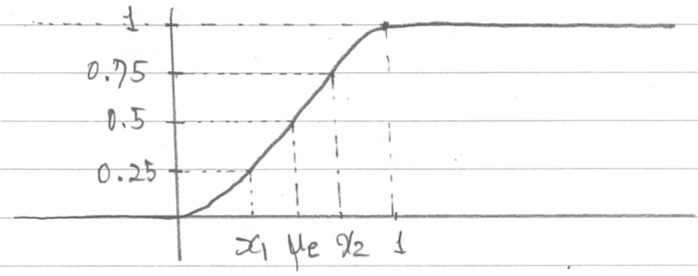
DATE　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　CHECK　　NO.

1章の演習問題

[1] (i) $F(x)=\begin{cases} 0 & (x<0) \\ 3x^2-2x^3 & (0\leqq x<1) \\ 1 & (x\geqq 1) \end{cases}$



図より x_1, μ_e, x_2 はすべて $[0,1)$ 内にある

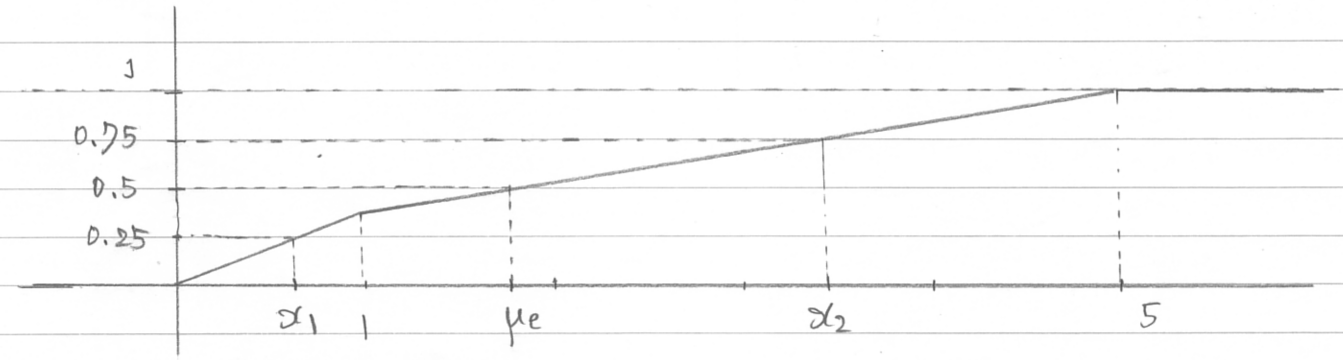
$F(\mu_e)=0.5 \quad \therefore 3\mu_e^2-2\mu_e^3=0.5 \quad \therefore \underline{\mu_e=0.5}$

$F(x_1)=0.25 \quad \therefore 3x_1^2-2x_1^3=0.25 \quad \therefore x_1 \fallingdotseq 0.326352$

$F(x_2)=0.75 \quad \therefore 3x_2^2-2x_2^3=0.75 \quad \therefore x_2 \fallingdotseq 0.673648$

$\therefore \delta = x_2-x_1 = 0.673648-0.326352 = \underline{0.347296}$

(ii) $F(x)=\begin{cases} 0 & (x<0) \\ x/3 & (0\leqq x<1) \\ (x+1)/6 & (1\leqq x<5) \\ 1 & (x\geqq 5) \end{cases}$

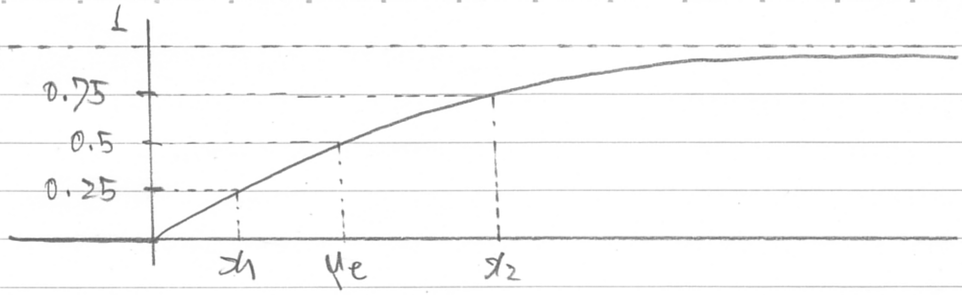


図より $F(\mu_e)=\dfrac{\mu_e+1}{6}=0.5 \quad \therefore \mu_e+1=3 \quad \therefore \underline{\mu_e=2}$

$F(x_1)=x_1/3=0.25 \quad \therefore x_1=0.75, \quad F(x_2)=(x_2+1)/6=0.75 \quad \therefore x_2+1=4.5 \quad \therefore x_2=3.5$

$\therefore \delta = x_2-x_1 = 3.5-0.75 = \underline{2.75}$

(iii) $F(x)=\begin{cases} 0 & (x<0) \\ 1-e^{-\lambda x_1} & (x\geqq 0) \end{cases}$



図より

$F(\mu_e) = 1 - e^{-\lambda\mu_e} = 0.5 \quad \therefore e^{-\lambda\cdot\mu_e} = \frac{1}{2} \quad \therefore -\lambda\cdot\mu_e = -\log 2 \quad \therefore \mu_e = \frac{1}{\lambda}\log 2$

$F(x_1) = 1 - e^{-\lambda x_1} = 0.25 = \frac{1}{4} \quad \therefore e^{-\lambda x_1} = \frac{3}{4} \quad \therefore -\lambda x_1 = \log 3 - \log 4 \quad \therefore x_1 = \frac{1}{\lambda}\log 4 - \frac{1}{\lambda}\log 3$

$F(x_2) = 1 - e^{-\lambda x_2} = 0.75 = \frac{3}{4} \quad \therefore e^{-\lambda x_2} = \frac{1}{4} \quad \therefore -\lambda x_2 = -\log 4 \quad \therefore x_2 = \frac{1}{\lambda}\log 4$

$\therefore \delta = x_2 - x_1 = \frac{1}{\lambda}\log 4 - \frac{1}{\lambda}\log 4 + \frac{1}{\lambda}\log 3 = \frac{1}{\lambda}\log 3$

$\boxed{2}$ $E(X_i) = \mu,\ V(X_i) = \sigma^2\ (i=1,2,\cdots,n)$ である.

