平成28年度線形代数学試験問題（河邊担当）

平成28年8月3日 3時限 (13:00–14:30)

[1] 次の集合 W はベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間かどうか調べよ．

(1) $W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{r} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{array} \right\}$

(2) $W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{r} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{array} \right\}$

[2] ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の5つのベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

について次の問いに答えよ．

(1) 1次独立な最大個数 r を求めよ．

(2) r 個の1次独立なベクトルを前の方から順に求めよ．

(3) 他のベクトルを (2) で求めた1次独立なベクトルの1次結合で表せ．

[3] ベクトル空間

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{r} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

の次元と1組の基を求めよ．

[4] ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の線形変換 $T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$ に対して，基 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ に関する表現行列 B を求めよ．

[5] 行列 $A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ が対角化可能かどうか調べ，対角化可能であれば，A を対角化する正則行列 P を求め，対角化せよ．

[6] ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の基

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

をシュミットの方法で正規直交化せよ．

平成28年度 線形代数学試験の解答

$\boxed{1}$ (1) $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \in W$, $a \in \mathbb{R}$ とする. このとき.

$x + y = \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{bmatrix}$, $ax = \begin{bmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ ax_3 \end{bmatrix}$. また. $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in W$ は明らか. また

$$\begin{cases} (x_1+y_1)+(x_2+y_2)-(x_3+y_3) = (x_1+x_2-x_3)+(y_1+y_2-y_3) = 0 \\ 3(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+2(x_3+y_3) = (3x_1+x_2+2x_3)+(3y_1+y_2+2y_3) = 0 \end{cases}$$

ゆえに. $x+y \in W$. また

$$\begin{cases} ax_1+ax_2-ax_3 = a(x_1+x_2-x_3) = 0 \\ 3ax_1+ax_2+2ax_3 = a(3x_1+x_2+2x_3) = 0 \end{cases}$$

よって. $ax \in W$. 以上より. W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間.

(2) $0 \notin W$. ゆえに. W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間でない.

$\boxed{2}$

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 10 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 8 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 10 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 8 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{③-4\times① \\ ④-3\times①}]{②-2\times①} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[④-②]{③-2\times②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{③\times(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[②+③]{①-③} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

よって. b_1, b_2, b_4 は1次独立で.

$b_3 = 3b_1 - b_2$, $b_5 = -b_1 + 2b_2 + b_4$.

以上より.

(1) $r=3$
(2) a_1, a_2, a_4
(3) $a_3 = 3a_1 - a_2$, $a_5 = -a_1 + 2a_2 + a_4$ $\Bigg\}$ … (答)

$\boxed{3}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{② - 3\times ①} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{② \times (-\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -5/2 & 2 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{① - ②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & 1 & -5/2 & 2 \end{bmatrix}$ $\therefore \begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - \frac{5}{2}x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

$x_3 = s$, $x_4 = t$ とおくと. $\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}s + t \\ x_2 = \frac{5}{2}s - 2t \end{cases}$ $\therefore x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}s + t \\ \frac{5}{2}s - 2t \\ s \\ t \end{bmatrix}$

$= s \begin{bmatrix} -3/2 \\ 5/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s}{2} \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

ゆえに. $W = \left\langle \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$. 以上より. $\dim W = 2$ で, 1組の

基底は $\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. … (答)

4 ① 基の変換行列Pを求める.

$$u_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=e_1+e_2,\quad u_2=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}=2e_1+e_2+e_3,\quad u_3=\begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix}=3e_1+e_2+e_3.$$

よって.

$$(u_1,u_2,u_3)=(e_1+e_2,\ 2e_1+e_2+e_3,\ 3e_1+e_2+e_3)$$

$$=(e_1,e_2,e_3)\begin{bmatrix}1&2&3\\1&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\quad \therefore P=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$$

