{R}[x]_2$ の線形変換 T を $T(f)=f'(x)\cdot x+f(0)x^2+f(1)$ $(f\in\mathbb{R}[x]_2)$ と定義する.

(1) $\mathbb{R}[x]_2$ の基 $\{1, x, x^2\}$ に関する T の表現行列 A を求めよ.

(2) $\mathbb{R}[x]_2$ の基 $\{1+x, x+x^2, x^2\}$ に関する T の表現行列 B を求めよ.

(解) T による $1, x, x^2$ の像を調べると

$$T(1)=0\cdot x+1\cdot x^2+1=1+x^2.$$

$$T(x)=1\cdot x+0\cdot x^2+1=1+x$$

$$T(x^2)=2x\cdot x+0\cdot x^2+1=1+2x^2$$

以上より、

$$\left(T(1), T(x), T(x^2)\right)=\left(1+x^2, 1+x, 1+2x^2\right)$$

$$=(1, x, x^2)\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&0&2\end{bmatrix}\quad\therefore A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&0&2\end{bmatrix}$$

(2) ① 基の変換行列 P を求める：

$$(1+x, x+x^2, x^2)=(1, x, x^2)\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\quad\therefore P=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

② Pの逆行列P^{-1}を求める

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \\ ②-① \\ \\ \\ \\ ③-②
\end{array}
$$

$$\therefore P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

よって定理5.2.2より.

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}}$$

□

5.3 固有値と固有ベクトル

<u>定義5.3.1</u> (固有値と固有ベクトル) V: ベクトル空間, T は V の線形変換とする.

$$T(u) = \lambda u \quad (u \in V,\ u \neq 0,\ \lambda \in \mathbb{R})$$

を満たす λ を T の<u>固有値</u>, u を (固有値 λ に属する) T の<u>固有ベクトル</u>という.

複素数体上のベクトル空間の線形変換についても $\lambda \in \mathbb{C}$ として同様に定義される.

<u>例1.</u> (固有値と固有ベクトルの例) $\mathbb{R}^2$ の線形変換

$$T(x) = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} x \quad (x \in \mathbb{R}^2)$$

を考える. このとき

$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} とすると, \quad T(u) = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} = 4u$$

よって $\lambda = 4$ は T の固有値で, u は T の固有値 $\lambda = 4$ に属する固有ベクトル

<u>定義5.3.2.</u> (固有空間) V: ベクトル空間, T: V の線形変換, λ は T の固有値とする.

$$W(\lambda; T) := \{u \in V : T(u) = \lambda u\}$$

とおき, T の固有値 λ の<u>固有空間</u>という.

補題5.3.3 固有空間 $W(\lambda;T)$ は V の部分空間であり，$W(\lambda;T)$ に属する零でないベクトルは，λ に属する T の固有ベクトルである．

(証明) 部分空間であること：定理4.1.1の(i)-(iii)を確かめる．

(i) $T(\mathbf{0})=\mathbf{0}=\lambda\cdot\mathbf{0}$ $\therefore \mathbf{0}\in W(\lambda;T)$.

(ii) $u, v\in W(\lambda;T)$ とすると $T(u)=\lambda u,\ T(v)=\lambda v$

$\therefore T(u+v)=T(u)+T(v)=\lambda u+\lambda v=\lambda(u+v)$

$\therefore u+v\in W(\lambda;T)$.

(iii) $u\in W(\lambda;T),\ c\in\mathbb{R}$ とすると．$T(u)=\lambda u$.

$\therefore T(cu)=cT(u)=c\cdot(\lambda u)=\lambda(cu)$ $\therefore cu\in W(\lambda;T)$.

以上より，$W(\lambda;T)$ は V の部分空間 □

定義5.3.4 (行列の固有値) 正方行列 A に対し，多項式

$$g_A(t):=|tE-A|$$

を A の固有多項式という．$g_A(t)=0$ の解を(複素数解も含め)行列 A の固有値という．

例12 (行列の固有多項式と固有値) $A=\begin{bmatrix}7 & -6\\ 3 & -2\end{bmatrix}$ とする．

(1) A の固有多項式：

$g_A(t)=|tE-A|=\begin{vmatrix} t-7 & 6 \\ -3 & t+2 \end{vmatrix}=(t-7)(t+2)+18=t^2-5t+4$

$=(t-1)(t-4)$

(2) 行列Aの固有値：$g_A(t)=0$とすると、$t=1,4$

よってAの固有値は、$\lambda=1,4$ □

定理5.3.1.（行列で定まる線形変換の固有値と固有ベクトル）$V=\mathbb{R}^n$または、

$V=\mathbb{C}^n$；Aはn次正方行列で、T_AはAで定まるVの線形変換、すなわち

$T_A(x)=Ax$ $(x\in V)$とする。このとき

λがT_Aの固有値 $\Leftrightarrow g_A(\lambda)=0$

（証明）（$\Rightarrow$）λがT_Aの固有値で、uがλに属するT_Aの固有ベクトルとすると

$T(u)=\lambda u$ $\therefore Au=\lambda u$ $\therefore (\lambda E-A)u=0$ よって、連立1次方程式

$(\lambda E-A)x=0$は自明でない解$x=u(\neq 0)$をもつので $\lambda E-A$は正則でない。

よって $g_A(\lambda)=|\lambda E-A|=0$

（$\Leftarrow$）$g_A(\lambda)=|\lambda E-A|=0$とすると、$\lambda E-A$は正則でない。よって連立1次方程式

$(\lambda E-A)x=0$は自明でない解$x=u(\neq 0)$をもつ。

$\therefore (\lambda E-A)u=0$ $\therefore Au=\lambda u$ $\therefore T_A(u)=\lambda u$.

よって、λはT_Aの固有値 □

補足5.3.5（行列で定まる線形変換の固有値と固有空間の求め方）

・$V=\mathbb{C}^n$のとき： Aの固有値$=T_A$の固有値

・$V=\mathbb{R}^n$のとき： Aの実数の固有値$=T_A$の固有値

・$W(\lambda;T_A)=$連立1次方程式$(\lambda E-A)x=0$の解空間

（証明）定理5.3.1より明らか □

例13（行列で定まる線形変換の固有値） $A=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$で、$T_A$は$A$によって定まる線形変換とする。

(1) $V=\mathbb{R}^2$のとき、T_Aの固有値は存在しない。

(2) $V=\mathbb{C}^2$のとき、T_Aの固有値は$i,-i$.

（解） $g_A(t)=|tE-A|=\begin{vmatrix}t&1\\-1&t\end{vmatrix}=t^2+1=0$ $\therefore t=\pm i$

(1) $\pm i$は実数でないので、$V=\mathbb{R}^2$のとき、T_Aの固有値は存在しない。

(2) $V=\mathbb{C}^2$のとき、T_Aの固有値は$i,-i$ □

例題5.3.1（行列で定まる線形変換の固有値、固有空間の求め方）。

$A=\begin{bmatrix}8&-10\\5&-7\end{bmatrix}$とする。

(1) Aの固有多項式$g_A(t)$を求めよ。

(2) $\mathbb{R}^2$の線形変換$T=T_A$の固有値λを求めよ。

(3) Tの各固有値λの固有空間$W(\lambda; T)$を求めよ.

(解) (1) 定義より

$$g_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-8 & 10 \\ -5 & t+7 \end{vmatrix} = (t-8)(t+7)+50 = t^2 - t - 6$$

(2) $g_A(t) = t^2 - t - 6 = (t-3)(t+2) = 0$ を解くと. $t = -2, 3$

よって. T_Aの固有値 $\lambda = -2, 3$

(3) $\lambda = -2$の場合: $W(-2; T)$は $(-2E - A)x = 0$の解空間である.

$$-2E - A = \begin{bmatrix} -10 & 10 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$$

x_1	x_2	
-10	10	
-5	5	
1	-1	①$\times\left(-\frac{1}{10}\right)$
1	-1	②$\times\left(-\frac{1}{5}\right)$
1	-1	
0	0	②$-$①

$\therefore (-2E - A)x = 0$の解は $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$ $\therefore x_1 - x_2 = 0$

$x_2 = c$と置くと. $x = \begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore W(-2; T) = \left\{ c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\}$$

$\lambda = 3$の場合:

$$3E - A = \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}$$

x_1	x_2	
-5	10	
-5	10	
1	-2	①$\times(-\frac{1}{5})$
1	-2	②$\times(-\frac{1}{5})$
1	-2	
0	0	②$-$①

$\therefore (3E-A)x=0$ の解は. $\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=0 \quad \therefore x_1-2x_2=0$

$x_2=c$ と置いて. $x=\begin{bmatrix}2c\\ c\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix} \quad \therefore W(3;T)=\left\{c\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix} : c\in\mathbb{R}\right\}$

cut

定義5.3.6. (行列多項式) 多項式 $f(t)=a_mt^m+a_{m-1}t^{m-1}+\cdots+a_1t+a_0$ と

正方行列 A に対して

$$f(A):=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0E$$

と定義する

定理5.3.2 (ケーレー・ハミルトンの定理) 正方行列 A の固有多項式を $g_A(t)$

とすると. $g_A(A)=O$.

