1.1 確率

問1 (i) 玉は全部で9個, 白玉は4個 ∴ $\frac{4}{9}$

(ii) $\frac{{}_5C_2}{{}_9C_2} = \frac{5\times 4}{2\times 1}\times\frac{2\times 1}{9\times 8} = \frac{5}{18}$

(iii) $\frac{{}_5C_3\times{}_4C_2}{{}_9C_5} = \frac{5\times 4\times 3}{3\times 2\times 1}\times\frac{4\times 3}{2\times 1}\times\frac{5\times 4\times 3\times 2\times 1}{9\times 8\times 7\times 6\times 5} = \frac{5\times 4^2}{7\times 6_3} = \frac{10}{21}$

問2 実験：面積Sの領域内のでたらめの位置に点を打つ

標本点：領域内の点
標本空間：領域内の点の集合
事象：領域内の部分領域Aの点の集合
確率：$P(A)=\frac{A}{S}$

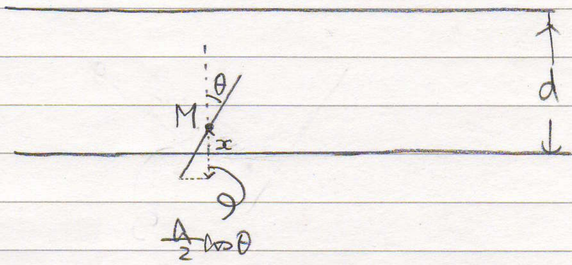
I：Aの面積なので $0\leqq A\leqq S$ ∴ $0\leqq P(A)\leqq 1$

II：$P(S)=\frac{S}{S}=1$, $P(\phi)=\frac{0}{S}=0$

III A, Bは互いに排反とすると AとBの共通部分はないので $A\cup B$の面積は$A+B$

∴ $P(A\cup B)=\frac{A+B}{S}=\frac{A}{S}+\frac{B}{S}=P(A)+P(B)$.

問3 x：針の中点Mから最も近い平行線までの距離
θ：平行線に直交する直線と針の角（正の最小角）



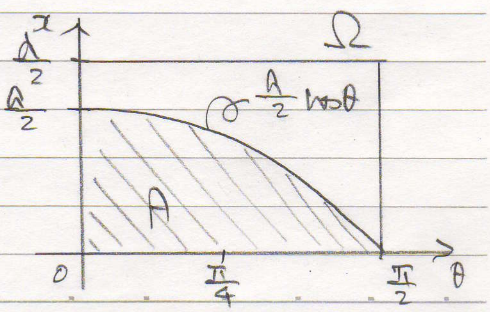
xのとり得る値の範囲：$0\leqq x\leqq \frac{d}{2}$
θのとり得る値の範囲：$0\leqq \theta\leqq \frac{\pi}{2}$

標本空間 $\Omega=\{(x,\theta): 0\leqq x\leqq\frac{d}{2},\ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\}$

針が平行線と交わる事象 $A=\{(x,\theta)\in\Omega : x\leqq\frac{a}{2}\cos\theta\}$

(問2)の結果より

$$P(A)=\frac{A\text{の面積}}{\Omega\text{の面積}}=\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a}{2}\cos\theta\, d\theta}{\frac{\pi}{2}\times\frac{d}{2}}$$



$$= \frac{\frac{a}{2}\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}{\frac{\pi}{4}d} = \frac{a}{2}\times\frac{4}{\pi d} = \frac{2a}{\pi d}$$

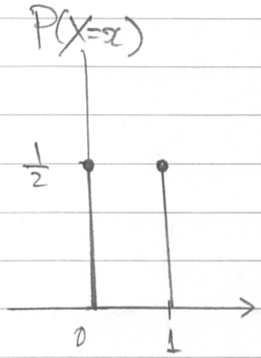
1.3 離散型確率変数と確率分布

例1 Xのとり得る値は0と1. Xの確率分布表.

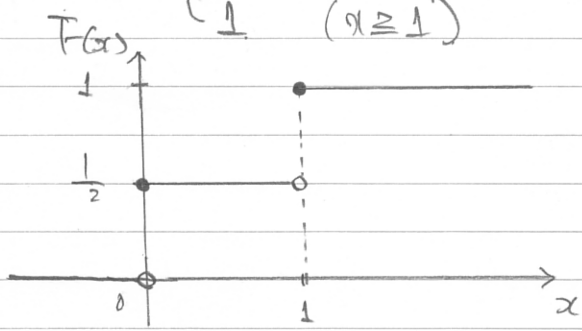
$P(X=0)=P(X=1)=1/2$

Xの値	0	1	計
出現確率	1/2	1/2	1

Xの分布関数 $F(x)=P(X\leqq x)=\begin{cases} 0 & (x<0) \\ \frac{1}{2} & (0\leqq x<1) \\ 1 & (x\geqq 1) \end{cases}$



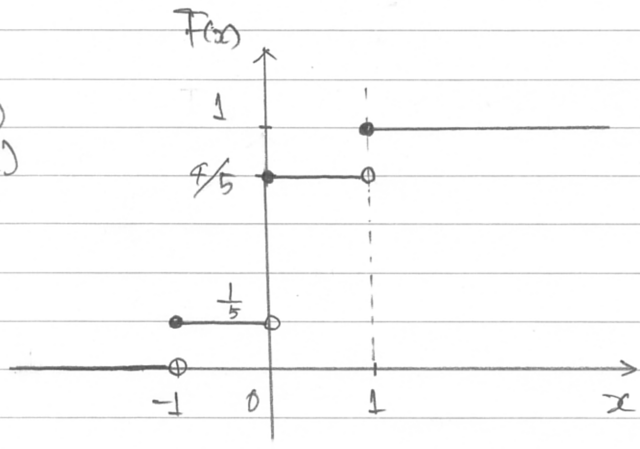
Xの確率分布の図



Xの分布関数の図

問2 (i) $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}+p=1$ $\therefore p=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$ (ii) $P(X^2=1)=P(X=-1)+P(X=1)$

$=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$ (iii) $F(x)=\begin{cases} 0 & (x<-1) \\ 1/5 & (-1\leqq x<0) \\ 4/5 & (0\leqq x<1) \\ 1 & (1\leqq x) \end{cases}$



Xの分布関数の図

問3 (i) X = 2個のサイコロの出る目の和　$X=2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12$

2個のサイコロの出る目を (i,j) で表す。出る目の総数 $=6\times6=36$ 通り。

$P(X=2)=(1,1)$ が出る $=\frac{1}{36}$, $P(X=3)=(1,2),(2,1)$ が出る $=\frac{2}{36}$, $P(X=4)=(1,3),(2,2),$

$(3,1)$ が出る $=\frac{3}{36}$, $P(X=5)=(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$ が出る $=\frac{4}{36}$, $P(X=6)=(1,5),(2,4),(3,3),$

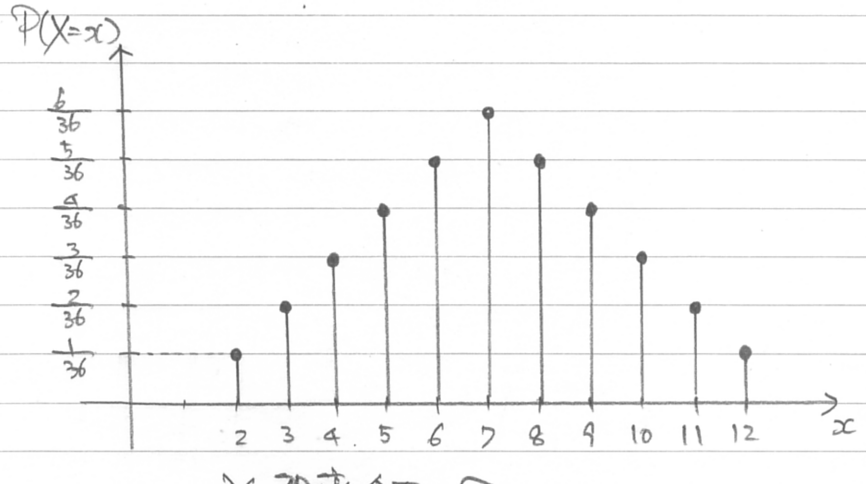
$(4,2),(5,1)$ が出る $=\frac{5}{36}$, $P(X=7)=(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$ が出る $=\frac{6}{36}$,

$P(X=8)=(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)$ が出る $=\frac{5}{36}$, $P(X=9)=(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)$