$\therefore E(X_1 + \cdots + X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = \mu + \cdots + \mu = n\mu$

また $X_1, \cdots, X_n$ は互いに独立なので

$V(X_1 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n) = \sigma^2 + \cdots + \sigma^2 = n\sigma^2$

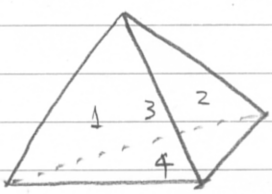
$\boxed{3}$ X_i = i番目のクッキーの重量 $(i=1,2,\cdots,20)$ とすると題意より, $E(X_i) = 18.4$, $V(X_i) = 0.3^2\ (i=1,2,\cdots,20)$ であり, $X_1, \cdots, X_n$ は互いに独立である. そこで

$Y = X_1 + \cdots + X_{20} + 1.2$ とおくと

$E(Y) = E(X_1 + \cdots + X_{20}) + 1.2 = 20 \times 18.4 + 1.2 = 369.2$

$V(Y) = V(X_1 + \cdots + X_{20}) = 20 \times 0.3^2 = 1.8 \quad \therefore \sigma = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{1.8} \fallingdotseq 1.34$

$\boxed{4}$



(i) 1から4までの数字はどれも同様に確からしく出現すると考えられるので

Xの値	1	2	3	4	計
出現確率	1/4	1/4	1/4	1/4	1

(ii) Yのとりうる値は 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. 例えば $Y=3$ となるのは、出る目が $(1,2),(2,1)$ の2通り。全部の目の出方は $4\times4=16$ 通りなので、$Y=3$ となる確率は $2/16$。他も同様にして下表が得られる

Yの値	2	3	4	5	6	7	8	計
出現確率	1/16	2/16	3/16	4/16	3/16	2/16	1/16	1

(iii) $E(Y)=2\times\frac{1}{16}+3\times\frac{2}{16}+4\times\frac{3}{16}+5\times\frac{4}{16}+6\times\frac{3}{16}+7\times\frac{2}{16}+8\times\frac{1}{16}=\frac{80}{16}=5$

$V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2$

$=4\times\frac{1}{16}+9\times\frac{2}{16}+16\times\frac{3}{16}+25\times\frac{4}{16}+36\times\frac{3}{16}+49\times\frac{2}{16}+64\times\frac{1}{16}-25$

$=\frac{440}{16}-25=27.5-25=2.5$

$\boxed{5}$ (i)

Xの値	−1	0	1	計
出現確率	7/20	7/20	6/20	1

(ii)

Yの値	0	1	計
出現確率	12/20	8/20	1

(iii) $P(X=-1,Y=0)=\frac{3}{20}$、一方、$P(X=-1)\cdot P(Y=0)=\frac{7}{20}\times\frac{12}{20}\neq\frac{3}{20}$

$\therefore P(X=-1,Y=0)\neq P(X=-1)\cdot P(Y=0)$ ∴ XとYは独立でない。

(iv) $E(X)=-1\times\frac{7}{20}+0\times\frac{7}{20}+1\times\frac{6}{20}=-\frac{1}{20}$, $E(Y)=0\times\frac{12}{20}+1\times\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=1\times\frac{7}{20}+0\times\frac{7}{20}+1\times\frac{6}{20}-\frac{1}{400}=\frac{13}{20}-\frac{1}{400}=\frac{259}{400}$

$\therefore \sigma(X)=\frac{\sqrt{259}}{20}$

$V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2=0\times\frac{12}{20}+1\times\frac{8}{20}-\frac{4}{25}=\frac{8}{20}-\frac{4}{25}=\frac{40-16}{100}=\frac{24}{100}$

$\therefore \sigma(Y)=\frac{\sqrt{24}}{10}$

$\therefore \sigma(X,Y)=(-1)\times1\times\frac{4}{20}+1\times1\times\frac{1}{20}-\left(-\frac{1}{20}\right)\times\frac{2}{5}=-\frac{3}{20}+\frac{1}{50}=\frac{-15+2}{100}=-\frac{13}{100}$

$=-0.13$

DATE . . . . NO.

CHECK

$$\rho(X,Y)=\frac{-0.13}{\frac{\sqrt{259}}{20}\times\frac{\sqrt{24}}{10}}=-\frac{0.13}{\frac{\sqrt{6216}}{200}}=-0.13\times200\times\frac{1}{\sqrt{6216}}=-\frac{26}{\sqrt{6216}}$$

$$\fallingdotseq -0.33$$

[6]

Xの値	1	2	3	計
出現確率	4/24	8/24	12/24	1

Yの値	−1	0	計
出現確率	6/24	18/24	1

すべての $i=1,2,3$; $j=-1,0$ に対して $P(X=i, Y=j)=P(X=i)\cdot P(Y=j)$ となるので
X と Y は独立である。

[7] X_i = i 番目の製品の重量 $(i=1,2,\cdots,12)$ とすると $X_i \sim N(50.0, 0.8^2)$.
Y = 箱の重量とすると $Y\sim N(35, 0.5^2)$.
ここで $U=X_1+\cdots+X_{12}+Y$ と書くと $X_1,\cdots,X_{12}, Y$ は互いに独立であると考えられるので
正規分布の再生性より,
$$U\sim N(12\times50.0+35,\ 12\times0.8^2+0.5^2)=N(635, 7.93)\fallingdotseq N(635, 2.8^2)$$
よって箱詰めの重量は平均635g, 標準偏差2.8gの正規分布となる。

[8] (i) $1=\int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx=\int_0^{\frac{1}{a}}(1-ax)dx=\left[x-\frac{a}{2}x^2\right]_0^{\frac{1}{a}}=\frac{1}{a}-\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{a^2}=\frac{1}{2a}$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

(ii) $x<0$ の場合: $F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(u)du=\int_{-\infty}^{x}0\,du=0$

$0\leqq x\leqq 2$ の場合: $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\left(1-\frac{u}{2}\right)du=\left[u-\frac{u^2}{4}\right]_0^x=x-\frac{x^2}{4}$

$x>2$ の場合: $F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(u)du=\int_{-\infty}^{2}p(u)du+\int_{2}^{\infty}p(u)du=F(2)+0=1$

$$\therefore F(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ x-\frac{x^2}{4} & (0\leqq x\leqq 2)\\ 1 & (x>2)\end{cases}$$

(iii) $P\left(\frac{1}{4}\leqq X<\frac{1}{2}\right)=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{2}\right)dx=\left[x-\frac{x^2}{4}\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}=\frac{13}{64}$

(iv) 題意より x は $0\leqq x\leqq 2$ である。

$\therefore P(X \leqq x) = \int_0^x \left(1 - \frac{u}{2}\right) du = \left[u - \frac{u^2}{4}\right]_0^x = x - \frac{x^2}{4} = \frac{1}{4}$

$\therefore 4x - x^2 = 1$　$\therefore x^2 - 4x + 1 = 0$　$\therefore x = 2 \pm \sqrt{3}$　$x = 2+\sqrt{3}$ は不適　$\therefore x = 2 - \sqrt{3}$