(証明) $B(t)=tE-A$ とおくと $g_A(t)=|B(t)|$.

$B(t)$ の余因子行列を $\tilde{B}(t)$ とすると. 定理3.4.1 より.

(*) $\quad B(t)\tilde{B}(t)=g_A(t)E$

Aの次数をnとする。$\widetilde{B}(t)$の各成分は$B(t)$の$(n-1)$次の小行列の行列式なので、

tの高々$(n-1)$次の多項式である。よってtの巾に関して整理すると、

$$\widetilde{B}(t)=t^{n-1}B_{n-1}+t^{n-2}B_{n-2}+\cdots+tB_1+B_0$$

と書ける。ここで$B_k\ (k=0,\cdots,n-1)$はn次正方行列である。

例えば$n=3$のときは$\widetilde{B}(t)$の各成分は高々2次のtの多項式なので

$$\widetilde{B}(t)=\begin{bmatrix} t^2-3t+1 & t+3 & -t^2+4 \\ t & 1-t+t^2 & t+t^2 \\ 0 & 2+3t & 3t^2+2t+1 \end{bmatrix}$$ とすると、

$$=\begin{bmatrix} t^2 & 0 & -t^2 \\ 0 & t^2 & t^2 \\ 0 & 0 & 3t^2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -3t & t & 0 \\ t & -t & t \\ 0 & 3t & 2t \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=t^2\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(*)に上式を代入:

$$(**)\quad (tE-A)(t^{n-1}B_{n-1}+t^{n-2}B_{n-2}+\cdots+tB_1+B_0)=f_A(t)E.$$

$$f_A(t)=t^n+b_{n-1}t^{n-1}+b_{n-2}t^{n-2}+\cdots+b_1t+b_0$$

とおく。

$(**)$の右辺$=t^nE+b_{n-1}t^{n-1}E+b_{n-2}t^{n-2}E+\cdots+b_1tE+b_0E$

$(**)$の左辺の展開$=t^nB_{n-1}+t^{n-1}(B_{n-2}-AB_{n-1})+\cdots+(-AB_0)$

上式の2式の$t^k\ (k=0,\cdots,n)$の係数の行列を比較すると、

(＊＊＊)
$$B_{n-1}=E,\ B_{n-2}-AB_{n-1}=b_{n-1}E,\ \cdots\cdots$$
$$B_0-AB_1=b_1E,\ -AB_0=b_0E.$$

よって、(＊＊)の右辺において形式的に $t=A$ と置いたものを計算すると、

$$O=(A-A)(A^{n-1}B_{n-1}+A^{n-2}B_{n-2}+\cdots+AB_1+B_0)$$
$$=A^nB_{n-1}+(A^{n-1}B_{n-2}-A^nB_{n-1})+\cdots+(AB_0-A^2B_1)+(-AB_0)$$
$$=A^nB_{n-1}+A^{n-1}(B_{n-2}-AB_{n-1})+\cdots+A(B_0-AB_1)+(-AB_0)$$
$$\underset{(＊＊＊)}{=}A^n+b_{n-1}A^{n-1}+b_{n-2}A^{n-2}+\cdots+b_1A+b_0E$$
$$=g_A(A)\quad \square$$

定義5.3.7（一般の線形変換の固有多項式）V：n次元ベクトル空間、T：Vの線形変換、$\{u_1,\cdots,u_n\}$をVの一組の基、A：Tの$\{u_1,\cdots,u_n\}$に関する表現行列、すなわち、

$$(T(u_1),T(u_2),\cdots,T(u_n))=(u_1,u_2,\cdots,u_n)A.$$

このとき、

$$g_T(t):=g_A(t)=|tE-A| \leftarrow A\text{の固有多項式}$$

と置き、$g_T(t)$をTの固有多項式という。

補足5.3.8（線形変換Tの固有多項式の一意性）Vの線形変換Tの固有多項式は、Tの表現行列の取り方によらずに一意的に定まる。すなわち

A : Vの基$\{u_1, \cdots, u_n\}$に関するTの表現行列

B : Vの基$\{u_1', \cdots, u_n'\}$に関するTの表現行列.

とするとき. $g_A(t) = g_B(t)$.

(証明) Vの2組の基の変換行列をPとする, すなわち

$$(u_1', \cdots, u_n') = (u_1, \cdots, u_n)P$$

とすると. 定理5.2.2より. $B = P^{-1}AP$. よって 行列式の性質より.

$$g_B(t) = |tE - B| = |tE - P^{-1}AP|$$

$$= |tP^{-1}EP - P^{-1}AP| = |P^{-1}(tE - A)P| = |\overbrace{P^{-1}P}^{E}(tE - A)|$$

$$= |tE - A| = g_A(t) \quad \square$$

<u>定理5.3.3.</u> (一般の線形変換の固有値) Vはベクトル空間、TはVの線形変換とする. このとき

$$\lambda が T の固有値 \iff g_T(\lambda) = 0$$

(証明) Vの一組の基$\{u_1, \cdots, u_n\}$に関するTの表現行列をAとする:

$$(T(u_1), \cdots, T(u_n)) = (u_1, \cdots, u_n)A.$$

($\Rightarrow$) λがTの固有値で. $u \in V$がλに属するTの固有ベクトルとする.

$$u = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n$$

と表す. $\mathbb{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ とおく. このとき

$$T(u) = T(c_1u_1 + \cdots + c_nu_n)$$

$$= c_1T(u_1) + \cdots + c_nT(u_n)$$

$$= (T(u_1), \cdots, T(u_n)) \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$= (u_1, \cdots, u_n)A\mathbf{c}$$

一方, u は λ に属する T の固有ベクトルなので

$$T(u) = \lambda u = \lambda(c_1u_1 + \cdots + c_nu_n) = (u_1, \cdots, u_n)\begin{bmatrix} \lambda c_1 \\ \vdots \\ \lambda c_n \end{bmatrix} = (u_1, \cdots, u_n)\lambda\mathbf{c}$$

上の2式より

$$(u_1, \cdots, u_n)A\mathbf{c} = (u_1, \cdots, u_n)\lambda\mathbf{c}$$

$u_1, \cdots, u_n$ は1次独立なので定理4.2.5より, $A\mathbf{c} = \lambda\mathbf{c}$.

$u \neq 0$ なので $\mathbf{c} \neq 0$. よって, λ は行列 A によって定まる線形変換 T_A の固有値である. よって定理5.3.1より, $g_T(\lambda) = g_A(\lambda) = 0$.

($\Leftarrow$) λ は $g_T(\lambda) = 0$ を満たすとする. $\underset{\substack{\parallel \\ |\lambda E - A|}}{g_A(\lambda)} = g_T(\lambda) = 0$ なので, 連立1次方程式 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ は自明でない解をもつ. それを $\mathbf{x} = \mathbf{c}$ とすると, $A\mathbf{c} = \lambda\mathbf{c}$.

今, $u = c_1u_1 + \cdots + c_nu_n$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ と置くと $u = (u_1, \cdots, u_n)\mathbf{c}$.

このとき,

$$T(u) = T(c_1u_1 + \cdots + c_nu_n) = c_1T(u_1) + \cdots + c_nT(u_n)$$
$$= (T(u_1), \cdots, T(u_n))c = (u_1, \cdots, u_n)Ac$$
$$= (u_1, \cdots, u_n)\lambda c = \lambda(u_1, \cdots, u_n)c = \lambda u$$

よって. λはTの固有値でuはTの固有値λに属する固有ベクトルと分る □

例題5.3.2.（一般の線形変換の固有値，固有空間の求め方）$\mathbb{R}[x]_2$の線形変換Tは．$T(f(x)) = f(1+2x)$　$(f \in \mathbb{R}[x]_2)$で与えられているとする．

(1) Tの固有多項式$g_T(t)$を求めよ．

(2) Tの固有値λを求めよ．

(3) Tの各固有値λの固有空間を求めよ．

(解)

(1) ① Vの一組の基を求める：

$\{1, x, x^2\}$はVの一組の基．

② Tの$\{1, x, x^2\}$に関する表現行列Aを求める：

$$(T(1), T(x), T(x^2)) = (1, 1+2x, (1+2x)^2)$$
$$= (1, 1+2x, 1+4x+4x^2)$$
$$= (1, x, x^2)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \therefore A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

③ $g_T(t) = g_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-1 & -1 & -1 \\ 0 & t-2 & -4 \\ 0 & 0 & t-4 \end{vmatrix} = (t-1)(t-2)(t-4)$

(1)の答

↑

上三角行列.

④ $g_T(t) = 0$ を解くと. 固有値λは. $\lambda = 1, 2, 4$

(2)の答

⑤ 固有空間の求め方:

(i) $f \in \mathbb{R}[x]_2$ を. 基$\{1, x, x^2\}$で表す:

(*) $$f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = (1, x, x^2)\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = (1, x, x^2)\boldsymbol{a}$$

(ii) 定理5.3.3の証明より.

