

1 章 確率と確率分布

確率論: 自然現象や社会現象における不確実を記述するための数学的道具

- 古典的確率論: パスカル (1623–1662), フェルマ (1601–1665), ベルヌイ (1654–1705), ド・モアブル (1667–1754), ラプラス (1749–1827) などにより解析的, 組み合わせ論的に展開された確率論
- 測度論的確率論: 1933 年にコフモゴロフ (1903–1987) によって導入された確率の公理に基づき展開された確率論

以下では, 古典的確率論の基礎 と, その応用として, 初歩の 数理統計学 を学ぶ.

1.1 確率

1.1.1 確率とは

- **事象:** 偶然性に左右されて起こる現象
- **確率:** 事象が起こると期待される割合

確率の定め方

- **相対度数的定義:** 実験を N 回繰り返したとき, 事象 A が N_A 回起こったとすれば,

$$P(A) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A}{N}$$

と定義する. しかし, 実際には実験を無限回続けることは不可能なので, 十分大きな N に対して

$$P(A) := \frac{N_A}{N}$$

と定める.

例: 歪んだ硬貨を 1000 回投げて, 表が 200 回出たとすると, 表が出る事象 A の起こる確率を

$$P(A) = \frac{200}{1000} = 0.2$$

と定める.

- **算術的定義または組み合わせ論的定義:** 全体で N 個の場合があつて, それらは同様に確からしく起こると仮定する. 事象 A の起こる場合の数が N_A であるとき

$$P(A) := \frac{N_A}{N}$$

と定義する.

例: サイコロを投げたとき, 1 の目が出る事象 A の起こる確率を

$$P(A) = \frac{1 \text{ の目が出る場合の数}}{\text{すべての場合の数}} = \frac{1}{6}$$

と定める.

1.1.2 事象の表し方

- **試行**: 結果が偶然性に左右される実験
- **標本点**: 1つの試行において起こる分解不可能な結果. ω で表す.
- **標本空間**: すべての標本点からなる集合. Ω で表す.
- **事象**: 標本点からなる集合, i.e., Ω の部分集合. $A, B, C, \dots$ など表す.
- **事象が起こる**: 事象 A に属するどれか一つの標本点が起こるとき, A が起こるといふ.

事象の種類	集合としての意味	事象としての意味
全事象 Ω	すべての標本点からなる集合	必ず起こる事象
空事象 $\emptyset$	標本点を1つも含まない集合	絶対に起こらない事象
和事象 $A \cup B$	A と B の和集合, i.e., A と B に属する標本点を合わせて得られる集合	A, B の少なくとも一方が起こる事象
積事象 $A \cap B$	A と B の積集合, i.e., A と B のどちらにも属する標本点からなる集合	A, B が同時に起こる事象
余事象 A^c	A の補集合, i.e., A に属さない標本点からなる集合	A が起こらない事象

和事象 $A \cup B$

積事象 $A \cap B$

余事象 A^c

- 事象 A と B が互いに排反 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 2つの事象 A と B は同時には起こらない, i.e., $A \cap B = \emptyset$
- 包含関係「 $A \subset B$ 」は, 「事象 A が起これば必ず事象 B が起こる」ことを表す.

A と B は互いに排反

A が起これば必ず B が起こる

1.1.3 確率の基本的性質

確率の基本的性質 (実際には公理！)

- (I) 任意の事象 A に対して, $0 \leq P(A) \leq 1$.
 - (II) $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.
 - (III) 事象 A と B が互いに排反ならば, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- 上の3つの性質 (公理) から確率のもつすべての性質が導かれる！
- (IV) 加法定理: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
 - (V) 余事象の確率の公式: $P(A^c) = 1 - P(A)$.

例 (加法定理の応用): 世帯総数が 50 のある過疎の村で, ステレオのある世帯が 12, ビデオのある世帯が 8, 両方ともあるのが 3 世帯とする. 任意に選んだ世帯が, ステレオかビデオのいずれかを持っている確率を求めよ.

1.2 事象の独立性とベイズの定理

1.2.1 事象の独立性

- 2つの事象 A と B が**互いに独立** (文学的定義) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 事象 A と B の起こり方が互いに影響を与えない.
- 条件付き確率 (文学的定義)

$P(A|B) :=$ 仮に B が起こるとしたときに, A が起こる確率

この確率を, 条件 B のもとで, A の起こる**条件付き確率**という.

$P(B|A) :=$ 仮に A が起こるとしたときに, B が起こる確率

この確率を, 条件 A のもとで, B の起こる**条件付き確率**という.

例 (条件付き確率の意味): 生徒数 50 人のクラスで, 男子は 30 人, メガネ使用者は 18 人, 男子でメガネを使うのは 12 人である. 今, 出席簿からでたらめに 1 人抜き出し, その生徒が男子である事象を A , その生徒がメガネを使用している事象を B とする. このとき, $P(A)$, $P(A \cap B)$, $P(B|A)$, $P(A|B)$ を求めよ.

- 条件付き確率 (数学的定義)

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (P(B) \neq 0), \quad P(B|A) := \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (P(A) \neq 0)$$

すなわち, $P(A|B)$ は, 全空間を B に制限したときの A の起こる割合, $P(B|A)$ は, 全空間を A に制限したときの B の起こる割合を表す.

(VI) 乗法定理: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$

(VII) 独立性の判定条件: 以下は同値.

- (i) A と B は互いに独立 (文学的定義)
すなわち, A と B の起こり方が互いに影響を与えない.

(ii) $P(A|B) = P(A)$

すなわち、 B が起こると仮定してもしなくても、 A の起こる確率は変わらない。

(iii) $P(B|A) = P(B)$

すなわち、 A が起こると仮定してもしなくても、 B の起こる確率は変わらない。

(iv) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (数学的定義)

すなわち、 A と B が同時に起こる確率は、 A の起こる確率と B の起こる確率の積である。

例 (くじの順序は気にするな!): 白玉 m 個、黒玉 n 個入った壺から、 a 君と b 君が順に 1 個玉を取るとき、それぞれが白玉を取る確率を求めよ。ただし、取った玉は戻さないものとする (非復元抽出)。

1.2.2 ベイズの定理

条件付き確率は、原因 A と結果 B の因果関係の強さを表すと解釈する場合もある (条件付き確率の拡大解釈)。

- $P(B|A)$: 原因 A により結果が B となる確率
- $P(A|B)$: 結果が B であったとき、その結果を引き起こした原因が A である確率

(VIII) 全確率の定理: 事象 A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) が互いに排反、つまり $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$) であり、しかも $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ であるとき、任意の事象 B に対して

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)$$

が成り立つ。この定理は、結果が B となる確率を、それを引き起こす各原因 A_i の寄与の度合いに分解したと考えることができる。

(IX) ベイズの定理: 結果 B を引き起こす原因として $A_1, A_2, \dots, A_n$ が考えられ、これらはすべて互いに排反とする。もし、結果が B であったとき、その結果を引き起こした原因が A_i である確率 $P(A_i|B)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) は

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + \dots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)}$$

で与えられる。

例 (ベイズの定理の応用): a , b , c の 3 人がクッキーを持ち寄った。割合はそれぞれ 35%, 40%, 25% で、そのうち、8%, 5%, 3% の割れクッキーが含まれていた。さて、 d が試食しようと 1 個をつまみ上げたところ、割れクッキーであった。これを a が作った確率はいくらか。

関連 URL:

<http://www.shinshu-u.ac.jp/faculty/engineering/appl/NOW/kenkyu/kawabe/kawabe.htm>