$\boxed{9}$ X=100枚のコインを床にばらまいたときの表の枚数

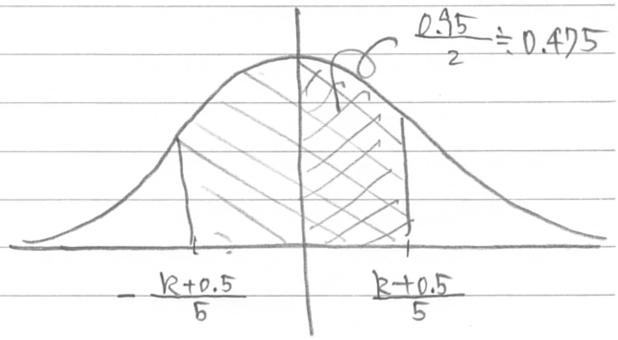
題意より $X \sim B(100, 1/2)$　$\therefore E(X) = 100 \times \frac{1}{2} = 50$, $V(X) = 100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 25$

二項分布の正規近似を用いると:

$P(50-k \leqq X \leqq 50+k) \fallingdotseq P(50-k-0.5 \leqq X \leqq 50+k+0.5)_{N(50,25)}$

$= P(49.5-k \leqq X \leqq 50.5+k) \fallingdotseq P\left(\frac{49.5-k-50}{5} \leqq Z \leqq \frac{50.5+k-50}{5}\right)_{N(0,1)}$

$= P\left(-\frac{k+0.5}{5} \leqq Z \leqq \frac{k+0.5}{5}\right)_{N(0,1)} \geqq 0.95$



正規分布表より $\frac{k+0.5}{5} = 1.96$　$\therefore k = 9.3$

題意より $k = 10$

チェビシェフの不等式を用いると: $\forall m(>1)$に対して

$P(|X-50| \geqq 5m) \leqq \frac{1}{m^2}$　$\therefore P(|X-50| \leqq 5m) \geqq 1 - 1/m^2$

$5m = k$と置くと $m = k/5$　$\therefore P(|X-50| \leqq k) \geqq 1 - \frac{5^2}{k^2} \geqq 0.95$

$\therefore 5^2/k^2 \leqq 0.05$　$\therefore k^2 \geqq \frac{5^2}{0.05}$　$\therefore k \geqq 5/\sqrt{0.05} \fallingdotseq 22.36$　$\therefore k = 23$

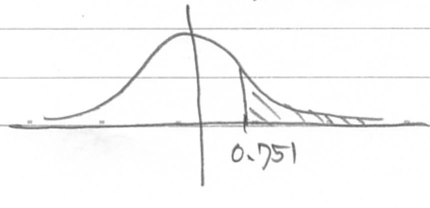
$\boxed{10}$ X=サイコロを100回投げるときの1の目の出る回数.

(i) $X \sim B(100, 1/6)$

(ii) 二項分布の正規近似を用いると: $np = 100 \times \frac{1}{6} \fallingdotseq 16.7$, $npq \fallingdotseq 13.89$

$\therefore P(X \geqq 20) \fallingdotseq P(X \geqq 20)_{N(16.7,13.89)} = P\left(Z \geqq \frac{20-16.7}{\sqrt{13.89}}\right)_{N(0,1)}$

$= P\left(Z \geqq \frac{3.3}{3.73}\right) = P(Z \geqq 0.88) = 0.5 - \Phi(0.88) = 0.5 - 0.3106 = 0.189$

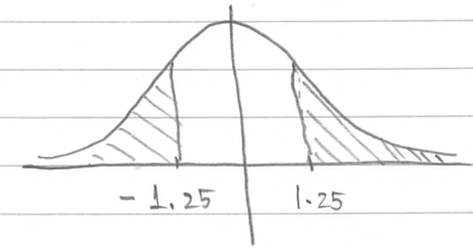


11 $X \sim N(60, 8^2)$ (a) $P(X<50) = P\left(Z < \dfrac{50-60}{8}\right) = P(Z < -1.25)$

$= 0.5 - \Phi(1.25) = 0.5 - 0.3944 = 0.1056$

(b) $P(X>70) = P\left(Z > \dfrac{70-60}{8}\right) = P(Z > 1.25)$

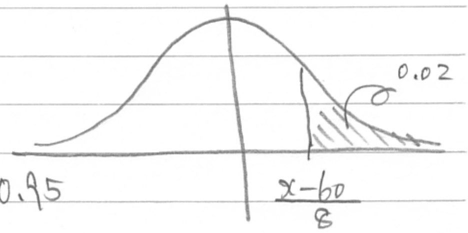
$= 0.5 - \Phi(1.25) = 0.1056$



(c) $P(X>x) = P\left(Z > \dfrac{x-60}{8}\right) = 0.02$

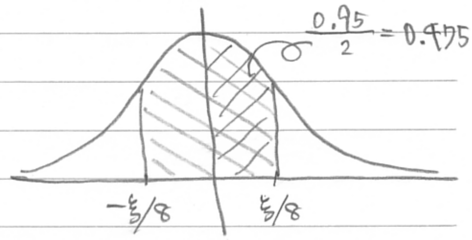
$\therefore \Phi\left(\dfrac{x-60}{8}\right) = 0.5 - 0.02 = 0.48$

$\therefore \dfrac{x-60}{8} = 2.0537 \quad \therefore x = \underline{76.4296}$



(d) $P(|X-60| < \xi) = P\left(\dfrac{|X-60|}{8} < \dfrac{\xi}{8}\right) = P\left(|Z| < \dfrac{\xi}{8}\right) = 0.95$

$\dfrac{\xi}{8} = 1.96 \quad \therefore \xi = \underline{15.68}$

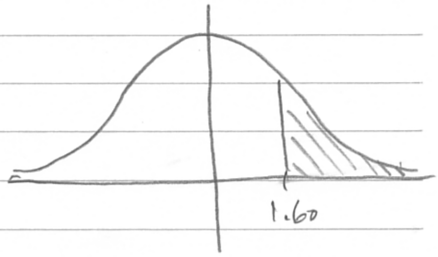


12 X = 500個の中の不良品の個数.
題意より $X \sim B(500, 0.02)$

$\therefore np = 500 \times 0.02 = 10, \quad npq = 500 \times 0.02 \times 0.98 = 9.8$

(a) $P(X \geqq 15) = P\left(Z \geqq \dfrac{15-10}{\sqrt{9.8}}\right) = P\left(Z \geqq \dfrac{5}{3.13}\right) = P(Z \geqq 1.60)$

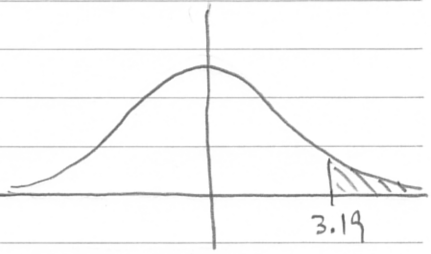
$= 0.5 - \Phi(1.60) = 0.5 - 0.4452 = \underline{0.0548}$



(b) $500 \times 0.04 = 20 \quad \therefore P(X \geqq 20) = P\left(Z \geqq \dfrac{20-10}{\sqrt{9.8}}\right)$