が出る $=\frac{4}{36}$, $P(X=10)=(4,6),(5,5),(6,4)$ が出る $=\frac{3}{36}$, $P(X=11)=(5,6),(6,5)$ が出る

$=\frac{2}{36}$, $P(X=12)=(6,6)$ が出る $=\frac{1}{36}$

Xの値	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
出現確率	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36	1



Xの確率分布の図

(ii) $P(4\leq X\leq 8)=P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)=\frac{3}{36}+\frac{4}{36}+\frac{5}{36}+\frac{6}{36}+\frac{5}{36}$

$=\frac{23}{36}$

(iii) $F(x)=\begin{cases} 0 & (x<2) \\ 1/36 & (2\leqq x<3) \\ 3/36 & (3\leqq x<4) \\ 6/36 & (4\leqq x<5) \\ 10/36 & (5\leqq x<6) \\ 15/36 & (6\leqq x<7) \\ 21/36 & (7\leqq x<8) \\ 26/36 & (8\leqq x<9) \\ 30/36 & (9\leqq x<10) \\ 33/36 & (10\leqq x<11) \\ 35/36 & (11\leqq x<12) \\ 1 & (x\geqq 12) \end{cases}$　F(x)の図は省略

(iv) $P(5\leqq X\leqq 10)=P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)$

$=\{\cancel{F(5)}-F(4)\}+\{\cancel{F(6)}-\cancel{F(5)}\}+\{\cancel{F(7)}-\cancel{F(6)}\}+\{\cancel{F(8)}-\cancel{F(7)}\}+\{\cancel{F(9)}-\cancel{F(8)}\}+\{F(10)-\cancel{F(9)}\}$

$=F(10)-F(4)=33/36-6/36=27/36=3/4$

$\boxed{問4}$ (i)は省略　(ii) $P(X=0)=F(0)=1/4$, $P(X=1)=F(1)-F(0)=3/4-1/4=2/4=1/2$

$P(X=2)=F(2)-F(1)=1-3/4=1/4$

(iii)

Xの値	0	1	2	計
出現確率	1/4	1/2	1/4	1

図は省略

DATE . .　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　NO.

CHECK

1.2 事象の独立性とベイズの定理

問1 製品がA, B, Cで作られるという事象をそれぞれA, B, C, 製品が不良品であるという事象をEとすると Bayesの定理より

$$P(A|E)=\frac{P(A)\cdot P(E|A)}{P(A)P(E|A)+P(B)\cdot P(E|B)+P(C)\cdot P(E|C)}$$

$$=\frac{0.4\times 0.02}{0.4\times 0.02+0.3\times 0.04+0.3\times 0.05}=\frac{0.008}{0.008+0.012+0.015}$$

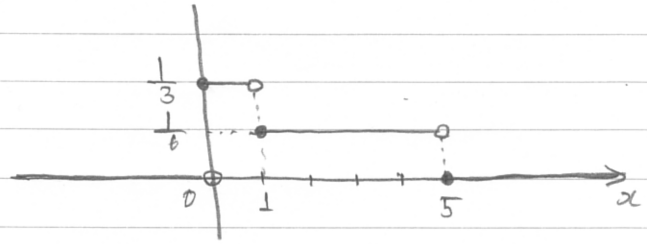
$$=\frac{0.008}{0.035}\fallingdotseq 0.23$$

問2 100点の2人をa, bとすると, 起こりうる場合は $(a,b)=$(男,男), (男,女), (女,男), (女,女)の4通りでこれらは同様に確からしいとする. A = 2人共女子である事象, B = 1人は女子であるという事象とすると. 求める確率は.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$$

1.4 連続型確率変数と確率密度関数

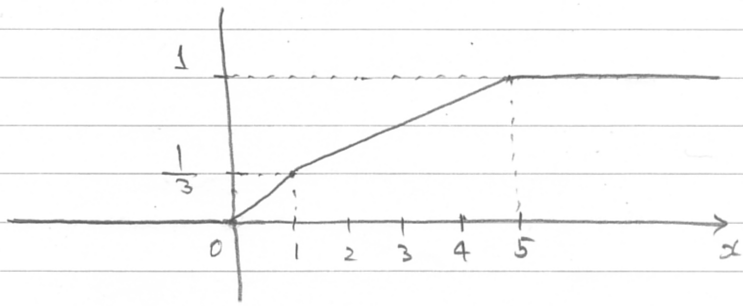
問1 (i) $1=\int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx=\int_0^1\frac{1}{3}dx+\int_1^5 c\,dx=\frac{1}{3}+4c$ ∴ $4c=\frac{2}{3}$ ∴ $c=\frac{1}{6}$



密度関数 $p(x)$ のグラフ

(ii) $P(\frac{1}{2}\le X<4)=\int_{\frac12}^{4}p(x)dx=\int_{\frac12}^{1}\frac{1}{3}dx+\int_1^4\frac{1}{6}dx=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times 3=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

(iii) $x<0$ では $F(x)=0$；$0\le x<1$ では、$F(x)=\int_0^x\frac{1}{3}dx=\frac{1}{3}x$；$1\le x<5$ では、
$F(x)=\int_0^1\frac{1}{3}dx+\int_1^x\frac{1}{6}dx=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}(x-1)=\frac{x+1}{6}$；$x\ge 5$ では $F(x)=1$



分布関数 $F(x)$ のグラフ

問2 閉区間[0,1]の中から任意に実数yをとり出したとき、その小数第1位で四捨五入したときに生じる誤差をxとすると

$$x=\begin{cases} y & (0\le y<0.5)\\ y-1 & (0.5\le y\le 1)\end{cases}$$

よって $-0.5\le x<0.5$

(a) $x<-0.5$の場合

$F(x)=P(X\le x)=0$

(b) $-0.5\le x<0.5$の場合：題意より誤差は区間[−0.5, 0.5)内に一様に

分布によると考えられるので

$$F(x)=P(X\leqq x)=\frac{x-(-0.5)}{0.5-(-0.5)}=x+0.5$$

(c) $x\geqq 0.5$ の場合：$F(x)=P(X\leqq x)=1$

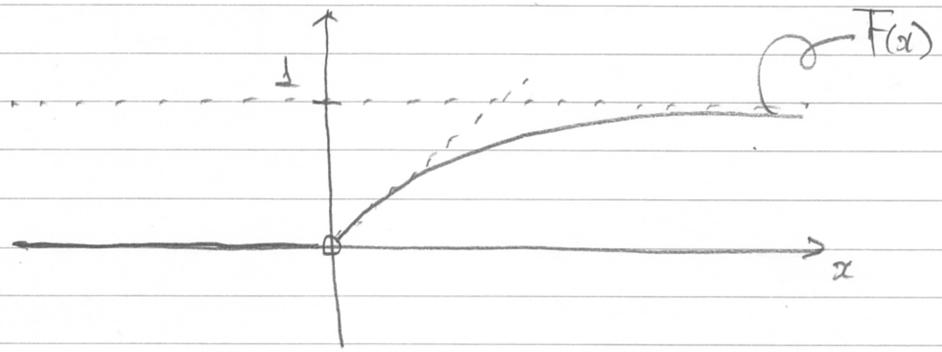
$$\therefore F(x)=\begin{cases}0 & (x<-0.5)\\ x+0.5 & (-0.5\leqq x<0.5)\\ 1 & (x\geqq 0.5)\end{cases}$$

$p(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}$ なので

$$p(x)=\begin{cases}0 & (x<-0.5,\ x\geqq 0.5)\\ 1 & (-0.5\leqq x<0.5)\end{cases}$$

(ii) $P(0\leqq X\leqq 0.1)=\displaystyle\int_0^{0.1}p(x)dx=\int_0^{0.1}1\,dx=\underline{0.1}$

$\boxed{問3}$ (i) $\lambda=1$ のとき $F(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ 1-e^{-x} & (x\geqq 0)\end{cases}$



(ii) $P(0\leqq X\leqq \frac{1}{\lambda})=F(\frac{1}{\lambda})-F(0)=1-e^{-\lambda\cdot\frac{1}{\lambda}}-(1-e^{-\lambda\cdot 0})=\underline{1-e^{-1}}$