λがTの固有値で. fがλに属するTの固有ベクトル

⇔ $\boldsymbol{a}$が 連立1次方程式 $(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$の解.

∵) (⇒) $T(f) = \lambda f$

$\therefore T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = \lambda(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)$

$\therefore a_0 T(1) + a_1 T(x) + a_2 T(x^2) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2.$

$$\therefore (T(1), T(x), T(x^2))\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = (1, x, x^2)\begin{bmatrix} \lambda a_0 \\ \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{bmatrix}$$

$\therefore (1, x, x^2) A\boldsymbol{a} = (1, x, x^2)\lambda\boldsymbol{a}$

$1, x, x^2$は1次独立なので 定理4.2.5より. $A\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a}$.

(ロ)の証明も定理5.3.3と同様にできる □

(iii) 以上より、固有値λの固有空間$W(\lambda; T)$を求めるには、$(\lambda E - A)x = 0$ の解を求めて、(＊)を使って、固有値λに属するTの固有ベクトルfを求める。

$\lambda=4$の場合： $4E-A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

x_1	x_2	x_3	
3	−1	−1	
0	2	−4	
0	0	0	
1	−1/3	−1/3	①×$\frac{1}{3}$
0	1	−2	②×$\frac{1}{2}$
0	0	0	
1	0	−1	①+②×$\frac{1}{3}$
0	1	−2.	
0	0	0.	

よって、$(4E-A)x=0$の解は、

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$x_3=c$とおくと、$x_1=c$, $x_2=2c$

$$\therefore x = \begin{bmatrix} c \\ 2c \\ c \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c\in\mathbb{R})$$

よって、(＊)より、固有値$\lambda=4$に属するTの固有ベクトルfは、

$$f = (1, x, x^2)\, c\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = c(1+2x+x^2)$$

$$\therefore W(4; T) = \{c(1+2x+x^2) : c\in\mathbb{R}\}.$$

$\lambda=2$の場合： $2E-A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

x_1	x_2	x_3	
1	−1	−1	
0	0	−4	
0	0	−2	
1	−1	−1	
0	0	1	②×$(-\frac{1}{4})$
0	0	1	③×$(-\frac{1}{2})$
1	−1	0	
0	0	1	
0	0	0	

よって、$(2E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解は、

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_2 = c$ とおいて、$x_1 = c$.

$$\therefore \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} c \\ c \\ 0 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (c \in \mathbb{R})$$

よって(*)より、固有値 $\lambda=2$ に属する T の固有ベクトル f は、

$$f = (1, x, x^2)\, c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = c(1+x)$$

$$\therefore W(2; T) = \{c(1+x) : c \in \mathbb{R}\}$$

$\lambda=1$ の場合: $E-A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

x_1	x_2	x_3	
0	−1	−1	
0	−1	−4	
0	0	−3	
0	1	1	①×(−1)
0	−1	−4	
0	0	−3	
0	1	1	
0	0	−3	②+①
0	0	−3	
0	1	1	
0	0	1	②×$(-\frac{1}{3})$
0	0	1	③×$(-\frac{1}{3})$
0	1	0	
0	0	1	
0	0	0	③−②

よって、$(E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解は

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_1 = c$ とおいて、$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

よって、(*)より、固有値 $\lambda=1$ に属する T の固有ベクトル f は、

$$f=(1,x,x^2)\,c\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=c$$

$$\therefore\ W(1;T)=\{c : c\in\mathbb{R}\}.$$

□

5.4 行列の対角化

定義5.4.1（同値な行列） A, B : n次正方行列とする.

AとBが同値 $\underset{def}{\iff}$ $B=P^{-1}AP$となる正則行列Pが存在する.

定義5.4.2（行列の対角化） Aを正方行列とする.

Aを対角化する $\underset{def}{\iff}$ 正則行列Pを見つけて $B=P^{-1}AP$が対角行列となる

ようにする.

特に.

Aは実数体上対角化される $\underset{def}{\iff}$ 上記のP, Bが実数を成分とする行列に取れる

Aは複素数体上対角化される $\underset{def}{\iff}$ 〃 〃 複素数 〃 〃 〃

例題5.4.1（対角化の応用） $A=\begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ とすると

$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ であることを確かめ、これを用いて A^nを計算せよ.

（解） $B=P^{-1}AP$とおく. $P^{-1}=\dfrac{1}{1-2}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ なので

$$B=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Bは対角行列なので $B^n=\begin{bmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}$.

ここで $A=PBP^{-1}$なので

$$A^n = \underbrace{(PBP^{-1})(PBP^{-1})\cdots\cdots(PBP^{-1})}_{n個}$$

$$= PB\underbrace{(P^{-1}P)}_{=E}B\underbrace{(P^{-1}P)}_{=E}\cdots\underbrace{(P^{-1}P)}_{=E}BP^{-1}$$

$$= PB^nP^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(-2)^n+2\cdot 3^n & 2(-2)^n-2\cdot 3^n \\ -(-2)^n+3^n & 2\cdot(-2)^n-3^n \end{bmatrix}$$ □

「 cut

定理5.4.1（異なる固有値の固有空間の次元の和）V：ベクトル空間，TはVの線形変換，$\lambda_1, \cdots, \lambda_r$は$T$の相異なる固有値とすると，

$$\sum_{i=1}^{r} \dim(W(\lambda_i; T)) \leq \dim(V)$$

（証明）$\dim(V)=n$，$\dim(W(\lambda_i;T))=n_i$ $(i=1,2,\cdots,r)$ とおく．各iに対して，$W(\lambda_i;T)$の一組の基 $u_{i1},\cdots,u_{in_i}$ を取り，

$$(*) \quad \overbrace{c_{11}u_{11}+\cdots+c_{1n_1}u_{1n_1}}^{u_1}+\cdots\cdots+\overbrace{c_{r1}u_{r1}+\cdots+c_{rn_r}u_{rn_r}}^{u_r}=0 \quad (c_{ij}\in\mathbb{R})$$

とおく．（このとき，$c_{11}=\cdots=c_{1n_1}=\cdots=c_{r1}=\cdots=c_{rn_r}=0$ を示す）．

ここで $u_1=c_{11}u_{11}+\cdots+c_{1n_1}u_{1n_1}, \cdots, u_r=c_{r1}u_{r1}+\cdots+c_{rn_r}u_{rn_r}$ とおくと

$$(**) \quad u_1+u_2+\cdots+u_r=0$$

となる．このとき，

- $T(u_i)=\lambda_i u_i \ (1\leq i\leq r)$．

$\because)$ $T(u_i) = T(c_{i1}u_{i1} + \cdots + c_{in_i}u_{in_i})$

$= c_{i1}T(u_{i1}) + \cdots + c_{in_i}T(u_{in_i})$ $\quad \because)\ u_{i1}, \cdots, u_{in_i} \in W(\lambda_i; T)$ #

$= c_{i1}\lambda_i u_{i1} + \cdots + c_{in_i}\lambda_i u_{in_i}$

$= \lambda_i(c_{i1}u_{i1} + \cdots + c_{in_i}u_{in_i}) = \lambda_i u_i$ #

よって、(**)の両辺にTを作用させると、

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_r u_r = 0$$

上式の両辺にさらにTを次々と作用させると、

$$\lambda_1^2 u_1 + \lambda_2^2 u_2 + \cdots + \lambda_r^2 u_r = 0$$

$$\vdots$$

$$\lambda_1^{r-1} u_1 + \lambda_2^{r-1} u_2 + \cdots + \lambda_r^{r-1} u_r = 0$$

以上をまとめると、

(***) $$(u_1, u_2, \cdots, u_r)\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{r-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_r & \cdots & \lambda_r^{r-1} \end{bmatrix} = (0, 0, \cdots, 0)$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{r-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r^{r-1} \end{bmatrix}$$ とおくと、

$$\det(P) \underset{\uparrow}{=} \det({}^tP) \underset{\uparrow}{=} \prod_{1 \le i < j \le r}(\lambda_j - \lambda_i) \neq 0\text{、}$$

定理3.3.1　　例題3.5.1（ヴァンデルモンドの行列式）

よって P は正則なので (＊＊) の両辺に右から P^{-1} をかけると、

$$(u_1, u_2, \cdots, u_r) = (0, 0, \cdots, 0)P^{-1} = (0, 0, \cdots, 0)$$

$$\therefore\ u_i = c_{i1}u_{i1} + \cdots + c_{im_i}u_{im_i} = 0 \quad (1 \leq i \leq r)$$

各 i に対して $u_{i1}, \cdots, u_{im_i}$ は1次独立なので $c_{i1} = \cdots = c_{im_i} = 0$。よって、

$$c_{11} = \cdots = c_{1n_1} = \cdots = c_{r1} = \cdots = c_{rn_r} = 0.$$

ゆえに $\sum_{i=1}^{r} n_i$ 個のベクトル $u_{11}, u_{12}, \cdots, u_{rn_r}$ は1次独立。$\dim(V) = n$ なので、