$= P\left(Z \geqq \dfrac{10}{3.13}\right) = P(Z \geqq 3.19) = 0.5 - \Phi(3.19)$

$= 0.5 - 0.4993 = \underline{0.0007}$

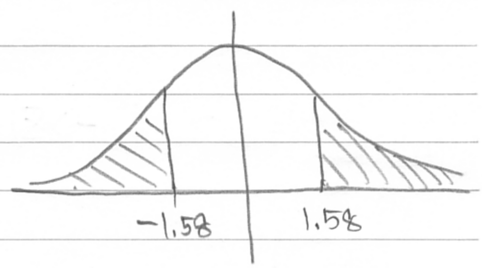


13 X = 100Ω規格の抵抗器の抵抗(Ω),
Y = 50Ω規格の抵抗器の抵抗(Ω)とすると題意より
$X \sim N(100, 3^2)$, $Y \sim N(50, 1^2)$ で XとYは互いに独立
よって $W = X + Y \sim N(100+50, 3^2+1^2) = N(150, 10)$

$\therefore P(W < 145) = P\left(Z < \dfrac{145-150}{\sqrt{10}}\right) = P\left(Z < -\dfrac{5}{3.162}\right)$

$\doteqdot P(Z < -1.58) = 0.5 - \Phi(1.58) = 0.5 - 0.4430$

$= \underline{0.057}$



[14] X＝ある種の事故で1年間に死亡する人数. 題意より, X は λ＝36 のポアソン分布に従う.

$$\therefore P(X \geqq 40) = \sum_{k=40}^{\infty} e^{-36} \cdot \frac{36^k}{k!}$$

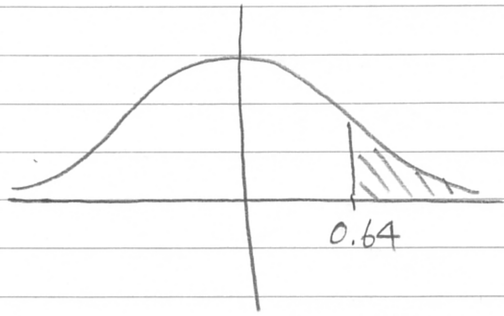
ポアソン分布表には λ＝36 の場合の値がないので, 上の確率を別な方法で求める.
ポアソン分布は二項分布で $np=\lambda=36$ として $n\to\infty$ としたときの極限として得られる.
題意より $n=250000$ とすると $p=36/250000$

$$\therefore np = 36,\quad npq = 36\times(1-36/250000) \fallingdotseq 39$$

$X \sim B(250000,\ 36/250000)$ と考えると二項分布の正規近似より

$$P(X\geqq 40) \fallingdotseq P(X\geqq 40)_{N(36,39)} = P\left(Z \geqq \frac{40-36}{\sqrt{39}}\right) = P\left(Z \geqq \frac{4}{6.245}\right)$$

$$= P(Z\geqq 0.64) = 0.5-\Phi(0.64)$$
$$= 0.5-0.2389 = \underline{0.2611}$$



Mathematica を用いてかなり正確な近似値を求めると

$$P(X\geqq 40) = 1-\sum_{k=0}^{39} e^{-36}\cdot\frac{36^k}{k!} \fallingdotseq \underline{0.273696}$$

[15] (i) X＝賭を続けて全部で m 回負けるまでに勝負した回数 とおくと X のとる値は $X=m,\ m+1,\ m+2,\ \cdots$.
「$X=x$」ということは, x 回目の勝負で m 回目の負けとなったことであるから, それ以前の $x-1$ 回の勝負の中で $m-1$ 回負けたことになる. その場合の数は ${}_{x-1}C_{m-1}$ 通りで, その各々が起こる確率は $p^m(1-p)^{x-m}$ となる. よって確率の和の公式より
$P(X=x) = {}_{x-1}C_{m-1}\, p^m (1-p)^{x-m}$ である.

(ii) ${}_nC_r$ を $\binom{n}{r}$ と書く. 次の2つの公式が成り立つ:

公式1: $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$

(証明) $t(1+t)^n + (1+t)^n = (1+t)^{n+1}$ の二項展開式の t^r の係数を比較すると
左辺は $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$ で, 右辺は $\binom{n+1}{r}$ だから □

公式2： $\sum_{k=m}^{\infty}\binom{k-1}{m-1}p^m(1-p)^{k-m}=1$

(証明) 確率分布の性質より $\sum_{k=m}^{\infty}\binom{k-1}{m-1}p^m(1-p)^{k-m}=\sum_{k=m}^{\infty}P(X=k)=1$ □

$$E(X)=\sum_{k=m}^{\infty}k\cdot\binom{k-1}{m-1}p^m(1-p)^{k-m}=(*)$$

ここで $k\binom{k-1}{m-1}=k\cdot\dfrac{(k-1)!}{(m-1)!(k-m)!}=m\cdot\dfrac{k!}{m!(k-m)!}=m\binom{k}{m}$

$$\therefore (*)=\sum_{k=m}^{\infty}m\binom{k}{m}p^m(1-p)^{k-m}=\frac{m}{p}\underbrace{\sum_{k=m}^{\infty}\binom{k}{m}p^{m+1}(1-p)^{k-m}}_{=L}=\frac{m}{p}\cdot L$$

ここで

$$L=p^{m+1}+\binom{m+1}{m}p^{m+1}(1-p)+\binom{m+2}{m}p^{m+1}(1-p)^2+\cdots$$

公式1

$$=p^{m+1}+\left\{\binom{m}{m-1}+\binom{m}{m}\right\}p^{m+1}(1-p)+\left\{\binom{m+1}{m-1}+\binom{m+1}{m}\right\}p^{m+1}(1-p)^2+\cdots$$

$$=\left\{p^{m+1}+\binom{m}{m-1}p^{m+1}(1-p)+\binom{m+1}{m-1}p^{m+1}(1-p)^2+\cdots\right\}$$

$$+\left\{p^{m+1}(1-p)+\binom{m+1}{m}p^{m+1}(1-p)^2+\cdots\right\}$$

$$=p\left\{p^m+\binom{m}{m-1}p^m(1-p)+\binom{m+1}{m-1}p^m(1-p)^2+\cdots\right\}$$

$$+(1-p)\left\{p^{m+1}+\binom{m+1}{m}p^{m+1}(1-p)+\cdots\right\}$$

公式2

$$=p+(1-p)L$$

$\therefore L=p+(1-p)L \quad \therefore pL=p \quad \therefore L=1 \qquad \therefore E(X)=\dfrac{m}{p}$

$$E(X^2)=\sum_{k=m}^{\infty}k^2\binom{k-1}{m-1}p^m(1-p)^{k-m}=(**)$$

ここで $k^2\binom{k-1}{m-1}=\{k(k+1)-k\}\binom{k-1}{m-1}=k(k+1)\dfrac{(k-1)!}{(m-1)!(k-m)!}-k\binom{k-1}{m-1}$

$$=m(m+1)\frac{(k+1)!}{(m+1)!(k-m)!}-k\binom{k-1}{m-1}=m(m+1)\binom{k+1}{m+1}-k\binom{k-1}{m-1}$$

$$\therefore (*) = m(m+1)\sum_{k=m}^{\infty}\binom{k+1}{m+1}p^m(1-p)^{k-m} - \sum_{k=m}^{\infty}k\binom{k-1}{m-1}p^m(1-p)^{k-m}$$

$$= m(m+1)\underbrace{\sum_{k=m}^{\infty}\binom{k+1}{m+1}p^m(1-p)^{k-m}}_{\shortparallel \atop N} - E(X) = m(m+1)N - \frac{m}{p}$$