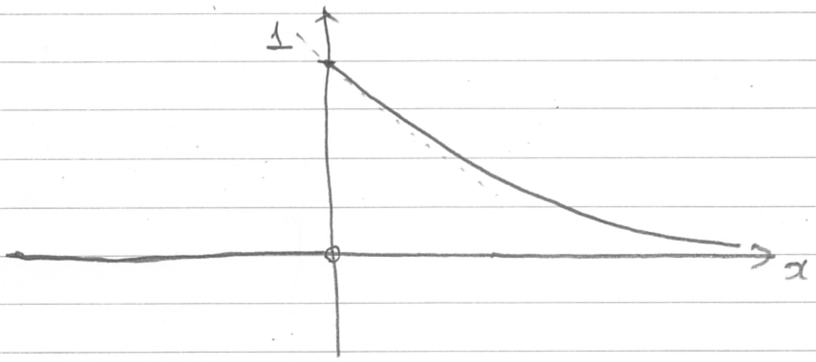
(iii) $p(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}$ を用いる．

(a) $x<0$ のとき $p(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}=\dfrac{d}{dx}0=0$

(b) $x\geqq 0$ のとき $p(x)=\dfrac{d}{dx}(1-e^{-\lambda x})=-(-\lambda)e^{-\lambda x}=\lambda e^{-\lambda x}$

$$\therefore\ p(x) = \begin{cases} 0 & (x<0) \\ \lambda e^{-\lambda x} & (x \geqq 0) \end{cases}$$

$\lambda = 1$ のときは、 $p(x) = \begin{cases} 0 & (x<0) \\ e^{-x} & (x \geqq 0) \end{cases}$ 。図示すると下図のようになる



DATE NO.

1.5 期待値と分散

問1 コイン投げの確率分布は、

Xの値	0	1
p_i	1/2	1/2

$\therefore E(X) = 0\times\frac{1}{2} + 1\times\frac{1}{2} = \underline{0.5}$

$V(X) = (0-0.5)^2\times\frac{1}{2} + (1-0.5)^2\times\frac{1}{2} = 0.125 + 0.125 = 0.25$

$Z = \dfrac{X-E(X)}{\sqrt{V(X)}} = \dfrac{X-0.5}{\sqrt{0.25}} = \dfrac{X-0.5}{0.5} = \underline{2X-1}$

問2 (i) $E(X+a) = \int_{-\infty}^{\infty}(x+a)p(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}x\,p(x)dx + a\int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx = E(X)+a$

(ii) $E(aX) = \int_{-\infty}^{\infty}ax\,p(x)dx = a\int_{-\infty}^{\infty}x\,p(x)dx = aE(X)$.

問3 (i) $E[X-E(X)] = 0$

(証明) 定理1.5.1で $a=-E(X)$ と置くと、$E[X-E(X)] = E[X+(-E(X))]$

$= E(X)+(-E(X)) = 0$ //

(ii) $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$

(証明) $V(X) = E[\{X-E(X)\}^2]$ ここで

$\{X-E(X)\}^2 = X^2 - 2E(X)\cdot X + \{E(X)\}^2$

$\therefore V(X) = E[X^2-2E(X)\cdot X + \{E(X)\}^2] = E[X^2-2E(X)\cdot X] + \{E(X)\}^2$

ここで $E[X^2-2E(X)\cdot X] = \int_{-\infty}^{\infty}(x^2-2E(X)\cdot x)p(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}x^2p(x)dx - 2E(X)\int_{-\infty}^{\infty}x\,p(x)dx$

$= E(X^2) - 2\{E(X)\}^2$. 以上より、$V(X) = E(X^2) - 2\{E(X)\}^2 + \{E(X)\}^2 = E(X^2)-\{E(X)\}^2$

//

CHECK

DATE NO.

問4 $Z = \dfrac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}} = \dfrac{1}{\sqrt{V(X)}}\{X - E(X)\}$

$$\therefore E(Z) = E\left[\frac{1}{\sqrt{V(X)}}\{X - E(X)\}\right] = \frac{1}{\sqrt{V(X)}} E[X - E(X)]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{V(X)}}\{E(X) - E(X)\} = 0$$

$$V(Z) = V\left[\frac{1}{\sqrt{V(X)}}\{X - E(X)\}\right] = \left(\frac{1}{\sqrt{V(X)}}\right)^2 V[X - E(X)] = \frac{1}{V(X)} \cdot V(X) = 1$$

1.6 同時確率分布

問1 (a) $1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dxdy = \int_{1}^{3}\int_{1}^{2} c\,dxdy = c\cdot(2-1)(3-1)=2c \quad \therefore c=\frac{1}{2}$

(b) $p_1(x)$について: $1\le x\le 3$の場合は $p_1(x)=\int_{1}^{2}\frac{1}{2}dy=\frac{1}{2}$; それ以外の場合 $p_1(x)=0$

$p_2(y)$について: $1\le y\le 2$の場合は $p_2(y)=\int_{1}^{3}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}\times 2=1$; それ以外の場合 $p_2(y)=0$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,p_1(x)\,dx=\int_{1}^{3}\frac{1}{2}x\,dx=\left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^3=\frac{1}{4}(9-1)=2$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} y\,p_2(y)\,dy=\int_{1}^{2}y\,dy=\left[\frac{1}{2}y^2\right]_1^2=\frac{1}{2}(4-1)=\frac{3}{2}$$

$$V(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-2)^2p_1(x)\,dx=\int_{1}^{3}\frac{1}{2}(x-2)^2dx=\left[\frac{1}{6}(x-2)^3\right]_1^3=\frac{1}{6}(1+1)=\frac{1}{3}$$

$$V(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(y-\frac{3}{2}\right)^2p_2(y)\,dy=\int_{1}^{2}\left(y-\frac{3}{2}\right)^2dy=\left[\frac{1}{3}\left(y-\frac{3}{2}\right)^3\right]_1^2=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{12}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xy\,p(x,y)\,dxdy=\int_{1}^{3}\int_{1}^{2}\frac{1}{2}xy\,dxdy=\frac{1}{2}\int_{1}^{3}x\,dx\cdot\int_{1}^{2}y\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^3\cdot\left[\frac{1}{2}y^2\right]_1^2=\frac{1}{8}(9-1)\cdot(4-1)=3$$

$$\therefore \gamma(X,Y)=3-2\times\frac{3}{2}=0 \qquad \therefore \rho(X,Y)=\frac{\gamma(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}=0$$

問2 (1.6.4)の証明: $\sum_{i=1}^{m}p_{i\cdot}=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}p_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p_{ij}=1$,

$\sum_{j=1}^{n}p_{\cdot j}=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}p_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p_{ij}=1.$

(1.6.8)の証明: $\int_{-\infty}^{\infty}p_1(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)\,dy\right\}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)\,dxdy=1.$

$\int_{-\infty}^{\infty}p_2(y)\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)\,dx\right\}dy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)\,dydx=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)\,dxdy=1$

問3 $E(X)=\mu$, $E(Y)=\nu$ とおく.

(1.6.14)の証明: $\gamma(X,Y)=\sum_i\sum_j(x_i-\mu)(y_j-\nu)p_{ij}=\sum_i\sum_j(x_iy_j-\nu x_i-\mu y_j+\mu\nu)p_{ij}$

$$=\sum_i\sum_j x_iy_jp_{ij}-\nu\underbrace{\sum_i\sum_j x_ip_{ij}}_{=\mu}-\mu\underbrace{\sum_i\sum_j y_jp_{ij}}_{=\nu}+\mu\cdot\nu\underbrace{\sum_i\sum_j p_{ij}}_{=1}$$

$$=\sum_i\sum_j x_iy_jp_{ij}-\mu\nu-\mu\cdot\nu+\mu\cdot\nu=\sum_i\sum_j x_iy_jp_{ij}-\mu\cdot\nu.$$

(1.6.15)の証明:

$$\gamma(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)(y-\nu)p(x,y)\,dx\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(xy-\mu y-\nu x+\mu\cdot\nu)p(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xy\,p(x,y)\,dx\,dy-\mu\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}y\,p(x,y)\,dx\,dy}_{=\nu}-\nu\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x\,p(x,y)\,dx\,dy}_{=\mu}$$

$$+\mu\cdot\nu\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)\,dx\,dy}_{=1}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xy\,p(x,y)\,dx\,dy-\mu\cdot\nu.$$

(1.6.13)の証明: 期待値の定義より

$$E(XY)=\begin{cases}\sum_i\sum_j x_iy_jp_{ij} & (\text{離散型})\\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xy\cdot p(x,y)\,dx\,dy & (\text{連続型})\end{cases}$$

よって(1.6.14)及び(1.6.15)より. $\gamma(X,Y)=E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)$

(1.6.16)の証明: 離散型の場合のみ示す.

$$E(aX+bY)=\sum_i\sum_j(ax_i+by_j)p_{ij}=a\sum_i\sum_j x_ip_{ij}+b\sum_i\sum_j y_jp_{ij}=aE(X)+bE(Y)$$

CHECK

DATE NO.