V に含まれるベクトルの集合の1次独立な最大個数は高々 n であるので、

$\sum_{i=1}^{r} n_i \leq n$. $\square$ $\square_{\mathrm{cut}}$

定理5.4.2 (行列が $\mathbb{R}$ 上対角化される為の条件) A を n 次実正方行列、

$\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ を A の相異なる実固有値の全体とする。

$$A \text{ が } \mathbb{R} \text{ 上対角化される} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{r} \dim(W(\lambda_i; T_A)) = n.$$

(証明) ($\Rightarrow$) A が $\mathbb{R}$ 上対角化されるとすると、$B = P^{-1}AP$ が対角行列となる

正則行列 $P = [p_{ij}]$ が存在する。

$$P = [p_1, \cdots, p_n], \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & O \\ & & \ddots & \\ O & & & b_n \end{bmatrix}$$

と書く。ここで

$$AP = [Ap_1, \cdots, Ap_n],$$

$$PB = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbb{p}_1 & \mathbb{p}_2 & & \mathbb{p}_n \\ \shortparallel & \shortparallel & & \shortparallel \end{array} \\ \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} b_1 & & & O \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & b_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{bmatrix} b_1 p_{11} & b_2 p_{12} & \cdots & b_n p_{1n} \\ b_1 p_{21} & b_2 p_{22} & & b_n p_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_1 p_{n1} & b_2 p_{n2} & \cdots & b_n p_{nn} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \shortparallel & \shortparallel & & \shortparallel \\ b_1\mathbb{p}_1 & b_2\mathbb{p}_2 & & b_n\mathbb{p}_n \end{array} \end{array} = [b_1\mathbb{p}_1, b_2\mathbb{p}_2, \cdots, b_n\mathbb{p}_n]$$

となるので $AP = PB$ より、

$$T_A(\mathbb{p}_j) = A\mathbb{p}_j = b_j\mathbb{p}_j \quad (1 \le j \le n).$$

ゆえに、$\mathbb{p}_j$ は T_A の固有ベクトルであるので、b_j は $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ のどれかに一致する。

P は正則なので $\mathbb{p}_1, \cdots, \mathbb{p}_n$ は1次独立。よって、

$$\dim(\overline{W}(\lambda_1; T_A)) \ge \text{“}b_j = \lambda_1 となる j の個数\text{”}$$

$\because$) “$b_j = \lambda_1$ となる j” に対しては $\mathbb{p}_j \in \overline{W}(\lambda_1; T_A)$ となるから #

同様に

$$\dim(\overline{W}(\lambda_2; T_A)) \ge \text{“}b_j = \lambda_2 となる j の個数\text{”}$$

$$\vdots$$

$$\dim(\overline{W}(\lambda_r; T_A)) \ge \text{“}b_j = \lambda_r となる j の個数\text{”}$$

以上より、 $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \dim(\overline{W}(\lambda_i; T_A)) \ge n.$

定理5.4.1と併せると、 $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \dim(\overline{W}(\lambda_i; T_A)) = n.$

(⇐) 各 $\overline{W}(\lambda_i;T_A)$ の基を $\{u_{i1},\cdots,u_{in_i}\}$ とすると、定理5.4.1の証明と

同様にして $\underbrace{u_{11},\cdots,u_{1n_1},\cdots,u_{r1},\cdots,u_{rn_r}}$ は1次独立である。

$$\sum_{i=1}^{r} n_i = \sum_{i=1}^{r} \dim(\overline{W}(\lambda_i;T_A)) \text{個}$$

仮定より $\sum_{i=1}^{r} \dim(\overline{W}(\lambda_i;T_A)) = n$ なので、定理4.4.5より、これらのベクトルは $\mathbb{R}^n$

の一組の基である。そこで

$$P=[u_{11}\cdots u_{1n_1}\cdots u_{r1}\cdots u_{rn_r}]$$

とおくと、Pは定理4.3.4より正則行列で、$T_A(u_{ik})=Au_{ik}=\lambda_i u_{ik}$

$(1\leq k\leq n_i;\ 1\leq i\leq r)$ となる。そこで

$$B=\begin{bmatrix} \overbrace{\lambda_1 \ \ddots}^{n_1\text{個}} & & & O \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \overbrace{\lambda_r \ \ddots}^{n_r\text{個}} \\ O & & & \lambda_r \end{bmatrix}$$

とおくと、$AP=PB$ となる

∵) $AP=[Au_{11}\cdots Au_{1n_1}\cdots Au_{r1}\cdots Au_{rn_r}]$

$\quad =[\lambda_1 u_{11}\cdots \lambda_1 u_{1n_1}\cdots \lambda_r u_{r1}\cdots \lambda_r u_{rn_r}]$

一方、$P=[u_{11}\cdots u_{1n_1}\cdots u_{r1}\cdots u_{rn_r}]$, $B=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & O\\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_r & \\ O & & & \lambda_r\end{bmatrix}$ なので直接計算すると、

$PB=[\lambda_1 u_{11}\cdots \lambda_1 u_{1n_1}\cdots \lambda_r u_{r1}\cdots \lambda_r u_{rn_r}]$ #

以上より、$B=P^{-1}AP$ となり、Aは $\mathbb{R}$ 上対角化可能である □

例題5.4.2 (対角化の方法I: 対角化可能な場合)

$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ が $\mathbb{R}$上対角化可能かを調べ、対角化可能ならば対角化せよ

(解) ① T_Aの固有値を求める.

$$g_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-5 & -6 & 0 \\ 1 & t & 0 \\ -1 & -2 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)^2(t-3)$$

よって. T_Aの固有値は $\lambda = 2, 3$

② 各固有値の固有空間を求める.

$\lambda = 2$: $2E - A = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{ccc|l} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline -3 & -6 & 0 & \\ 1 & 2 & 0 & \\ -1 & -2 & 0 & \\ \hline 1 & 2 & 0 & ①\times(-\frac{1}{3}) \\ 1 & 2 & 0 & \\ 1 & 2 & 0 & ③\times(-1) \\ \hline 1 & 2 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

$(2E - A)x = 0$ の解を求める:

$$x_1 + 2x_2 = 0$$

$x_2 = c_1$, $x_3 = c_2$ とおくと $x_1 = -2c_1$

$$\therefore x = \begin{bmatrix} -2c_1 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore W(2; T_A) = \left\{ a \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$\lambda=3$: $3E-A=\begin{bmatrix}-2 & -6 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ -1 & -2 & 1\end{bmatrix}$

x_1	x_2	x_3	
-2	-6	0	
1	3	0	
-1	-2	1	
1	3	0	①$\times(-\frac{1}{2})$
1	3	0	
-1	-2	1	
1	3	0	
0	0	0	
0	1	1	
1	3	0	
0	1	1	③
0	0	0	②
1	0	-3	
0	1	1	
0	0	0	

$(3E-A)x=0$ を解く.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_3=c$ とおくと $x_1=3c,\ x_2=-c$

$$\therefore x=\begin{bmatrix}3c\\ -c\\ c\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}3\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\therefore W(3;T_A)=\left\{c\begin{bmatrix}3\\ -1\\ 1\end{bmatrix} : c\in\mathbb{R}\right\}$$

③ 対角化可能性の判定.

$\dim(W(2;T_A))+\dim(W(3;T_A))=2+1=3.$

よって A は $\mathbb{R}$ 上対角化可能

④ P と B を求める.

$P=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 3\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ とおくと. $B=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$ となる

□

注意5.4.2.（P, Bは一意的ではない）上の例題で

$$P=\begin{bmatrix}-2&3&0\\1&-1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$ とおくと $$B=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$ となる.

すなわち，行列の対角化に現れるP, Bは1通りではない.

例題5.4.3（対角化の方法II：対角化不可能な場合）

$$A=\begin{bmatrix}1&3&2\\0&-1&0\\1&2&0\end{bmatrix}$$ が対角化できるか調べ、対角化できれば対角化せよ.

（解）. ① ${}^{t}A$の固有値を求める.

$$g_A(t)=|tE-A|=\begin{vmatrix}t-1&-3&-2\\0&t+1&0\\-1&-2&t\end{vmatrix}=(t+1)^2(t-2)$$

よって. ${}^{t}A$の固有値は $\lambda=-1, 2$

② 各固有値の固有空間を求める.