以下で $N = 1/p^2$ となることを示す：

$$N = p^m + \binom{m+2}{m+1}p^m(1-p) + \binom{m+3}{m+1}p^m(1-p)^2 + \cdots$$

$$\overset{\text{公式1}}{=} p^m + \left\{\binom{m+1}{m} + \binom{m+1}{m+1}\right\}p^m(1-p) + \left\{\binom{m+2}{m} + \binom{m+2}{m+1}\right\}p^m(1-p)^2 + \cdots$$

$$= \left\{p^m + \binom{m+1}{m}p^m(1-p) + \binom{m+2}{m}p^m(1-p)^2 + \cdots\right\}$$

$$+ \underbrace{\left\{p^m(1-p) + \binom{m+2}{m+1}p^m(1-p)^2 + \cdots\right\}}_{\shortparallel \atop M}$$

$$= \frac{1}{p}\left\{p^{m+1} + \binom{m+1}{m}p^{m+1}(1-p) + \binom{m+2}{m}p^{m+1}(1-p)^2 + \cdots\right\} + M$$

$$= \frac{1}{p}\times L + M = \frac{1}{p} + M$$

ここで

$$M \overset{\text{公式1}}{=} p^m(1-p) + \left\{\binom{m+1}{m} + \binom{m+1}{m+1}\right\}p^m(1-p)^2 + \left\{\binom{m+2}{m} + \binom{m+2}{m+1}\right\}p^m(1-p)^3 + \cdots$$

$$= \left\{p^m(1-p) + \binom{m+1}{m}p^m(1-p)^2 + \binom{m+2}{m}p^m(1-p)^3 + \cdots\right\}$$

$$+ \left\{p^m(1-p)^2 + \binom{m+2}{m+1}p^m(1-p)^3 + \cdots\right\}$$

$$= \frac{1-p}{p}\left\{p^{m+1} + \binom{m+1}{m}p^{m+1}(1-p) + \binom{m+2}{m}p^{m+1}(1-p)^2 + \cdots\right\}$$

$$+ (1-p)^2\left\{p^m + \binom{m+2}{m+1}p^m(1-p) + \cdots\right\}$$

$$= \frac{1-p}{p}\times L + (1-p)^2\times N = \frac{1-p}{p} + (1-p)^2 N$$

$$\therefore N = \frac{1}{p} + \frac{1-p}{p} + (1-p)^2 N \quad \therefore N = \frac{1}{p^2} \quad \therefore E(X^2) = m(m+1)\cdot\frac{1}{p^2} - \frac{m}{p}$$

$$\therefore V(X) = m(m+1)\cdot\frac{1}{p^2} - \frac{m}{p} - \frac{m^2}{p^2} = \frac{m^2 + m - pm - m^2}{p^2} = \frac{(1-p)m}{p^2}$$

16 (i) $\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$

(ii) Aが勝つのは次の(i), (ii), (iii) ・・・の場合である

(i) 1回目にAがババ以外を引く : $2/3$

(ii) 1回目にAがババ, 2回目にBがババ, 3回目にAがババ以外を引く : $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}$

(iii) 1回目にAがババ, 2回目にBがババ, 3回目にAがババ, 4回目にBがババ, 5回目にAがババ以外を引く : $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}$

(iv) ・・・・・・・・・・・・

よって求める確率をPとすると

$$P=\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\frac{2}{3}+\cdots=\frac{2}{3}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^4+\cdots\right\}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{8}=\frac{3}{4}$$

17 (i) $0\leqq x\leqq 1$ の場合 : $p_1(x)=\int_0^2(1-x)(2-y)dy=(1-x)\int_0^2(2-y)dy=2(1-x)$

その他の x の場合 : $p_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}0\,dy=0$ $\quad\therefore p_1(x)=\begin{cases}2(1-x) & (0\leqq x\leqq 1)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$

$0\leqq y\leqq 2$ の場合 : $p_2(y)=\int_0^1(1-x)(2-y)dx=(2-y)\int_0^1(1-x)dx=\frac{1}{2}(2-y)$

その他の y の場合 : $p_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty}0\,dx=0$ $\quad\therefore p_2(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}(2-y) & (0\leqq y\leqq 2)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$

(ii) $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x p_1(x)dx=\int_0^1 x\cdot 2(1-x)dx=2\int_0^1(x-x^2)dx=\frac{1}{3}$

$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}y p_2(y)dy=\int_0^2 y\cdot\frac{1}{2}(2-y)dy=\frac{1}{2}\int_0^2(2y-y^2)dy=\frac{2}{3}$

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 p_1(x)dx=\int_0^1 2x^2(1-x)dx=\frac{1}{6}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{1}{6}-\frac{1}{9}=\frac{1}{18}$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{\infty}y^2p_2(y)dy=\int_0^2\frac{y^2}{2}(2-y)dy=\frac{2}{3}$$

$$\therefore V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2=\frac{2}{3}-\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xy\cdot p(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^2 xy(1-x)(2-y)dxdy$$

$$=\int_0^1 x(1-x)dx\int_0^2 y(2-y)dy=\frac{1}{6}\times\frac{4}{3}=\frac{2}{9}$$

$$\therefore \gamma(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=\frac{2}{9}-\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}-\frac{2}{9}=0 \quad \therefore \rho(X,Y)=0$$

(iii) $0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 2$ の場合：$p(x,y)=p_1(x)\cdot p_2(y)$
　その他のx,yの場合：$p(x,y)=p_1(x)\cdot p_2(y)=0$
よってすべての実数x,yに対して $p(x,y)=p_1(x)\cdot p_2(y)$　∴ XとYは互いに独立

$\boxed{18}$ (i) X = 5個のコインを同時に投げたときの表の枚数，$\bar{X}=X/5$
とすると題意より $X\sim B(5,1/2)$
Xのとる値は 0, 1, 2, 3, 4, 5. よって $\bar{X}$のとる値は 0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1.