(1.6.17)の証明: $E(X)=\mu$, $E(Y)=\nu$ とおくと. $E(aX+bY)=a\mu+b\nu$

$\therefore V(aX+bY)=\sum_i\sum_j\{ax_i+by_j-(a\mu+b\nu)\}^2 p_{ij}=\sum_i\sum_j\{a(x_i-\mu)+b(y_j-\nu)\}^2 p_{ij}$

$=\sum_i\sum_j\{a^2(x_i-\mu)^2+2a\cdot b(x_i-\mu)(y_j-\nu)+b^2(y_j-\nu)^2\}p_{ij}$

$=a^2\sum_i\sum_j(x_i-\mu)^2p_{ij}+2ab\sum_i\sum_j(x_i-\mu)(y_j-\nu)p_{ij}+b^2\sum_j(y_j-\nu)^2p_{ij}$

$=a^2\cdot V(X)+2ab\,\gamma(X,Y)+b^2V(Y)$

(1.6.18)の証明: よく知られた Schwartz の不等式: $\left|\sum_{k=1}^n x_k\cdot y_k\right|\leq\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right)^{1/2}$

を用いる:

$$|\gamma(X,Y)|=\left|\sum_i\sum_j(x_i-E(X))(y_j-E(Y))p_{ij}\right|$$

$$=\left|\sum_{(i,j)}\{(x_i-E(X))\sqrt{p_{ij}}\}\{(y_j-E(Y))\sqrt{p_{ij}}\}\right|$$

Schwartzの不等式

$$\leq\left(\sum_{(i,j)}(x_i-E(X))^2p_{ij}\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{(i,j)}(y_j-E(Y))^2p_{ij}\right)^{1/2}$$

$$=\left(\sum_i\sum_j(x_i-E(X))^2p_{ij}\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_i\sum_j(y_j-E(Y))^2p_{ij}\right)^{1/2}$$

$$=\sigma(X)\cdot\sigma(Y)$$

$$\therefore |\rho(X,Y)|=\left|\frac{\gamma(X,Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}\right|\leq 1 \qquad \therefore -1\leq\rho(X,Y)\leq 1$$

(1.6.19)の証明: $\gamma(aX+b,cY+d)=E((aX+b)(cY+d))-E(aX+b)\cdot E(cY+d)$

ここで $(aX+b)(cY+d)=ac\cdot XY+adX+bcY+bd$

$\therefore E((aX+b)(cY+d))=ac\,E(XY)+ad\,E(X)+bc\,E(Y)+bd$

一方. $E(aX+b)\cdot E(cY+d)=\{aE(X)+b\}\{cE(Y)+d\}=ac\cdot E(X)E(Y)+ad\,E(X)$
$+bc\,E(Y)+bd$

$$\therefore \gamma(aX+b,\, cY+d) = ac\{E(XY) - E(X)\cdot E(Y)\} = ac\,\gamma(X,Y)$$

一方 $\sigma(aX+b) = \sqrt{V(aX+b)} = \sqrt{a^2 V(X)} = a\sigma(X)$,

$$\sigma(cY+d) = \sqrt{V(cY+d)} = \sqrt{c^2 V(Y)} = c\cdot\sigma(Y)$$

$$\therefore \rho(aX+b,\, cY+d) = \frac{\gamma(aX+b,\, cY+d)}{\sigma(aX+b)\cdot\sigma(cY+d)} = \frac{ac\,\gamma(X,Y)}{a\sigma(X)\cdot c\sigma(Y)} = \rho(X,Y)$$

問4

Xの周辺分布を$q_i\ (i=1,2,\cdots)$、Yの周辺密度関数を$r(y)$とすると、

$$q_i = \int_{-\infty}^{\infty} p_i(y)\,dy, \quad r(y) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(y)$$

で与えられる。

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i q_i = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_i(y)\,dy$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, r(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} y \sum_{i=1}^{\infty} p_i(y)\,dy$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \{x_i - E(X)\}^2 q_i = \sum_{i=1}^{\infty} \{x_i - E(X)\}^2 \int_{-\infty}^{\infty} p_i(y)\,dy$$

$$V(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \{y - E(Y)\}^2 r(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \{y - E(Y)\}^2 \sum_{i=1}^{\infty} p_i(y)\,dy$$

$$\gamma(X,Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{x_i - E(X)\}\{y - E(Y)\}\, p_i(y)\,dy$$

1.8 確率分布I－正規分布

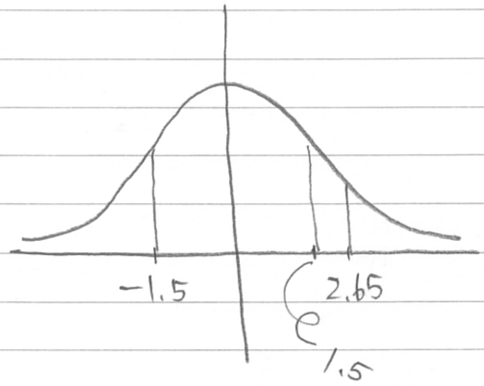
問1 X が $N(30, 100)$ に従うとき, $P(15 \leqq X \leqq 56.5)$ を求めてみる.

$Z = \dfrac{X-30}{10}$ は $N(0, 1)$ に従うので

$$P(15 \leqq X \leqq 56.5) = P\left[\underbrace{\frac{15-30}{10}}_{=-1.5} \leqq Z \leqq \underbrace{\frac{56.5-30}{10}}_{=2.65} \right]$$

$$= \Phi(1.5) + \Phi(2.65)$$

$$= 0.4332 + 0.4960 = 0.9292$$



問2 (a) $P(0 < Z < 1.34) = \Phi(1.34) = 0.4099$

(b) $P(-2.06 < Z < 0) = P(0 < Z < 2.06) = 0.4803$

(c) $P(-1.97 < Z < 0.88) = \Phi(1.97) + \Phi(0.88) = 0.4758 + 0.3106 = 0.7864$

(d) $P(|Z| < 1.23) = 2\Phi(1.23) = 2 \times 0.3907 = 0.7814$

(e) $\Phi(z) = 0.458$ $\therefore z = 1.7279$

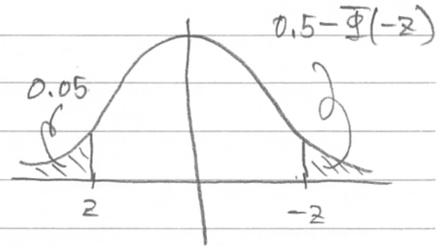
(f) $\Phi(-z) = 0.336$ $\therefore -z = 0.9782$ $\therefore z = -0.9782$

(g) $0.5 - \Phi(z) = 0.025$ $\therefore \Phi(z) = 0.475$ $\therefore z = 1.9600$

(h) $P(Z < z) = 0.05 < 0.5$ なので $z < 0$

$\therefore 0.5 - \Phi(-z) = 0.05$ $\therefore \Phi(-z) = 0.45$

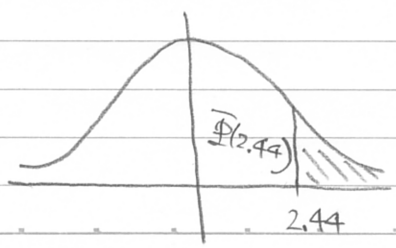
$\therefore -z = 1.6449$ $\therefore z = -1.6449$



(i) $2 \cdot \Phi(z) = 0.95$ $\therefore \Phi(z) = 0.475$ $\therefore z = 1.9600$

(j) $P(Z > 2.44) = 0.5 - \Phi(2.44) = 0.5 - 0.4927$

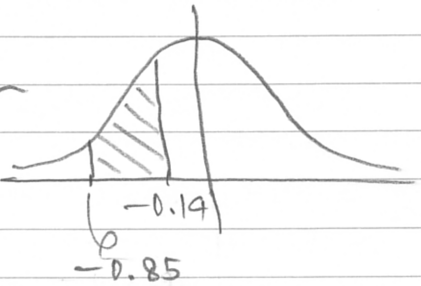
$= 0.0073$



問3 $X \sim N(2.4, 8)$ $\therefore Z = \dfrac{X-2.4}{2\sqrt{2}} \sim N(0,1)$

(a) $P(0<X<2) = P\left(\dfrac{0-2.4}{2\sqrt{2}} < Z < \dfrac{2-2.4}{2\sqrt{2}}\right) = P(-0.85 < Z < -0.14)$