$\lambda=-1$： $$-E-A=\begin{bmatrix}-2&-3&-2\\0&0&0\\-1&-2&-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
-2 & -3 & -2 & \\
0 & 0 & 0 & \\
-1 & -2 & -1 & \\
\hline
-1 & -2 & -1 & ③\\
-2 & -3 & -2 & ①\\
0 & 0 & 0 & ②
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc|c}
\hline
1 & 2 & 1 & ①\times(-1)\\
2 & 3 & 2 & ②\times(-1)\\
0 & 0 & 0 & \\
\hline
1 & 2 & 1 & \\
0 & -1 & 0 & ②-2\times①\\
0 & 0 & 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc|c}
\hline
1 & 2 & 1 & \\
0 & 1 & 0 & ②\times(-1)\\
0 & 0 & 0 & \\
\hline
1 & 0 & 1 & ①-2\times②\\
0 & 1 & 0 & \\
0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

$(-E-A)x=\mathbb{0}$ を解く：

$$\begin{cases} x_1 \quad + x_3 = 0 \\ \quad x_2 \quad = 0 \end{cases}$$

$x_3 = c$ とおくと. $x_1 = -c$

$$\therefore x = \begin{bmatrix} -c \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \therefore \overline{W}(-1;{}^tA) = \left\{ c\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\}$$

$\lambda = 2$： $2E-A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

x_1	x_2	x_3	
1	−3	−2	
0	3	0	
−1	−2	2.	
1	−3	−2	
0	3	0	
0	−5	0	③+①
1	−3	−2	
0	1	0	②$\times\frac{1}{3}$
0	1	0	③$\times(-\frac{1}{5})$
1	0	−2.	①+3×②
0	1	0	
0	0	0	③−②

$(2E-A)x=\mathbb{0}$ を解く.

$$\begin{cases} x_1 \quad -2x_3 = 0 \\ \quad x_2 \quad = 0 \end{cases}$$

$x_3 = c$ とおくと. $x_1 = 2c$

$$\therefore x = \begin{bmatrix} 2c \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \overline{W}(2;{}^tA) = \left\{ c\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\}$$

③ 対角化可能性の判定.

$$\dim(\overline{W}(-1;{}^tA)) + \dim(\overline{W}(2;{}^tA)) = 1+1 = 2 < 3$$

よって. A は $\mathbb{R}$ 上対角化できない $\square$.

補足5.4.3（複素数体上の対角化）行列Aが$\mathbb{R}$上対角化できなくても、$\mathbb{C}$上対角化できる場合がある。$\mathbb{C}$上対角化は、$\mathbb{R}$上対角化に関する定理及び解法で$\mathbb{R}$の代わりに$\mathbb{C}$を取れば全て成立する。

第6章 内積空間

6.1 内積

定義6.1.1（内積）V：$\mathbb{R}$上のベクトル空間．$u, v \in V$に対して実数(u, v)を対応させる対応$(\ ,\ )$が次の4条件を満たすとき，この対応$(\ ,\ )$をVの内積という：$u, u', v \in V$，$c \in \mathbb{R}$とする

(1) $(u + u', v) = (u, v) + (u', v)$

(2) $(cu, v) = c(u, v)$

(3) $(v, u) = (u, v)$

(4) $u \neq 0$ならば $(u, u) > 0$

内積をもつベクトル空間を内積空間という

補足6.1.2（0ベクトルの内積）任意の$u \in V$に対して

$$(u, 0) = (0, u) = 0, \quad (u, u) \geq 0$$

（証明）$u \in V$とする．

$$\underset{(3)}{(u, 0) =} (0, u) = (0 0, u) \underset{(2)}{=} 0 \cdot (0, u) = 0$$

ベクトル空間の公理(8)

(4)より，$u \neq 0$ならば $(u, u) > 0$．

$u = 0$のときは $(0, 0) = 0$

$\therefore (u, u) \geq 0$

□

例1（標準的な内積）$V = \mathbb{R}^n$とする．$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$

に対して，

$$(\mathbb{a}, \mathbb{b}) := {}^t\mathbb{a}\mathbb{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

と定義すると、これは $\mathbb{R}^n$ の内積となる。これを $\mathbb{R}^n$ の標準的な内積という。

例題6.6.1（$\mathbb{R}^n$ の標準的内積）$\mathbb{R}^n$ の標準的内積が内積の定義(1)–(4)の条件を満たすことを確かめよ。

（解）$\mathbb{a}, \mathbb{a}', \mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ とする

(1) $(\mathbb{a}+\mathbb{a}', \mathbb{b}) = {}^t(\mathbb{a}+\mathbb{a}')\mathbb{b} = ({}^t\mathbb{a} + {}^t\mathbb{a}')\mathbb{b} = {}^t\mathbb{a}\mathbb{b} + {}^t\mathbb{a}'\mathbb{b} = (\mathbb{a}, \mathbb{b}) + (\mathbb{a}', \mathbb{b})$

(2) $(c\mathbb{a}, \mathbb{b}) = {}^t(c\mathbb{a})\mathbb{b} = c({}^t\mathbb{a}\mathbb{b}) = c(\mathbb{a}, \mathbb{b})$

(3) $\mathbb{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ とすると、

$$(\mathbb{b}, \mathbb{a}) = {}^t\mathbb{b}\mathbb{a} = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = b_1a_1 + \cdots + b_na_n$$

$$= a_1b_1 + \cdots + a_nb_n = {}^t\mathbb{a}\mathbb{b} = (\mathbb{a}, \mathbb{b})$$

(4) $\mathbb{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \neq \mathbb{0}$ とすると、$a_i \neq 0$ となる i が存在。このとき、

$$(\mathbb{a}, \mathbb{a}) = {}^t\mathbb{a}\mathbb{a} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a_1^2 + \cdots + a_n^2 > 0.$$

□

NO.

例題6.1.2 (内積の例) $V=\mathbb{R}[x]_n$ とする. $f, g \in V$ に対して

$$(f,g) := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

と定義すると, $(\ ,\ )$ は V の内積であることを示せ.

(解) 内積の4条件を確かめる. $f, g, h \in \mathbb{R}[x]_n$, $c \in \mathbb{R}$ とする.

(1) $(f+g, h) = \int_{-1}^{1}(f(x)+g(x))h(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)h(x)dx + \int_{-1}^{1} g(x)h(x)dx$

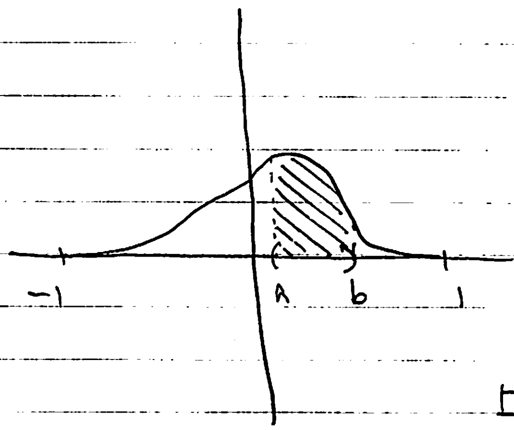
$= (f,h)+(g,h)$

(2) $(cf, g) = \int_{-1}^{1}\{cf(x)\}g(x)dx = c\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = c(f,g)$

(3) $(g,f) = \int_{-1}^{1} g(x)f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = (f,g)$

(4) $f \neq 0$ とすると, f^2 は連続なので f^2 はある開区間 $(a,b) \subset [-1,1]$ 上で正の値をとる. よって

$$(f,f) = \int_{-1}^{1} f(x)^2 dx \geq \int_{a}^{b} f(x)^2 dx > 0.$$



□

定義6.1.3 (ノルム) V: 内積空間. $u \in V$ に対して 補題6.1.2 より $(u,u) \geq 0$

なので

NO.

$$\|u\| := \sqrt{(u, u)}$$

とおき、u のノルム または 長さ という。

補題6.1.4（ノルムの性質I）V：内積空間、$u \in V$ とする

(1) $\|u\| \geq 0$

(2) $u = 0 \Leftrightarrow \|u\| = 0$

（証明）(1) は明らか。

(2) ($\Rightarrow$) $u = 0$ とすると、$\|u\|^2 = \|0\|^2 = (0, 0) = 0$

($\Leftarrow$) $\|u\| = 0$ とすると、$0 = \|u\|^2 = (u, u)$。$u \neq 0$ と仮定すると、内積の条件

(4) より、$(u, u) > 0$ となり矛盾! よって $u = 0$ □

例2（$\mathbb{R}^n$ のノルム）$V = \mathbb{R}^2$, $u = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ とすると、$\mathbb{R}^2$ の標準的な内積に

関して、$\|u\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$ □

約束6.1.5（$\mathbb{R}^n$ の内積）以下、断らない限り $\mathbb{R}^n$ の内積は標準的な

ものを考える。

定理6.1.1（ノルムの性質II）V：内積空間、$u, v \in V$, $c \in \mathbb{R}$ とする。

(1) $\|cu\| = |c| \cdot \|u\|$

(2) $|(u,v)| \le \|u\|\cdot\|v\|$ （シュヴァルツの不等式）

(3) $\|u+v\| \le \|u\|+\|v\|$ （三角不等式）

（証明）(1) $\|cu\|^2 = (cu,cu) = c(u,cu) = c(cu,u) = c^2(u,u) = c^2\|u\|^2$.

$\therefore \|cu\| = |c|\cdot\|u\|$.

(2) $u=0$ のとき 両辺共に0なので成り立つ. そこで $u \neq 0$ と仮定.