$P(\bar{X}=0)=P(X=0)={}_5C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5=1/32$
$P(\bar{X}=1/5)=P(X=1)={}_5C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4=5/32$
$P(\bar{X}=2/5)=P(X=2)={}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=10/32$
$P(\bar{X}=3/5)=P(X=3)={}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=10/32$
$P(\bar{X}=4/5)=P(X=4)={}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)=5/32$
$P(\bar{X}=1)=P(X=5)={}_5C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0=1/32$

$\bar{X}$の値	0	1/5	2/5	3/5	4/5	1	計
出現確率	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32	1

確率分布の図示は省略

(ii) $E(\bar{X})=0\times\frac{1}{32}+\frac{1}{5}\times\frac{5}{32}+\frac{2}{5}\times\frac{10}{32}+\frac{3}{5}\times\frac{10}{32}+\frac{4}{5}\times\frac{5}{32}+1\times\frac{1}{32}=\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$

$E(\bar{X}^2)=0^2\times\frac{1}{32}+\left(\frac{1}{5}\right)^2\times\frac{5}{32}+\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\frac{10}{32}+\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{10}{32}+\left(\frac{4}{5}\right)^2\times\frac{5}{32}+1^2\times\frac{1}{32}=\frac{3}{10}$

$\therefore V(X) = \frac{3}{10} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

$\boxed{14}$ (i) $P(X=k) = (1-r)r^k \quad (0<r<1,\ k=1,2,\cdots)$

べき級数 $\sum_{k=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{1-t}$ の収束半径は1なので、左辺は開区間 $(-1,1)$ で項別微分可能で

$$\sum_{k=0}^{\infty} k t^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k t^{k-1} = \frac{1}{(1-t)^2} \quad \cdots\cdots (1)$$

上式に $t=r$ を代入すると $\sum_{k=1}^{\infty} k r^{k-1} = \frac{1}{(1-r)^2}$

$$\therefore E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k P(X=k) = (1-r)\sum_{k=1}^{\infty} k r^k = r(1-r)\sum_{k=1}^{\infty} k r^{k-1}$$

$$= r(1-r) \times \frac{1}{(1-r)^2} = \frac{r}{1-r}$$

(1)の両辺に t をかけると $\sum_{k=1}^{\infty} k t^k = \frac{t}{(1-t)^2}$. 左辺のべき級数の収束半径は1なので、左辺は開区間 $(-1,1)$ で項別微分可能で

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 t^{k-1} = \frac{(1-t)^2 + 2t(1-t)}{(1-t)^4} = \frac{1+t}{(1-t)^3}$$

上式に $t=r$ を代入すると $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 r^{k-1} = \frac{1+r}{(1-r)^3}$

$$\therefore E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot P(X=k) = (1-r)\sum_{k=1}^{\infty} k^2 r^k = r(1-r)\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot r^{k-1}$$

$$= r(1-r) \times \frac{1+r}{(1-r)^3} = \frac{r+r^2}{(1-r)^2}$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{r+r^2}{(1-r)^2} - \frac{r^2}{(1-r)^2} = \frac{r}{(1-r)^2}$$

(ii) $p(x) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\frac{|x-\mu|}{\alpha}} \quad (\alpha>0,\ -\infty<x<\infty)$.

$$E(X) = \frac{1}{2\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{|x-\mu|}{\alpha}} dx = \frac{1}{2\alpha}\Big\{\underbrace{\int_{-\infty}^{\mu} x e^{\frac{x-\mu}{\alpha}} dx}_{= I_1} + \underbrace{\int_{\mu}^{\infty} x e^{-\frac{x-\mu}{\alpha}} dx}_{= I_2}\Big\}$$

$$I_1=\left[x\cdot\alpha e^{\frac{x-\mu}{\alpha}}\right]_{-\infty}^{\mu}-\int_{-\infty}^{\mu}\alpha e^{\frac{x-\mu}{\alpha}}dx=\alpha\mu-\alpha\left[\alpha e^{\frac{x-\mu}{\alpha}}\right]_{-\infty}^{\mu}=\alpha\mu-\alpha^2$$

$$I_2=\left[x\left(-\alpha e^{-\frac{x-\mu}{\alpha}}\right)\right]_{\mu}^{\infty}+\alpha\int_{\mu}^{\infty}e^{-\frac{x-\mu}{\alpha}}dx=\alpha\mu+\alpha\left[-\alpha e^{-\frac{x-\mu}{\alpha}}\right]_{\mu}^{\infty}=\alpha\mu+\alpha^2$$

$$\therefore E(X)=\frac{1}{2\alpha}(\alpha\mu-\alpha^2+\alpha\mu+\alpha^2)=\frac{2\alpha\mu}{2\alpha}=\mu$$

$$E(X^2)=\frac{1}{2\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-\frac{|x-\mu|}{\alpha}}dx$$

$$=\frac{1}{2\alpha}\left\{\underbrace{\int_{-\infty}^{\mu}x^2e^{\frac{x-\mu}{\alpha}}dx}_{=I_3}+\underbrace{\int_{\mu}^{\infty}x^2e^{-\frac{x-\mu}{\alpha}}dx}_{=I_4}\right\}=\frac{1}{2\alpha}(I_3+I_4)$$

$$I_3=\left[x^2\alpha e^{\frac{x-\mu}{\alpha}}\right]_{-\infty}^{\mu}-\int_{-\infty}^{\mu}2x\cdot\alpha e^{\frac{x-\mu}{\alpha}}dx=\alpha\mu^2-2\alpha\int_{-\infty}^{\mu}xe^{\frac{x-\mu}{\alpha}}dx$$

$$=\alpha\mu^2-2\alpha I_1=\alpha\mu^2-2\alpha(\alpha\mu-\alpha^2)=\alpha\mu^2-2\alpha^2\mu+2\alpha^3$$

$$I_4=\left[x^2\left(-\alpha e^{-\frac{x-\mu}{\alpha}}\right)\right]_{\mu}^{\infty}-\int_{\mu}^{\infty}2x\left(-\alpha e^{-\frac{x-\mu}{\alpha}}\right)dx=\alpha\mu^2+2\alpha\int_{\mu}^{\infty}xe^{-\frac{x-\mu}{\alpha}}dx$$

$$=\alpha\mu^2+2\alpha(\alpha\mu+\alpha^2)=\alpha\mu^2+2\alpha^2\mu+2\alpha^3$$

$$\therefore E(X^2)=\frac{1}{2\alpha}(\alpha\mu^2-2\alpha^2\mu+2\alpha^3+\alpha\mu^2+2\alpha^2\mu+2\alpha^3)=\frac{1}{2\alpha}(2\alpha\mu^2+4\alpha^3)=\mu^2+2\alpha^2$$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\mu^2+2\alpha^2-\mu^2=2\alpha^2$$

(iii) $$f(x)=\begin{cases}\frac{m}{\alpha}(x-\gamma)^{m-1}e^{-\frac{(x-\gamma)^m}{\alpha}} & (x\geq\gamma)\\ 0 & (x<\gamma)\end{cases}\quad(-\infty<\gamma<\infty,\ \alpha>0,\ m>0)$$