$= \Phi(0.85) - \Phi(0.14) = 0.3023 - 0.0557 = \underline{0.2466}$



(b) $P(|X-2.4|<5.31) = P(-5.31 < X-2.4 < 5.31)$

$= P\left(-\dfrac{5.31}{2\sqrt{2}} < Z < \dfrac{5.31}{2\sqrt{2}}\right)$

$= P(-1.88 < Z < 1.88) = 2\,\Phi(1.88) = 2 \times 0.4699 = \underline{0.9398}$

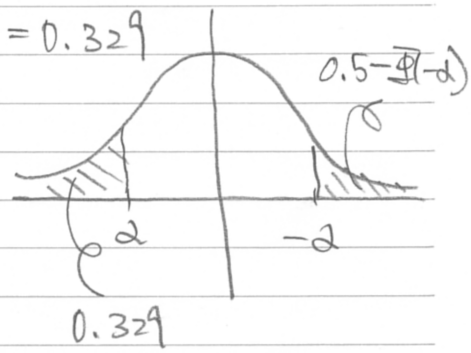
(c) $P(X \leq c) = P\left(\dfrac{X-2.4}{2\sqrt{2}} \leq \dfrac{c-2.4}{2\sqrt{2}}\right) = P\left(Z \leq \dfrac{c-2.4}{2\sqrt{2}}\right) = 0.329 < 0.5$

なので $\dfrac{c-2.4}{2\sqrt{2}} = \alpha < 0$. $\therefore P(Z \leq \alpha) = 0.5 - \Phi(-\alpha) = 0.329$

$\therefore \Phi(-\alpha) = 0.171$ $\therefore -\alpha = 0.4427$ $\therefore \alpha = -0.4427$

$\therefore \dfrac{c-2.4}{2\sqrt{2}} = -0.4427$

$\therefore c = 2.4 - 2\sqrt{2} \times 0.4427 \doteqdot 2.4 - 1.252 \doteqdot 1.15$



(d) $P(|X-2.4|>d) = P\left(\left|\dfrac{X-2.4}{2\sqrt{2}}\right| > \dfrac{d}{2\sqrt{2}}\right) = P\left(|Z| > \dfrac{d}{2\sqrt{2}}\right)$

$= 1 - P\left(|Z| \leq \dfrac{d}{2\sqrt{2}}\right) = 1 - 2\cdot\Phi\left(\dfrac{d}{2\sqrt{2}}\right) = 0.95$

$\therefore \Phi\left(\dfrac{d}{2\sqrt{2}}\right) = 0.025$ $\therefore \dfrac{d}{2\sqrt{2}} = 0.0627$ $\therefore \underline{d = 0.1773}$

問4 (a) $3X-2Y \sim N(3\times 3.2 - 2\times(-6.4),\ 3^2\times 5 + (-2)^2 \times 8)$

$= N(9.6+12.8,\ 45+32) = \underline{N(22.4, 77)}$

(b) $V = 3X-2Y$ とおくと. $V \sim N(22.4, 77)$ $\therefore Z = \dfrac{V-22.4}{\sqrt{77}} \sim N(0,1)$

$\therefore P(V>25) = P\left(\dfrac{V-22.4}{\sqrt{77}} > \dfrac{25-22.4}{\sqrt{77}}\right) \doteqdot P(Z > 0.30)$

$= 0.5 - \Phi(0.30) = 0.5 - 0.1179 = \underline{0.3821}$

$\boxed{問5}$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} I$ とおく.

$$I \underset{\begin{array}{c|c} x & -\infty\to\infty \\ u & -\infty\to\infty \end{array}}{\overset{u=\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}{=\!=\!=\!=}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\cdot\sqrt{2}\sigma\,du = \sqrt{2}\sigma\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du = 2\sqrt{2}\sigma\int_{0}^{\infty} e^{-u^2}du$$

$$du = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}dx$$

$$= 2\sqrt{2}\sigma\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{2\pi}\sigma \quad \therefore \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\times\sqrt{2\pi}\cdot\sigma = 1$$

$\boxed{問6}$ $\displaystyle E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$

$$\underset{\begin{array}{c|c} x & -\infty\to\infty \\ z & -\infty\to\infty \end{array}}{\overset{z=\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}{=\!=\!=\!=}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(\sqrt{2}\sigma z+\mu)e^{-z^2}\cdot\sqrt{2}\sigma\,dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma z+\mu)e^{-z^2}dz = \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z e^{-z^2}dz + \frac{\mu}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz$$

ここで $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} z e^{-z^2}dz = \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}}\int_a^b\left(-\frac{1}{2}e^{-z^2}\right)'dz = \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}}\left[-\frac{1}{2}e^{-z^2}\right]_a^b$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty} e^{-b^2} + \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty} e^{-a^2} = 0$$

一方. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz = 2\int_0^{\infty} e^{-z^2}dz = 2\times\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$

$$\therefore E(X) = \frac{\mu}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\pi} = \mu$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \underset{\begin{array}{c|c} x & -\infty\to\infty \\ z & -\infty\to\infty \end{array}}{\overset{z=\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}{=\!=\!=\!=}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(\sqrt{2}\sigma z)^2 e^{-z^2}\cdot\sqrt{2}\sigma\,dz$$

$$= \frac{2\sigma^2 \cdot \sqrt{2}\,\sigma}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2} dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2} dz$$

ここで

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot z e^{-z^2} dz = \left[z \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-z^2} \right) \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz$$

$$(\text{最右辺の第1項}) = -\frac{1}{2} \lim_{b \to \infty} \frac{b}{e^{b^2}} + \frac{1}{2} \lim_{a \to -\infty} \frac{a}{e^{a^2}} = 0$$

ロピタルの定理

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2} dz = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

$$\therefore V(X) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma^2 \times \frac{1}{2} \sqrt{\pi} = \sigma^2$$

1.9 二項分布

問1 命中する回数をXとすると題意より $X \sim B(10, 0.65)$

(i) $P(X \geqq 7) = P(X=7) + P(X=8) + P(X=9) + P(X=10)$

$= {}_{10}C_7 (0.65)^7 \cdot (0.35)^3 + {}_{10}C_8 \cdot (0.65)^8 \cdot (0.35)^2 + {}_{10}C_9 (0.65)^9 (0.35) + {}_{10}C_{10} (0.65)^{10}$

$= 120 \times 0.00210183 + 45 \times 0.0039034 + 10 \times 0.00724917 + 0.0134627$

$= 0.513827 \fallingdotseq \underline{0.51}$

(ii) $P(X \leqq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$

$= {}_{10}C_0 (0.65)^0 (0.35)^{10} + {}_{10}C_1 (0.65) \cdot (0.35)^9 + {}_{10}C_2 (0.65)^2 \cdot (0.35)^8 + {}_{10}C_3 (0.65)^3 (0.35)^7$

$= 0.0260243 \fallingdotseq \underline{0.026}$

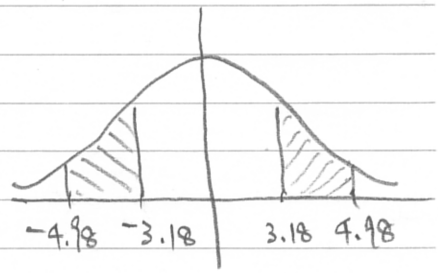
問2 $n = 200$, $p = 0.25$, $q = 0.75$ なので $np = 50 > 5$, $nq = 150 > 5$. よってラプラスの定理が使える.