$f(t) = \|tu+v\|^2 \ (\geqq 0)$ とおくと.

$f(t) = (tu+v, tu+v) = t^2\|u\|^2 + 2t(u,v) + \|v\|^2$.

ここで $\|u\|^2 = (t^2の係数) > 0$ なので $f(t) \le 0$ である為には. tの2次式$f(t)$の判別式

$D \le 0$.

$\therefore D/4 = (u,v) - \|u\|^2\cdot\|v\|^2 \le 0$

$\therefore |(u,v)| \le \|u\|\cdot\|v\|$

(3) $\|u+v\|^2 = (u+v, u+v) = \|u\|^2 + 2(u,v) + \|v\|^2$.

$\underset{(2)}{\le} \|u\|^2 + 2\|u\|\cdot\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\|+\|v\|)^2$.

$\therefore \|u+v\| \le \|u\|+\|v\|$ □

定義6.1.6（ベクトルの直交） V: 内積空間, $u, v \in V$ とする.

u, v が直交する $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (u,v) = 0$

例13（$\mathbb{R}^2$における直交するベクトル）$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$, $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$ は直交する

（証明）$(\mathbf{u},\mathbf{v})=2\times(-3)+3\times2=0$ □

定理6.1.2（直交するベクトルは1次独立）零ベクトルでないベクトル $\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_r$ が互いに直交する（すなわち、r個のベクトル $\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_r$ の中の異なるどの2つのベクトルも直交する）ならば、これらは1次独立.

（証明）仮定より、$i\neq j$ ならば $(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_j)=0$.

今、$c_1\mathbf{u}_1+\cdots+c_r\mathbf{u}_r=\mathbf{0}$ とおくと、任意の $i\ (1\leq i\leq r)$ に対して

$$
\begin{array}{c}
(\mathbf{u}_i,\ c_1\mathbf{u}_1+\cdots+c_r\mathbf{u}_r)=(\mathbf{u}_i,\mathbf{0})=0\\
\shortparallel\\
\displaystyle\sum_{j=1}^{r}c_j(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_j)\\
\shortparallel\\
c_i\|\mathbf{u}_i\|^2
\end{array}
$$

仮定より、$\mathbf{u}_i\neq\mathbf{0}$ なので $\|\mathbf{u}_i\|\neq0$ $\therefore c_i=0\ (1\leq i\leq r)$.

ゆえに $\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_r$ は1次独立 □

6.2 正規直交基と直交行列

定義6.2.1.（正規直交基）V は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間，$u_1,\cdots,u_n \in V$ とする．

$\{u_1,\cdots,u_n\}$ が V の正規直交基

$\underset{\text{def}}{\iff}$ ① $\{u_1,\cdots,u_n\}$ は V の基

② $(u_i,u_j)=\delta_{ij}$ $(1\leq i,j\leq n)$

クロネッカーのデルタ $\delta_{ij}:=\begin{cases}1 & \text{if } i=j\\ 0 & \text{if } i\neq j.\end{cases}$

補題6.2.2.（正規直交基であるための条件）V：ベクトル空間で $\dim(V)=n$，$u_1,\cdots,u_n\in V$ とする．このとき．

$\{u_1,\cdots,u_n\}$ が正規直交基 $\iff$ $(u_i,u_j)=\delta_{ij}$ $(1\leq i,j\leq n)$

（証明）($\Rightarrow$) は明らか．

($\Leftarrow$) 仮定より．各 $u_i\neq 0$ で 定理6.1.2より $u_1,\cdots,u_n$ は1次独立．

ここで $\dim(V)=n$ なので 定理4.4.5より $\{u_1,\cdots,u_n\}$ は V の基となる．よって

正規直交基となる □

例1（$\mathbb{R}^n$ の正規直交基）$\mathbb{R}^n$ の標準基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ は正規直交基．

例2（$\mathbb{R}^n$ の標準基以外の正規直交基）$\left\{\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\right\}$ は $\mathbb{R}^2$ の正規直交基である．

(証明) $a=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$ とおくと、明らかに $\|a\|=\|b\|=1$, $(a,b)=0$

よって、$\{a, b\}$ は正規直交基。

定理6.21.（シュミットの直交化）V：ベクトル空間、$\{v_1,\cdots,v_n\}$ を V の一組の基とする。このとき、正規直交基 $\{u_1,\cdots,u_n\}$ で

$$\langle u_1,\cdots,u_r\rangle=\langle v_1,\cdots,v_r\rangle \quad (1\leq r\leq n)$$

となるものが存在する。特に有限次元の内積空間は正規直交基をもつ。

(証明) ① まず $v_1\neq 0$ なので（∵ $\{v_1,\cdots,v_n\}$ は V の基だから）

$$u_1=v_1/\|v_1\|$$

とおくと、$\|u_1\|=1$.

② 次に

$$v_2'=v_2-(v_2,u_1)u_1$$

とおくと、$v_2'\neq 0$ である

（∵ $v_2'=0$ とすると、v_2 は v_1 の定数倍となり、$\{v_1,\cdots,v_n\}$ が V の基であることに反する）

そこで

$$u_2=v_2'/\|v_2'\|$$

とおくと、$(u_1,u_2)=0$, $\|u_2\|=1$ であり、さらに、

$$\langle u_1,u_2\rangle=\langle u_1,v_2\rangle=\langle v_1,v_2\rangle$$

u_2 は u_1 と v_2 の定数倍和

u_1 は v_1 の定数倍和.

③ この操作を続けて、$u_1, \cdots, u_r$ $(1 \leq r < n)$ が求まったとき、

$$v'_{r+1} = v_{r+1} - (v_{r+1}, u_1)u_1 - \cdots - (v_{r+1}, u_r)u_r$$

とおくと、$v'_{r+1} \neq 0$ である。

(∵ $v'_{r+1} = 0$ とすると、v_{r+1} が $v_1, \cdots, v_r$ の1次結合で表されるので $\{v_1, \cdots, v_n\}$ が V の基であることに反する)

そこで

$$u_{r+1} = v'_{r+1} / \|v'_{r+1}\|$$

とおくと $(u_{r+1}, u_i) = 0$ $(1 \leq i \leq r)$ で $\|u_{r+1}\| = 1$ であり、

$$\langle u_1, \cdots, u_r, u_{r+1} \rangle = \langle u_1, \cdots, u_r, v_{r+1} \rangle$$

(u_{r+1} は $u_1, \cdots, u_r$ と v_{r+1} の1次結合で表せるので)

$$= \langle v_1, \cdots, v_r, v_{r+1} \rangle$$

($v_1, \cdots, v_r$ はすべて $u_1, \cdots, u_r$ の1次結合で表せるので)

④ 上の操作を続ければ求める正規直交基 $\{u_1, \cdots, u_n\}$ を得る

□

例題6.2.1 (シュミットの直交化法) シュミットの直交化を用いて、$\mathbb{R}^3$ の次の基を正規直交化せよ。

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(解) ① $\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0} = \sqrt{2}$

$$\therefore \mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 / \|\mathbf{v}_1\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

② $\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1$ $\qquad (\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+3+0) = \frac{4}{\sqrt{2}}$

$$= \begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix} - \frac{4}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\therefore \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2' / \|\mathbf{v}_2'\| = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

③ $\mathbf{v}_3' = \mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 - (\mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2$ $\qquad (\mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2-1+0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\qquad (\mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-2-1+1) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

$$= \begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1/2\\1/2\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2/3\\2/3\\2/3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5/6\\-5/6\\10/6\end{bmatrix} = \frac{5}{6}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$$

$$\therefore \mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3' / \|\mathbf{v}_3'\| = \frac{1}{\cancel{\frac{5}{6}}\sqrt{1+1+4}}\cdot\cancel{\frac{5}{6}}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$$

以上より．求める正規直交基は．

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\quad \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix},\quad \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}.$$

□

定理6.2.2（内積の成分表示）V：内積空間，$\{u_1, \cdots, u_n\}$はVの正規直交基で $u = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n$, $v = b_1u_1 + \cdots + b_nu_n$とする．このとき．

$$(u, v) = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$$

（証明）$(u, v) = (a_1u_1 + \cdots + a_nu_n, b_1u_1 + \cdots + b_nu_n)$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ib_j(u_i, u_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ib_j\delta_{ij}$$

$$= a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \quad \square$$

定義6.2.3（直交変換）V：内積空間、TはVの線形変換とする．

Tが直交変換 $\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の$u, v \in V$に対して

$$(T(u), T(v)) = (u, v)$$

が成り立つ．

例13（直交変換）$\mathbb{R}^2$の線形変換 $T(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x$ は直交変換である．

（証明）$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$とおくと，$T(a) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$,