$\Gamma(s)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{s-1}dt\ (s>0)$ をガンマ関数という.

$$E(X)=\int_{\gamma}^{\infty}x\cdot\frac{m}{\alpha}(x-\gamma)^{m-1}e^{-\frac{(x-\gamma)^m}{\alpha}}dx=\frac{m}{\alpha}\int_{\gamma}^{\infty}x(x-\gamma)^{m-1}e^{-\frac{(x-\gamma)^m}{\alpha}}dx$$

DATE NO. CHECK

$$\underline{t=\frac{(x-\gamma)^m}{\alpha}} \quad dt=\frac{m}{\alpha}(x-\gamma)^{m-1}dx \qquad \begin{array}{c|c} x & \gamma\to\infty \\ \hline t & 0\to\infty \end{array}$$

$$\frac{m}{\alpha}\int_0^\infty \left(\alpha^{\frac{1}{m}}t^{\frac{1}{m}}+\gamma\right)e^{-t}\cdot\frac{\alpha}{m}dt$$

$$=\alpha^{\frac{1}{m}}\int_0^\infty e^{-t}t^{\left(\frac{1}{m}+1\right)-1}dt+\gamma\underbrace{\int_0^\infty e^{-t}dt}_{=1}=\alpha^{\frac{1}{m}}\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)+\gamma$$

$$E(X^2)=\int_\gamma^\infty x^2\cdot\frac{m}{\alpha}(x-\gamma)^{m-1}e^{-\frac{(x-\gamma)^m}{\alpha}}dx=\frac{m}{\alpha}\int_\gamma^\infty x^2(x-\gamma)^{m-1}e^{-\frac{(x-\gamma)^m}{\alpha}}dx$$

$$\underline{t=\frac{(x-\gamma)^m}{\alpha}} \quad dt=\frac{m}{\alpha}(x-\gamma)^{m-1}dx \qquad \begin{array}{c|c} x & \gamma\to\infty \\ \hline t & 0\to\infty \end{array}$$

$$\frac{m}{\alpha}\int_0^\infty\left(\alpha^{\frac{1}{m}}t^{\frac{1}{m}}+\gamma\right)^2e^{-t}\cdot\frac{\alpha}{m}dt=\int_0^\infty\left(\alpha^{\frac{1}{m}}t^{\frac{1}{m}}+\gamma\right)^2e^{-t}dt$$

$$=\int_0^\infty\left(\alpha^{\frac{2}{m}}t^{\frac{2}{m}}+2\gamma\cdot\alpha^{\frac{1}{m}}t^{\frac{1}{m}}+\gamma^2\right)e^{-t}dt$$

$$=\alpha^{\frac{2}{m}}\int_0^\infty t^{\frac{2}{m}}e^{-t}dt+2\gamma\cdot\alpha^{\frac{1}{m}}\int_0^\infty t^{\frac{1}{m}}e^{-t}dt+\gamma^2\underbrace{\int_0^\infty e^{-t}dt}_{=1}$$

$$=\alpha^{\frac{2}{m}}\int_0^\infty e^{-t}t^{\left(\frac{2}{m}+1\right)-1}dt+2\gamma\cdot\alpha^{\frac{1}{m}}\int_0^\infty e^{-t}\cdot t^{\left(\frac{1}{m}+1\right)-1}dt+\gamma^2$$

$$=\alpha^{\frac{2}{m}}\Gamma\left(\frac{2}{m}+1\right)+2\gamma\cdot\alpha^{\frac{1}{m}}\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)+\gamma^2$$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\alpha^{\frac{2}{m}}\Gamma\left(\frac{2}{m}+1\right)+2\gamma\cdot\alpha^{\frac{1}{m}}\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)+\gamma^2-\left\{\alpha^{\frac{1}{m}}\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)+\gamma\right\}^2$$

$$=\alpha^{\frac{2}{m}}\Gamma\left(\frac{2}{m}+1\right)+\cancel{2\gamma\cdot\alpha^{\frac{1}{m}}\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)}+\cancel{\gamma^2}-\alpha^{\frac{2}{m}}\Gamma^2\left(\frac{1}{m}+1\right)-\cancel{2\gamma\cdot\alpha^{\frac{1}{m}}\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)}-\cancel{\gamma^2}$$

$$=\alpha^{\frac{2}{m}}\left\{\Gamma\left(\frac{2}{m}+1\right)-\Gamma^2\left(\frac{1}{m}+1\right)\right\}$$

$\boxed{20}$ $X\sim N(0,\sigma^2)$. それゆえ $\mu_1=E(X)=0$, $\mu_2=E(X^2)=\sigma^2$.

(i) $\mu_3=E(X^3)=\int_{-\infty}^{\infty}x^3\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b x^3\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$

ここで $\int x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ に注意する.

$$\int_a^b x^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \left[x^2 \left(-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right) \right]_a^b - \int_a^b 2x \left(-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right) dx$$

$$= -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left(b^2 e^{-\frac{b^2}{2\sigma^2}} - a^2 e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} \right) + 2\sigma^2 \int_a^b x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\xrightarrow[b \to \infty]{a \to -\infty} 0 + 2\sigma^2 E(X) = 0 + 2\sigma^2 \times 0 = 0 \qquad \therefore \mu_3 = E(X^3) = 0$$

$$\mu_4 = E(X^4) = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}} \int_a^b x^4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\int_a^b x^4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \left[x^3 \left(-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right) \right]_a^b - \int_a^b 3x^2 \left(-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right) dx$$

$$= -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left(b^3 e^{-\frac{b^2}{2\sigma^2}} - a^3 e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} \right) + 3\sigma^2 \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\xrightarrow[b \to \infty]{a \to -\infty} 0 + 3\sigma^2 E(X^2) = 3\sigma^2 \times \sigma^2 = 3\sigma^4$$