② P^{-1}を求める.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{②-①}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-1&-2&-1&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{②\times(-1)}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&2&1&-1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[③-②]{①-2\times②}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&-1&2&0\\0&1&2&1&-1&0\\0&0&-1&-1&1&1\end{array}\right]\xrightarrow{③\times(-1)}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&-1&2&0\\0&1&2&1&-1&0\\0&0&1&1&-1&-1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[②-2\times③]{①+③}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&-1\\0&1&0&-1&1&2\\0&0&1&1&-1&-1\end{array}\right]\quad \therefore P^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\-1&1&2\\1&-1&-1\end{bmatrix}$$

③ 表現行列Bを求める.

$$B=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&1&-1\\-1&1&2\\1&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&1\\-1&-3&1\\2&5&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\1&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\-1&1&2\\1&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&5&7\\-4&-4&-5\\7&11&13\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-11&-15&-18\\8&13&14\\-1&-2&-1\end{bmatrix}\cdots(答)$$

5 ① Aの固有値: $g_A(t) = |tE-A| = \begin{vmatrix} t+3 & 2 & 2 \\ -4 & t-3 & -2 \\ -8 & -4 & t-5 \end{vmatrix}$

$= (t+3)(t-3)(t-5)+32+32-\{-16(t-3)+8(t+3)-8(t-5)\}$

$= (t+3)(t-3)(t-5)+16(t-3) = (t-3)(t-1)^2 \quad \therefore t=3,1$ (2重根)

② 固有空間を求める.

・ $\underline{\lambda=3}$: $3E-A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \\ -8 & -4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{②\times(-1/4) \\ ③\times(-1/8)}]{①\times 1/6} \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[③-①]{②-①} \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & -1/3 & 1/6 \\ 0 & 1/6 & -1/12 \end{bmatrix} \xrightarrow[③+②\times\frac{1}{2}]{①+②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{②\times(-3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \end{cases}$ $x_3 = t$ とおくと. $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t/2 \\ t/2 \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\therefore W(3; T_A) = \left\langle \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

・ $\underline{\lambda=1}$: $E-A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -4 & -2 & -2 \\ -8 & -4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[③+2\times①]{②+①} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\times\frac{1}{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0$. $x_2 = s$, $x_3 = t$ とおくと.

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore \overline{W}(1; T_A) = \left\langle \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

③ 対角化可能性の判定

$\dim \overline{W}(3; T_A) + \dim \overline{W}(1; T_A) = 1 + 2 = 3$. よって. Aは$\mathbb{R}$上対角化可能.

④ Pを求め、対角化

$$P = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{とおくと.} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \cdots (答)$$

$\boxed{6}$

$$b_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a_2' = a_2 - (a_2, b_1) b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}(1+1+0+0) \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore b_2 = \frac{a_2'}{\|a_2'\|} = \frac{1}{\cancel{\frac{1}{2}} \sqrt{1^2+1^2+(-1)^2+(-1)^2}} \cdot \cancel{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

NO. 6

DATE

$$\mathbf{a}_3' = \mathbf{a}_3 - (\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1)\mathbf{b}_1 - (\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2)\mathbf{b}_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}(1+0+0+1)\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\cancel{(1+0+0-1)}\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{a}_3'}{\|\mathbf{a}_3'\|} = \frac{1}{\cancel{\frac{1}{2}}\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2+1^2}}\cdot\cancel{\frac{1}{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_4' = \mathbf{a}_4 - (\mathbf{a}_4, \mathbf{b}_1)\mathbf{b}_1 - (\mathbf{a}_4, \mathbf{b}_2)\mathbf{b}_2 - (\mathbf{a}_4, \mathbf{b}_3)\mathbf{b}_3$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \mathbf{b}_4 = \frac{\mathbf{a}_4'}{\|\mathbf{a}_4'\|} = \frac{1}{\cancel{\frac{1}{4}}\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2+(-1)^2}}\cancel{\frac{1}{4}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$