$T(b) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \end{bmatrix}$ なので

$$(T(a), T(b)) = a_2b_2 + a_1b_1 = a_1b_1 + a_2b_2 = (a, b) \quad \square$$

定理6.2.3（直交変換であるための条件）V：内積空間，$\{u_1, \cdots, u_n\}$はVの正規直交基，TはVの線形変換とする．

Tは直交変換 $\Leftrightarrow$ $\{T(u_1), \cdots, T(u_n)\}$は$V$の正規直交基．

（証明）（$\Rightarrow$）$(T(u_i), T(u_j)) = (u_i, u_j) = \delta_{ij}$　$(1 \leq i, j \leq n)$

Tは直交変換　$\{u_1, \cdots, u_n\}$は正規直交基．

ここで$\dim(V) = n$なので補足6.2.2より$\{T(u_1), \cdots, T(u_n)\}$は$V$の正規直交基．

（$\Leftarrow$）$u, v \in V$を$u = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n$, $v = b_1u_1 + \cdots + b_nu_n$と成分表示すると．

定理6.2.2より

$$(u, v) = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n.$$

一方．$T(u) = a_1T(u_1) + \cdots + a_nT(u_n)$, $T(v) = b_1T(u_1) + \cdots + b_nT(u_n)$で．仮定より

$\{T(u_1), \cdots, T(u_n)\}$は．正規直交基なので再び定理6.2.2より．

$$(T(u), T(v)) = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$$

以上より．$(T(u), T(v)) = (u, v)$　$\therefore$ Tは直交変換　□

定義6.2.4.（直交行列）P：n次実正方行列とする．

$$P\text{が直交行列} \underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} {}^tPP = E_n$$

補足6.2.5（直交行列の性質）Pは直交行列とする．

(1) Pは正則で$P^{-1} = {}^tP$

(2) $|P| = \pm 1$

(証明) 行列式の性質より

$$|{}^tPP| = |E_n| = 1$$
$$\shortparallel$$
$$|{}^tP|\cdot|P| = |P|^2$$

$\therefore |P| = \pm 1$. よって P は正則.

${}^tPP = E_n$ の両辺に右から P^{-1} を掛けると ${}^tP = P^{-1}$ □

例4 (直交行列) 次の行列は 2次の直交行列である.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

定理6.2.4. (行列によって定まる線形変換が直交変換となるための条件) A : n 次の実正方行列. $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は A によって定まる線形変換, すなわち $T_A(x) = Ax$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ とする. このとき

$$A \text{ が直交行列} \iff T_A \text{ が直交変換}$$

(証明) $A = [a_1, \cdots, a_n]$ と列ベクトル表示すると, $\mathbb{R}^n$ の標準基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ に対して

$T_A(e_1) = Ae_1 = a_1, \cdots, T_A(e_n) = Ae_n = a_n$. よって

$$T_A \text{ が直交変換} \underset{\text{定理6.2.3}}{\iff} \{a_1, \cdots, a_n\} \text{ が } \mathbb{R}^n \text{ の正規直交基}$$

$$\iff {}^ta_ia_j = (a_i, a_j) = \delta_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

ここで ${}^tAA$ の (i,j) 成分は ${}^t\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j$ なので

$\Leftrightarrow {}^tAA = E_n$

$\Leftrightarrow A$ は直交行列. □

定理6.2.5 (直交行列であるための条件) n次の実正方行列 A の列ベクトル表示を $A=[\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n]$ とすると.

A は直交行列 $\Leftrightarrow \{\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基.

(証明) 定理6.2.4の証明を見よ. □

例5 (直交行列であることの判定方法) 次の行列 P は直交行列である

$$P=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

(証明) $\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2=\begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$ とおくと

$(\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_j)=\delta_{ij}\ (1\leq i,j\leq 3)$ となる. よって $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基.

ゆえに P は直交行列 □

6.3 対称行列の対角化

定義6.3.1（複素共役）複素数 $\alpha = a + bi$ $(i = \sqrt{-1})$ に対して

$\overline{\alpha} := a - bi$ ： α の複素共役

補足6.3.2.（複素共役の性質）α, β は複素数とする

(1) α が実数 $\Leftrightarrow$ $\overline{\alpha} = \alpha$

(2) $\overline{\alpha \pm \beta} = \overline{\alpha} \pm \overline{\beta}$, $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}$, $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$ $(\beta \neq 0)$

定義6.3.3（複素共役行列）複素行列 $A = [\alpha_{ij}]$ に対して

$\overline{A} := [\overline{\alpha_{ij}}]$ ： A の複素共役行列

補足6.3.4（複素共役行列の性質）A, B は複素行列とする.

(1) A が実行列 $\Leftrightarrow$ $\overline{A} = A$

(2) $\overline{A \pm B} = \overline{A} \pm \overline{B}$, $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$

定義6.3.5（対称行列）A は正方行列とする.

A が対称行列 $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ ${}^tA = A$.

定理6.3.1（実対称行列の固有値）実対称行列の固有値はすべて実数.

（証明）実対称行列 A の固有値を λ とすると

$$A x = \lambda x$$

となる n 項列ベクトル $x \in \mathbb{C}^n$ $(x \neq 0)$ が存在する．上式の両辺の複素共役をとると：

$$\overline{\lambda} \overline{x} = \overline{\lambda x} = \overline{A x} = \overline{A} \overline{x} \underset{\uparrow}{=} A \overline{x}$$

A は実行列

よって

$$(*) \quad \overline{\lambda}\, {}^t\overline{x} x = {}^t(\overline{\lambda} \overline{x}) x = {}^t(A \overline{x}) x = {}^t\overline{x}\, {}^tA x \underset{\uparrow}{=} {}^t\overline{x} A x = {}^t\overline{x}(\lambda x) = \lambda\, {}^t\overline{x} x$$

A は対称行列

ここで $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ と ~~成分表示~~ すると．

$${}^t\overline{x} x = [\overline{x_1} \cdots \overline{x_n}] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \overline{x_1} x_1 + \cdots + \overline{x_n} x_n = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 \neq 0.$$

(*) の両辺を ${}^t\overline{x} x \neq 0$ で割ると．$\overline{\lambda} = \lambda$ ∴ λ は実数 □

例1（実対称行列の固有値はすべて実数）$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ の固有値はすべて実数

（解）${}^tA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = A$ ∴ A は実対称行列．

A の固有多項式は $g_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -2 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^2 - 4$

$= t^2 - 2t + 1 - 4 = t^2 - 2t - 3 = (t-3)(t+1)$

∴ A の固有値 $\lambda = -1, 3$ よって すべて実数 □

定義6.3.6（上三角行列）$A=[a_{ij}]$を正方行列とする

Aが上三角行列 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $a_{ij}=0 \ (i>j)$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ O & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

定義6.3.7（行列の上三角化）Aを正方行列とする.

Aを上三角化する. $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $P^{-1}AP$が上三角行列となる正則行列Pを求める.

定理6.3.3（直交行列により上三角化できるための条件）n次実対称行列Aの固有値がすべて実数ならば, Aは直交行列を用いて上三角化できる. すなわち.

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{bmatrix}$$ $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$は$A$の固有値

となる直交行列Pが存在する. 直交行列Pは$\det(P)=1$を満たすように取ることができる.

（証明）nについて帰納法で示す. $n=1$のときは明らか. $n>1$とし, $n-1$次までの行列について定理の主張が成り立つとする.

λ_1をAの固有値, p_1をλ_1に属するAの固有ベクトルで$\|p_1\|=1$を満たすものとする

q_1 を含む正規直交基を $\{q_1, \cdots, q_n\}$ とし、$Q = [q_1, \cdots, q_n]$ とおくと、定理6.2.5 より Q は直交行列となる。このとき

- $$Q^{-1}AQ = \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & * & * & * \\ \hline & & & \\ 0 & & B & \\ & & & \end{array}\right]$$ (B は $n-1$ 次正方行列)

∵) Q は直交行列なので $Q^{-1} = {}^tQ = \begin{bmatrix} {}^tq_1 \\ \vdots \\ {}^tq_n \end{bmatrix}$.

$$\therefore\ Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} {}^tq_1 \\ {}^tq_2 \\ \vdots \\ {}^tq_n \end{bmatrix} A\,[q_1, q_2, \cdots, q_n]$$

q_1 は λ_1 に属する A の固有ベクトル

$$= \begin{bmatrix} {}^tq_1 \\ {}^tq_2 \\ \vdots \\ {}^tq_n \end{bmatrix} [\overset{\lambda_1 q_1}{\overset{\|}{Aq_1}}, Aq_2, \cdots, Aq_n]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} {}^tq_1(\lambda_1 q_1) & \overbrace{{}^tq_1 A q_2 \ \cdots\cdots\ {}^tq_1 A q_n}^{*} \\ \hline {}^tq_2(\lambda_1 q_1) & {}^tq_2 A q_2 \ \cdots\cdots\ {}^tq_2 A q_n \\ \vdots & \\ {}^tq_n(\lambda_1 q_1) & \underbrace{{}^tq_n A q_2 \ \cdots\cdots\ {}^tq_n A q_n}_{B} \end{array}\right]$$