(ii) $$\mu_n = E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}} \int_a^b x^n \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\int_a^b x^n \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \left[x^{n-1} \left(-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right) \right]_a^b - \int_a^b (n-1) x^{n-2} \left(-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right) dx$$

$$= -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left(b^{n-1} e^{-\frac{b^2}{2\sigma^2}} - a^{n-1} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} \right) + (n-1)\sigma^2 \int_a^b x^{n-2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\xrightarrow[b \to \infty]{a \to -\infty} 0 + (n-1)\sigma^2 E(X^{n-2}) = (n-1)\sigma^2 \cdot \mu_{n-2}$$

$$\therefore\ \mu_n = (n-1)\sigma^2 \mu_{n-2} \quad (n=3,4,5,\cdots)$$

nが偶数のとき: $\mu_n = (n-1)\sigma^2 \mu_{n-2} = (n-1)\sigma^2 (n-3)\sigma^2 \cdot \mu_{n-4}$

$$= \cdots = \underbrace{(n-1)\sigma^2 (n-3)\sigma^2 \cdots 1\cdot\sigma^2}_{\frac{n-2}{2}\text{個}} \cdot \mu_2$$

$$= (n-1)!!\, \underbrace{\sigma^2 \cdots \sigma^2}_{\frac{n-2}{2}\text{個}} \cdot \sigma^2 = (n-1)!!\, \underbrace{\sigma^2 \cdots \sigma^2}_{\frac{n}{2}\text{個}} = (n-1)!!\,\sigma^n$$

nが奇数のとき: $\mu_n = (n-1)\sigma^2 \mu_{n-2} = (n-1)\sigma^2 (n-3)\sigma^2 \cdot \mu_{n-4}$

$$= \cdots = \underbrace{(n-1)\sigma^2 (n-3)\sigma^2 \cdots 2\sigma^2}_{\frac{n-2}{2}\text{個}} \cdot \mu_1$$

$$= (n-1)!!\, \sigma^{n-2} \mu_1 = 0$$

$\boxed{21}$ 省略

2章の演習問題 (pp. 80–81)

10 (i) X＝1台が売れて次に売れるまでの日数とすると、題意より X は $\lambda=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$ の指数分布に従う。よって20日間以上買い手がない確率は

$$P(X\geq 20)=\int_{20}^{\infty}\frac{1}{15}e^{-\frac{x}{15}}dx=e^{-\frac{4}{3}}=\underline{0.2636}$$

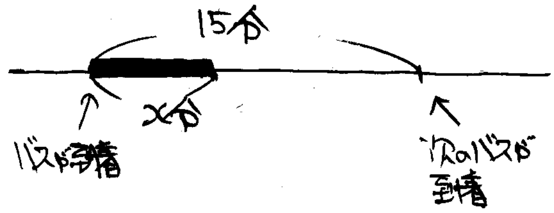
また $E(X)=\frac{1}{\lambda}=\underline{15}$

(ii) Y＝1か月間に売れるテレビの台数とすると、題意より Y はパラメタ $\lambda=2$ のポアソン分布に従う。よって求める確率はポアソン分布表より

$$P(Y\geq 4)=1-\{P(Y=0)+P(Y=1)+P(Y=2)+P(Y=3)\}$$
$$=1-(0.1353+0.2707+0.2707+0.1804)=\underline{0.1429}$$

(iii) 1か月間に2万～3万の収入があるということは、テレビが2台か3台売れるということである。
よって求める確率は $P(2\leq Y\leq 3)=P(Y=2)+P(Y=3)=0.2707+0.1804=\underline{0.4511}$

11 ① X の分布関数を求める：右図より



$$F(x)=P(X\leq x)=\begin{cases}\frac{x}{15} & (0\leq x\leq 15)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

② X の密度関数を求める：

$$p(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\begin{cases}\frac{1}{15} & (0\leq x\leq 15)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

③ 客が10分以上待つ確率は

$$P(X\geq 10)=\int_{10}^{\infty}p(x)dx=\int_{10}^{15}\frac{1}{15}dx=\frac{5}{15}=\underline{\frac{1}{3}}$$

3章の演習問題 (pp.110−112)

8 題意より $n=100$, $\bar{X}=5.002$, $s=0.009$, $\alpha=0.01$, $z(\alpha/2)=z(0.005)=2.5758$

・平均値の信頼区間：母平均の区間推定(母分散未知・大標本)の公式より

$$5.002-\frac{0.009}{\sqrt{100}}\times 2.5758<\mu<5.002+\frac{0.009}{\sqrt{100}}\times 2.5758$$

$$\therefore 5.002-0.00232<\mu<5.002+0.00232 \quad \therefore 4.9997<\mu<5.0043$$

・分散の信頼区間：母分散の区間推定(母平均未知)の公式より.

$$\frac{99\times(0.009)^2}{\chi^2_{99}(\alpha/2)}<\sigma^2<\frac{99\times(0.009)^2}{\chi^2_{99}(1-\alpha/2)}$$

ここで χ^2分布表より. $\chi^2_{99}(\alpha/2)=\chi^2_{100}(0.005)=140.2$, $\chi^2_{99}(1-\alpha/2)=\chi^2_{100}(0.995)=67.3$

よって

$$\sqrt{\frac{99}{140.2}}\times 0.009<\sigma<\sqrt{\frac{99}{67.3}}\times 0.009 \quad \therefore 0.0076<\sigma<0.0109$$

9 題意より $n=50$, $\bar{X}=25.013$, $s=0.024$, $\alpha=0.05$, $z(\alpha/2)=z(0.025)=1.96$

・平均値の区間推定：母平均の区間推定(母分散未知・大標本)の公式より

$$25.013-\frac{0.024}{\sqrt{50}}\times 1.96<\mu<25.013+\frac{0.024}{\sqrt{50}}\times 1.96$$

$$\therefore 25.013-0.006652<\mu<25.013+0.006652 \quad \therefore 25.0063<\mu<25.0197$$

・分散の区間推定：母分散の区間推定(母平均未知)の公式より

$$\frac{49\times(0.024)^2}{\chi^2_{49}(\alpha/2)}<\sigma^2<\frac{49\times(0.024)^2}{\chi^2_{49}(1-\alpha/2)}$$

ここで χ^2分布表より $\chi^2_{49}(\alpha/2)=\chi^2_{50}(0.025)=71.4$, $\chi^2_{49}(1-\alpha/2)=\chi^2_{50}(0.975)=32.4$. よって

$$\frac{7\times 0.024}{\sqrt{71.4}}<\sigma<\frac{7\times 0.024}{\sqrt{32.4}} \quad \therefore 0.0199<\sigma<0.0295$$

13 題意より $n=105$, $\bar{X}=42$, $s^2=66.2$, $\alpha=0.1$, $z(\alpha/2)=z(0.05)=1.6449$

・平均値の区間推定：母平均の区間推定(母分散未知・大標本)の公式より

$$42-\sqrt{\frac{66.2}{105}}\times 1.6449<\mu<42+\sqrt{\frac{66.2}{105}}\times 1.6449$$

$$\therefore 42-1.31<\mu<42+1.31 \quad \therefore \underline{40.7<\mu<43.3}$$

・分散の区間推定：母分散の区間推定(母平均未知)の公式より

$$\frac{104\times 66.2}{\chi^2_{104}(\alpha/2)}<\sigma^2<\frac{104\times 66.2}{\chi^2_{104}(1-\alpha/2)}$$

ここで χ^2分布表より $\chi^2_{104}(\alpha/2)\fallingdotseq\chi^2_{100}(0.05)=124.3$，$\chi^2_{104}(1-\alpha/2)\fallingdotseq\chi^2_{100}(0.95)=77.9$．よって

$$\frac{104\times 66.2}{124.3}<\sigma^2<\frac{104\times 66.2}{77.9} \quad \therefore \underline{55.39<\sigma^2<88.38}$$