(a) $P(20 \leqq X < 30)_{B(200, 0.25)} = P(20 - 0.5 \leqq X < 30 + 0.5)_{N(50, 37.5)}$

$= P(19.5 \leqq X < 30.5)_{N(50, 37.5)} = P\left(\dfrac{19.5-50}{\sqrt{37.5}} \leqq Z < \dfrac{30.5-50}{\sqrt{37.5}}\right)$ 6.124

$= P(-4.98 \leqq Z < -3.18)$

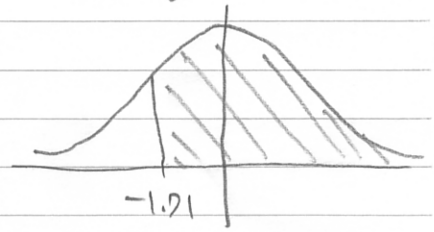
$= \Phi(4.98) - \Phi(3.18) = 0.5 - 0.4993 = \underline{0.0007}$



(b) $P(X \geqq 40)_{B(200, 0.25)} = P(X \geqq 40 - 0.5)_{N(50, 37.5)}$

$= P(X \geqq 39.5)_{N(50, 37.5)} = P\left(Z \geqq \dfrac{39.5-50}{\sqrt{37.5}}\right) = P(Z \geqq -1.71)$

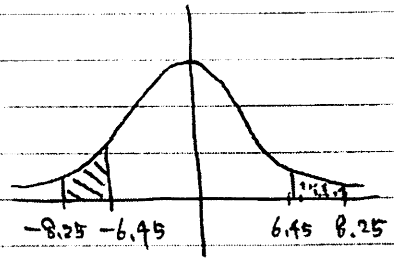
$= 0.5 + \Phi(1.71) = 0.5 + 0.4564 = \underline{0.9564}$



(c) $P(0 \leqq X \leqq 10)_{B(200, 0.25)} = P(-0.5 \leqq X \leqq 10.5)_{N(50, 37.5)}$

$= P\left(\frac{-0.5-50}{\sqrt{37.5}} \leq Z \leq \frac{10.5-50}{\sqrt{37.5}}\right) = P(-8.25 \leq Z \leq -6.45)$

$= \Phi(8.25) - \Phi(6.45) \doteqdot 0.5 - 0.5 = 0$



問3 1000個の製品の中の不良品の個数をX個とすると

題意より $X \sim B(1000, 0.008)$. $n=1000$, $p=0.008$, $q=0.992$, $np=8>5$,

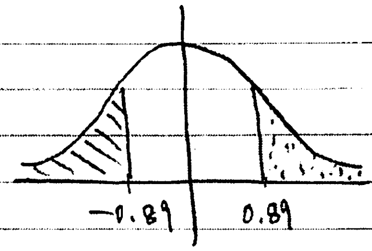
$nq=992>5$ なので ラプラスの定理による近似計算が使える. このとき $npq=7.936$

$\therefore \sqrt{npq} \doteqdot 2.817$. よって

$P(X \leq 5)_{B(1000,\,0.008)} = P(X \leq 5.5)_{N(8,\,2.817^2)}$

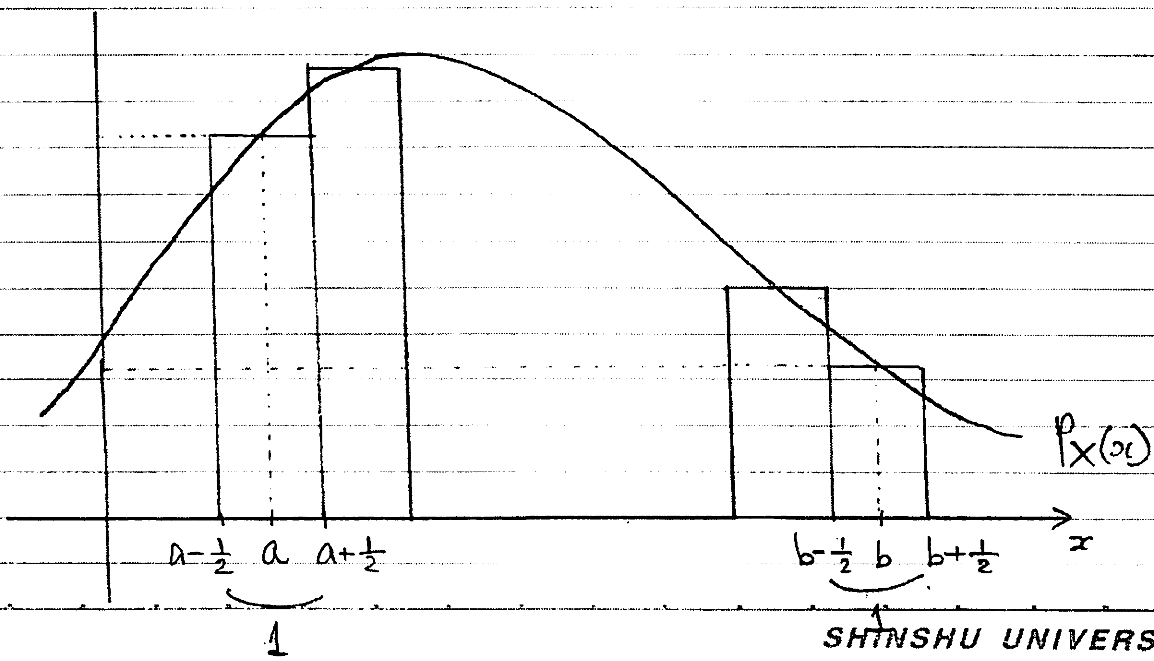
$= P\left(Z \leq \frac{5.5-8}{2.817}\right) = P(Z \leq -0.89)$

$= 0.5 - \Phi(0.89) = 0.5 - 0.3133 = 0.1867$



$P(X=0) = {}_{1000}C_0\,(0.008)^0 \cdot (0.992)^{1000} = 0.992^{1000} \doteqdot 0.0003$

問4



定理1.9.3の近似計算の考え方は

$$P(a \leq X \leq b)_{B(n,p)}$$

$$= P(X=a)_{B(n,p)} + P(X=a+1)_{B(n,p)} + \cdots + P(X=b)_{B(n,p)}$$

$\fallingdotseq$ 上図の各長方形の和

$$\fallingdotseq \int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} p_X(x)dx + \int_{a+\frac{1}{2}}^{a+\frac{3}{2}} p_X(x)dx + \cdots + \int_{b-\frac{1}{2}}^{b+\frac{1}{2}} p_X(x)dx$$

$$= \int_{a-\frac{1}{2}}^{b+\frac{1}{2}} p_X(x)dx = P\left(a-\frac{1}{2} \leq X \leq b+\frac{1}{2}\right)_{N(np,\, npq)}$$

なので、a, b の代わりに $a-\frac{1}{2}$, $b+\frac{1}{2}$ にする必要がある。

$\boxed{\text{問5}}$ 2項展開 $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k x^k y^{n-k}$ の両辺を x で偏微分して、両辺に x をかけると

$$nx(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\,{}_nC_k x^k y^{n-k} \qquad (1)$$

上式に $x=p$, $y=q$ を代入すると

$$np = \sum_{k=0}^{n} k\,{}_nC_k p^k q^{n-k} = E(X)$$

次に、(1)の両辺を x で偏微分して両辺に x をかけると

$$nx(x+y)^{n-1} + n(n-1)x^2(x+y)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k^2\,{}_nC_k x^k y^{n-k}$$

上式に $x=p$, $y=q$ を代入すると

$$np + n(n-1)p^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2\,{}_nC_k p^k q^{n-k} = E(X^2)$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = np + n(n-1)p^2 - n^2p^2 = np - np^2 = np(1-p)$$
$$= npq$$

DATE NO.

1.10 ポアソン分布と指数分布

問1 (i) Xを1時間の来客数とすると題意より、Xは$\lambda=4$のポアソン分布に従う。

$$P(X \geqq 10) = P(X=10)+P(X=11)+P(X=12)+P(X=13)+P(X=14)+\cdots$$

$$= 0.0053+0.0019+0.0006+0.0002+0.0001 = \underline{0.0081}$$

ポアソン分布表

(ii) Yを1人の客が来てから、次の客が来るまでの待ち時間（時）とすると題意より、Yは$\lambda=4$の指数分布に従う。よって

$$P(Y \geqq 0.5) = \int_{0.5}^{\infty} 4e^{-4x}\,dx = \left[-e^{-4x}\right]_{0.5}^{\infty} = \frac{1}{e^2} \fallingdotseq \underline{0.135}$$

30分以上客が来ない

問2 e^tのマクローリン展開 $e^t=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}$ の両辺をtで微分して、両辺にtを掛けると

$$te^t = \sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\frac{t^k}{k!} \qquad (1)$$

上式で$t=\lambda$と置くと、

$$\lambda e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!} \quad \therefore \lambda = \sum_{k=0}^{\infty} k\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = E(X).$$

次に、(1)の両辺をtで微分して、両辺にtを掛けると、

$$(t^2+t)e^t = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\cdot\frac{t^k}{k!}$$

上式で$t=\lambda$と置くと、

$$(\lambda^2+\lambda)e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k!} \quad \therefore \lambda^2+\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\cdot\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right) = E(X^2) = V(X)+\{E(X)\}^2$$

$$\therefore V(X) = (\lambda^2+\lambda)-\lambda^2 = \lambda$$

CHECK

DATE　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　NO.