ここで

$$\begin{cases} {}^tq_1(\lambda_1 q_1) = \lambda_1 {}^tq_1 q_1 = \lambda_1 (q_1, q_1) = \lambda_1 \\ {}^tq_2(\lambda_1 q_1) = \lambda_1 {}^tq_2 q_1 = \lambda_1 (q_2, q_1) = 0 \\ \vdots \\ {}^tq_n(\lambda_1 q_1) = \lambda_1 {}^tq_n q_1 = \lambda_1 (q_n, q_1) = 0 \end{cases}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right] \quad ※$$

- $g_A(t) = (t-\lambda_1)\, g_B(t)$ なので B の固有値は $\lambda_2, \cdots, \lambda_n$ ですべて実数

∵)

行列式の性質

$$g_A(t) = |tE - A| = \left|\begin{array}{c|c} t-\lambda_1 & ** \\ \hline 0 & \\ \vdots & tE-B \\ 0 & \end{array}\right| = (t-\lambda_1)\,|tE-B|$$

$$= (t-\lambda_1)\, g_B(t).$$

仮定より，$g_A(t)=0$ の解は $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ ですべて実数なので $g_B(t)=0$ の解は $\lambda_2, \cdots, \lambda_n$ ですべて実数となる。

以上より，帰納法の仮定により

$$R^{-1}BR = \begin{bmatrix} \lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

となる $(n-1)$ 次直交行列 R が存在する。ここで

$$P = Q \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R \end{array}\right]$$

とおくと

- P は直交行列

$\therefore)\ {}^tP = \left[\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & {}^tR \end{array}\right] {}^tQ$ となるので

$${}^tPP = \left[\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & {}^tR \end{array}\right] \underbrace{{}^tQQ}_{E} \left[\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & R \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & {}^tR \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & R \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & {}^tRR \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & E_{n-1} \end{array}\right] = E_n \quad \therefore P\text{は直交行列}$$

//

よって行列の長方形分割を用いて計算を続けると、

$$P^{-1}AP = \left[\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & R^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline O & B \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & R \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline O & R^{-1}BR \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & & * & \\ \hline & \lambda_2 & & * \\ O & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{array}\right]$$

最後に、Pは直交行列なので $|P| = \pm 1$. $|P| = -1$ の場合は、上の議論で $\boldsymbol{q}_1$ を $-\boldsymbol{q}_1$ と取り換えると、定理3.3.3より、$|P| = 1$ となる。$-\boldsymbol{q}_1$ は λ_1 に属する Aの固有ベクトルで $\|-\boldsymbol{q}_1\| = 1$ なので、上述の議論がそのまま成立する。 □

<u>例題6.3.1</u>（実正方行列の上三角化）次の行列 A の固有値はすべて実数であることを確かめ、直交行列を用いて上三角化せよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

(解) 方法1 (上三角行列化を繰り返す).

① Aの固有値を求める.

$$g_A(t)=|tE-A|=\begin{vmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ -2 & t-3 & -4 \\ 2 & 2 & t+3 \end{vmatrix}=(t-1)^2(t+1)=0$$

∴ Aの固有値は λ=1, −1 ですべて実数. (よって直交行列を用いて上三角化できる)

② $W(1;A)$を求める

$$W(1;A)=\left\{c_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix} : c_1, c_2\in\mathbb{R}\right\}$$

③ $W(1;A)$の零でないベクトルを1つ取り, それを含む$\mathbb{R}^3$の基を一組とる.

例えば $\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ をとる.

④ 上の基をシュミットの直交化法で正規直交化する.

$$\left\{\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

⑤ $Q=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ とおくと, Qは直交行列で $Q^{-1}={}^tQ$ なので $Q^{-1}AQ$

を計算して

$$Q^{-1}AQ = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 2\sqrt{2} \\ \hline 0 & 3 & 2\sqrt{2} \\ 0 & -2\sqrt{2} & -3 \end{array}\right].$$

← まだ上三角化されていない!

⑥ $B = \begin{bmatrix} 3 & 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & -3 \end{bmatrix}$ とおく.

⑦ Bの固有値を求める

$$g_B(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-3 & -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & t+3 \end{vmatrix} = t^2 - 1$$

∴ Bの固有値は. $\lambda = 1, -1$

⑧ $W(1;B)$ を求める

$$W(1;B) = \left\{ c\begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\}$$

⑨ $W(1;B)$ の零でないベクトルを含む $\mathbb{R}^2$ の基を一組取る.

例えば $\left\{ \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ をとる.

⑩ 上の基を正規直交化する.

$$\left\{ \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{bmatrix} \right\}.$$

⑪ $R = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{bmatrix}$ とおくと Rは直交行列.

⑫ $P = Q\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{R}} \\ 0 & & \end{array}\right]$ とおいて計算すると. $P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$

⑬ Pは直交行列なので $P^{-1} = {}^tP$ に注意して $P^{-1}AP$ を計算すると,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 1 & -4\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{上三角化完了!}$$

方法2 (固有ベクトルだけから成る基が得られる場合)

① Aの固有値を求める

$g_A(t) = (t-1)^2(t+1)$ なので Aの固有値は $\lambda = 1, -1$.

② 各固有空間を求める

$$W(1; A) = \left\{ c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W(-1; A) = \left\{ c \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\}$$

③ $W(1;A)$ の基と $W(-1;A)$ の基を合せたものが $\mathbb{R}^3$ の基であることを確認.

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ は } \mathbb{R}^3 \text{ の基である.}$$

④ 上の基を正規直交化する.

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix} \right\}.$$

⑤ $P=\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$ とおく.

⑥ Pは直交行列なので $P^{-1}=P^{t}$ に注意して $P^{-1}AP$ を計算すると

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 1 & -4\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

□

注意6.3.8. 固有ベクトルだけからなる $\mathbb{R}^n$ の基が得られないときは, 方法2のように1回で上三角化できるとは限らない. そのときは, 方法1のように, 行列の一部を次々に上三角化する作業を繰り返さねばならない.

定理6.3.3 (実対称行列の直交行列による対角化) 実対称行列は直交行列を用いて常に対角化できる. すなわち, n次実対称行列Aの固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とすると,

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

となる直交行列Pが存在する. しかも Pは $\det(P)=1$ を満たすようにとることができる.

(証明) 定理6.3.1より, 実対称行列の固有値はすべて実数なので, 定理6.3.2より,

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

となる直交行列 P で $|P|=1$ となるものが存在する。このとき、

$${}^t(P^{-1}AP) = {}^tP\,{}^tA\,{}^t(P^{-1}) = P^{-1}A\,\underbrace{{}^t({}^tP)}_{P} = P^{-1}AP$$

よって、$P^{-1}AP$ は対称行列なので $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{bmatrix}$ となる

□

補足6.3.9（実対称行列の固有空間の直交性） A：n 次の実対称行列とする。$u, v \in \mathbb{R}^n$ をそれぞれ A の固有値 λ, μ に属する固有ベクトルとする。このとき $\lambda \neq \mu$ ならば u と v は直交する。

（証明） $Au=\lambda u$, $Av=\mu v$, ${}^tA=A$ より

$$\lambda(u,v) = (\lambda u, v) = (Au, v) = (u, {}^tAv) = (u, Av) = (u, \mu v) = \mu(u,v)$$

$$\therefore (\lambda-\mu)(u,v)=0$$

$\lambda \neq \mu$ なので $(u,v)=0$ $\therefore$ u と v は直交 □

例題6.3.2（実対称行列の直交行列による対角化）

実対称行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ を直交行列を用いて対角化せよ。

（解） ① A の固有値を求める。

$g_A(t) = |tE-A| = (t-2)^2(t+4) = 0$ なので A の固有値は $\lambda = 2, -4$.

② 各固有空間を求める.

$$W(2;A)=\left\{c_1\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} : c_1,c_2\in\mathbb{R}\right\}$$

$$W(-4;A)=\left\{c\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} : c\in\mathbb{R}\right\}$$

③ $W(2;A)$の一組の基 $\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ を正規直交化する

$$\left\{\begin{bmatrix}2/\sqrt{5}\\1/\sqrt{5}\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1/\sqrt{30}\\2/\sqrt{30}\\5/\sqrt{30}\end{bmatrix}\right\}.$$

④ $W(-4;A)$の一組の基 $\left\{\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\right\}$ を正規直交化する.

$$\left\{\begin{bmatrix}1/\sqrt{6}\\-2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\end{bmatrix}\right\}.$$

⑤ 補足6.3.9より. $W(2;A)$の各ベクトルと $W(-4;A)$の各ベクトルは直交するので

$$\left\{\begin{bmatrix}2/\sqrt{5}\\1/\sqrt{5}\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1/\sqrt{30}\\2/\sqrt{30}\\5/\sqrt{30}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1/\sqrt{6}\\-2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\end{bmatrix}\right\}$$

は$\mathbb{R}^3$の正規直交基となる.

⑥ $P=\begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & -2/\sqrt{6} \\ 0 & 5/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$ は直交行列で $P^{-1}={}^{t}P$ に注意して $P^{-1}AP$ を

計算すると $P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ となる

D