$\boxed{問3}$ $E(X) = \int_0^\infty x\,\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lambda \int_0^\infty x e^{-\lambda x}\,dx$

ロピタルの定理

ここで $\int_0^\infty x e^{-\lambda x}\,dx = \left[-\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = -\frac{1}{\lambda}\underset{\shortparallel\atop 0}{\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{\lambda x}}} + \frac{1}{\lambda}\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^\infty$

$= \frac{1}{\lambda^2}$

$\therefore E(X) = \lambda \times \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$

次に $E(X^2) = \int_0^\infty x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lambda \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x}\,dx$

ここで $\int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x}\,dx = \underset{\shortparallel\atop 0}{\left[-\frac{x^2}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^\infty} + \frac{2}{\lambda}\int_0^\infty x e^{-\lambda x}\,dx = \frac{2}{\lambda}\cdot\frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^3}$

$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \lambda \cdot \frac{2}{\lambda^3} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$

$\boxed{1.11}$ 2次元正規分布.

$\boxed{問1}$ (1.11.2)の証明:

$$p_1(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2(1-\rho^2)}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Q}\,dy = (*)$$

ただし.

$$Q = -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} - \frac{2\rho}{\sigma_x\sigma_y}(x-\mu_x)(y-\mu_y)\right\}$$

$$= -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} - \frac{2\rho(x-\mu_x)}{\sigma_x}\right\}^2 + \frac{\rho^2(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2(1-\rho^2)}$$

$$\therefore (*) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2(1-\rho^2)}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{\rho^2(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2(1-\rho^2)}\right\}$$

$$\times \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left\{\frac{1}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} - \frac{2\rho(x-\mu_x)}{\sigma_x}\right)\right\}^2\right] dy}_{= I}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right\} \times I$$

$t = \dfrac{1}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}\left\{\dfrac{y-\mu_y}{\sigma_y} - \dfrac{2\rho(x-\mu_x)}{\sigma_x}\right\}$ とおくと. $dt = \dfrac{1}{\sigma_y\sqrt{2(1-\rho^2)}}\,dy$

y	$-\infty \to \infty$
t	$-\infty \to \infty$

$$\therefore I = \sigma_y\sqrt{2(1-\rho^2)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt}_{= \sqrt{\pi}} = \sigma_y\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}$$

$$\therefore p_1(x) = \frac{\sigma_y\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$ #

(1.11.3)の証明も同様 #

DATE NO. CHECK

問2 (1.11.4)の証明:

$$\sigma(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_x)(y-\mu_y)\cdot\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2}Q}\,dxdy=(*)$$

ただし

$$Q=\frac{1}{1-\rho^2}\left\{\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2}-2\rho\cdot\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\cdot\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}+\frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right\}$$

$\begin{cases} u=\dfrac{x-\mu_x}{\sigma_x} \\ v=\dfrac{y-\mu_y}{\sigma_y}\end{cases}$ と変数変換すると ヤコビアンは $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_y\end{vmatrix}=\sigma_x\cdot\sigma_y$

ゆえに 2重積分の変数変換の公式より

$$(*)=\frac{\sigma_x\cdot\sigma_y}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}u\cdot v\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2-2\rho uv+v^2)\right\}dudv$$

$$=\frac{\sigma_x\sigma_y}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}ve^{-\frac{v^2}{2}}dv\int_{-\infty}^{\infty}u\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}e^{-\frac{(u-\rho v)^2}{2(1-\rho^2)}}du$$

これは $N(\rho v, 1-\rho^2)$ の密度関数

$$=\frac{\sigma_x\sigma_y}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\rho v^2e^{-\frac{v^2}{2}}dv$$

$$=\rho\sigma_x\sigma_y\int_{-\infty}^{\infty}v^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}dv=\rho\sigma_x\cdot\sigma_y$$

//

これは $N(0,1)$ の密度関数

問3

問1 (p.66) ノートを参照せよ

問2 (p.66) (i) χ^2分布表より. $a=\chi^2_{18}(0.05)=28.9$

(ii) χ^2分布表より. $\chi^2_n(1-0.025)=\chi^2_n(0.975)=11.7$となる$n$を探すと$n=23$

問1 (p.93) 題意より $n=50$, $\sigma=5.54$, $\bar{X}=169.8$, $\alpha=0.01$. 正規分布表Ⅱより $z(\alpha/2)=z(0.005)=2.5758$. よって母平均の区間推定(母分散既知)の公式より

$$169.8-\frac{5.54}{\sqrt{50}}\times 2.5759<\mu<169.8+\frac{5.54}{\sqrt{50}}\times 2.5759 \quad \therefore 169.8-2.02<\mu<169.8+2.02$$

$\therefore 167.8<\mu<171.8$

信頼度を100%で推定しようとすると $\alpha=0$. $\therefore z(\alpha/2)=z(0)=\infty$. よって信頼区間は $-\infty<\mu<\infty$.

問2 (p.93) 題意より $n=20$, $\bar{X}=280$, $\sigma=60$ で母平均の区間推定(母分散既知)の公式を用いる.

- 信頼度90%: $\alpha=0.1$. 正規分布表より $z(\alpha/2)=z(0.05)=1.6449$. これらを信頼区間に代入:

$$280-\frac{60}{\sqrt{20}}\times 1.6449<\mu<280+\frac{60}{\sqrt{20}}\times 1.6449 \quad \therefore 280-22.06<\mu<280+22.06$$

$\therefore 257.9<\mu<302.1$

- 信頼度95%: $\alpha=0.05$ 正規分布表より $z(\alpha/2)=z(0.025)=1.96$ これらを信頼区間に代入:

$$280-\frac{60}{\sqrt{20}}\times 1.96<\mu<280+\frac{60}{\sqrt{20}}\times 1.96 \quad \therefore 280-26.30<\mu<280+26.30$$

$\therefore 253.7<\mu<306.3$

- 信頼度99%: $\alpha=0.01$ 正規分布表より $z(\alpha/2)=z(0.005)=2.5758$ これらを信頼区間に代入:

$$280-\frac{60}{\sqrt{20}}\times 2.5758<\mu<280+\frac{60}{\sqrt{20}}\times 2.5758 \quad \therefore 280-34.56<\mu<280+34.56$$

$\therefore 245.4<\mu<314.6$

- 95%信頼区間の幅は $2\times\left(\frac{60}{\sqrt{n}}\times 1.96\right)=\frac{235.2}{\sqrt{n}}$. よって題意より $\frac{235.2}{\sqrt{n}}\leqq 5$

$\therefore \sqrt{n}\geqq 47.04$ $\therefore n\geqq 2212.8$ よって 2213個

問1 (p.100) 題意より $n=50$, $\alpha=0.05$. よって母分散の区間推定(母平均未知)の公式より

$$\frac{49S^2}{\chi^2_{49}(\alpha/2)}<\sigma^2<\frac{49S^2}{\chi^2_{49}(1-\alpha/2)}$$

ここで χ^2分布表より $\chi^2_{49}(\alpha/2)\fallingdotseq\chi^2_{50}(0.025)=71.4$, $\chi^2_{49}(1-\alpha/2)\fallingdotseq\chi^2_{50}(0.975)=32.4$.
また与えられたデータより $\bar{X}=171.304$, $S^2=\frac{1}{49}\{(X_1^2+\cdots+X_{50}^2)-50\bar{X}^2\}=27.14$. よって

$$\frac{49\times 27.14}{71.4}<\sigma^2<\frac{49\times 27.14}{32.4} \quad \therefore 18.63<\sigma^2<41.05$$

問2 (p.100) 題意より $n=10$, $\alpha=0.1$, また与えられたデータより $\bar{X}=1.701$, $s=0.0218$

(i) 母分散の区間推定(母平均既知)の公式より

$$\frac{\sum_{i=1}^{10}(X_i-1.708)^2}{\chi^2_{10}(\alpha/2)} < \sigma^2 < \frac{\sum_{i=1}^{10}(X_i-1.708)^2}{\chi^2_{10}(1-\alpha/2)}$$

ここで χ^2分布表より $\chi^2_{10}(\alpha/2)=\chi^2_{10}(0.05)=18.31$, $\chi^2_{10}(1-\alpha/2)=\chi^2_{10}(0.95)=3.94$

またデータより

$$\sum_{i=1}^{10}(X_i-1.708)^2=0.00478 \quad よって \quad \sqrt{\frac{0.00478}{18.31}} < \sigma < \sqrt{\frac{0.00478}{3.94}}$$

$\therefore$ $0.00162 < \sigma < 0.0348$

(ii) 母分散の区間推定(母平均未知)の公式より $\dfrac{9s^2}{\chi^2_9(\alpha/2)} < \sigma^2 < \dfrac{9s^2}{\chi^2_9(1-\alpha/2)}$

ここで χ^2分布表より $\chi^2_9(\alpha/2)=\chi^2_9(0.05)=16.92$, $\chi^2_9(1-\alpha/2)=\chi^2_9(0.95)=3.33$ よって

$$\frac{3\times 0.0218}{\sqrt{16.92}} < \sigma < \frac{3\times 0.0218}{\sqrt{3.33}} \quad \therefore\ 0.0159<\sigma<0.0358$$

問1 (p.104) 題意より $n=500$, $p=11/500=0.022$, $\alpha=0.01$. よって母比率の区間推定(大標本)の公式より

$$0.022-\sqrt{\frac{0.022\times(1-0.022)}{500}}\times z(\alpha/2) < p < 0.022+\sqrt{\frac{0.022\times(1-0.022)}{500}}\times z(\alpha/2)$$

ここで正規分布表IIより $z(\alpha/2)=z(0.005)=2.5758$ よって

$$0.022-\sqrt{\frac{0.022\times0.978}{500}}\times2.5758 < p < 0.022-\sqrt{\frac{0.022\times0.978}{500}}\times2.5758$$

$\therefore 0.022-0.0169<p<0.022+0.0169$ $\therefore$ $0.0051<p<0.0389$

問1 (p.122) 題意より母平均の検定方式で両側検定を行う.

- 母平均 μ と比較する値 $\mu_0 = 12.6$
- 標本の大きさ $n = 20$
- 母標準偏差の推定値 $\sigma = 1.8$
- 標本平均の実現値 $\overline{X} = 13.2$

(1) 帰無仮説 $H_0 : \mu = 12.6$

(2) 対立仮説 $H_1 : \mu \neq 12.6$

(3) 検定統計量：標本平均 $\overline{X}$. 仮説 H_0 のもとでは $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

(4) 棄却域の設定：有意水準 $\alpha = 0.05$ $\therefore z(\alpha/2) = z(0.025) = 1.96$

$\therefore$ 棄却域：$Z < -1.96$, $Z > 1.96$

(5) 実現値の計算：

$$Z = \frac{13.2 - 12.6}{1.8/\sqrt{20}} \fallingdotseq 1.49$$

(6) 結論：Z の実現値は棄却域に入らない. 仮説 H_0 は棄却されない. すなわち、「改良の効果があったとは言えない（有意水準5%）」

問2 (p.122) 題意より母平均の検定方式で両側検定を行う.

- 母平均 μ と比較する値 $\mu_0 = 12.6$
- 標本の大きさ $n = 50$
- 母標準偏差の推定値 $\sigma = 1.8$
- 標本平均の実現値 $\overline{X} = 13.4$

(1) 帰無仮説 $H_0 : \mu = 12.6$

(2) 対立仮説 $H_1 : \mu \neq 12.6$

(3) 検定統計量：標本平均 $\overline{X}$. 仮説 H_0 のもとでは $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

(4) 棄却域の設定：有意水準 $\alpha = 0.05$ $\therefore z(\alpha/2) = z(0.025) = 1.96$

$\therefore$ 棄却域：$Z < -1.96$, $Z > 1.96$

(5) 実現値の計算：$Z = \dfrac{13.4 - 12.6}{1.8/\sqrt{50}} \fallingdotseq 3.14$

(6) 結論：Z の実現値は棄却域に入る. 仮説 H_0 は棄却される. すなわち,「改良の効果があった（有意水準5%）」

問3 (p.122) 題意より ~~母~~平均の検定方式で左側検定を行う.

- ~~母~~平均μと比較する値 $\mu_0=49.4$
- 標本の大きさ $n=200$
- ~~母~~標準偏差の推定値 $\sigma=6.91$
- 標本平均の実現値 $\overline{X}=48.2$

(1) 帰無仮説 $H_0: \mu=49.4$

(2) 対立仮説 $H_1: \mu<49.4$

(3) 検定統計量: 標本平均 $\overline{X}$. 仮説H_0のもとでは $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

(4) 棄却域の設定: 有意水準 $\alpha=0.05$ $\therefore z(\alpha)=z(0.05)=1.6449$

$\therefore$ 棄却域: $Z<-1.6449$

(5) 実現値の計算: $Z=\dfrac{48.2-49.4}{6.91/\sqrt{200}} \fallingdotseq -2.456$

(6) 結論: Zの実現値は棄却域に入る. よって仮説H_0は棄却される. すなわち「平均体重は全国平均を下まわる (有意水準5%)」.

問1 (p.136) 題意より ~~母~~分散の検定方式で右側検定を行う.

- ~~母~~分散σ^2と比較する値 $\sigma_0^2=10^2$
- 標本の大きさ $n=30$
- 標本分散の実現値 $s^2=11.8^2$

(1) 帰無仮説 $H_0: \sigma^2=10^2$

(2) 対立仮説 $H_1: \sigma^2>10^2$

(3) 検定統計量: 標本分散 s^2. 仮説H_0のもとでは $\chi^2=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$ ~ 自由度29のχ^2分布

(4) 棄却域の設定: 有意水準 $\alpha=0.05$ $\therefore \chi^2_{29}(0.05)=42.6$ $\therefore$ 棄却域: $\chi^2>42.6$

(5) 実現値の計算:

$$\chi^2=\frac{29\times 11.8^2}{10^2} \fallingdotseq 40.4$$

(6) 結論: χ^2の実現値は棄却域に入らない. ゆえに仮説H_0は棄却されない. すなわち「強度のバラツキに対する望ましい条件を満たしていないとは言えない (有意水準5%)」

問1 (p.139) 題意より母比率の検定(大標本)で両側検定を行う.

- 母比率 p と比較する値 $p_0 = 4/(3\pi)$
- 標本の大きさ $n=500$
- 標本比率の実現値 $P = 219/500 \fallingdotseq 0.438$

(1) 帰無仮説 H_0: $p = 4/(3\pi)$

(2) 対立仮説 H_1: $p \neq 4/(3\pi)$

(3) 検定統計量: 標本比率 P. ここで $np_0 \fallingdotseq 213 > 5$ かつ $nq_0 = n(1-p_0) \fallingdotseq 287 > 5$.
よって仮説 H_0 のもとでは近似的に

$$Z = \frac{P - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \sim N(0,1)$$

(4) 棄却域の設定: 有意水準 $\alpha = 0.01$ $\therefore z(\alpha/2) = z(0.005) = 2.5758$
$\therefore$ 棄却域: $Z < -2.5758$, $Z > 2.5758$

(5) 実現値の計算: $$Z = \frac{0.438 - \frac{4}{3\pi}}{\sqrt{\frac{4}{3\pi}\left(1-\frac{4}{3\pi}\right)/500}} \fallingdotseq 0.6147$$

(6) 結論: Z の実現値は棄却域に入らない. ゆえに仮説 H_0 は棄却されない. すなわち,
「交差確率は $\frac{4}{3\pi}$ に等しくないとは言えない(有意水準1%)」.

問3 (p.139) 題意より母比率の検定(大標本)方式で両側検定を行う.

- 母比率 p と比較する値 $p_0 = \frac{53.74}{100} = 0.5374$
- 標本の大きさ $n=1000$
- 標本比率の実現値 $P = \frac{541}{1000} = 0.541$

(1) 帰無仮説 H_0: $p = 0.5374$

(2) 対立仮説 H_1: $p \neq 0.5374$

(3) 検定統計量: 標本比率 P. ここで $np_0 \fallingdotseq 537 > 5$, $nq_0 = n(1-p_0) \fallingdotseq 463 > 5$
よって仮説 H_0 のもとでは近似的に

$$Z = \frac{P - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \sim N(0,1)$$

(4) 棄却域の設定: 有意水準 $\alpha = 0.01$. $\therefore z(\alpha/2) = z(0.005) = 2.5758$
$\therefore$ 棄却域: $Z < -2.5758$, $Z > 2.5758$

(5) 実現値の計算：

$$z = \frac{0.541 - 0.5374}{\sqrt{0.5374(1-0.5374)/1000}} \fallingdotseq 0.2283$$

(6) 結論：zの実現値は棄却域に入らない．ゆえに仮説H_0は棄却されない．すなわち「両推定値に有意の差があるとは言えない（有意水準1%）」