1.1 確率

[問1] (i) 玉の全部が9個、白玉は4個  $\therefore \frac{4}{9}$  (ii)  $\frac{{}_5C_2}{{}_9C_2} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times \frac{2 \times 1}{4 \times 3} = \frac{5}{18}$

(iii)  $\frac{{}_5C_3 + {}_4C_2}{{}_9C_5} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{2 \times 1}{2 \times 1} \times \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 5} = \frac{5 \times 4^2}{2 \times 6} = \frac{10}{3}$

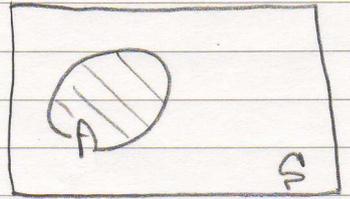
[問2] 実験: 面積  $S$  の領域内のどこか位置に点  $E$  を打つ

標本点: 領域内の点

標本空間: 領域内の点の集合

事象: 領域内の部分領域  $A$  の点の集合

確率:  $P(A) = \frac{A}{S}$



I:  $A$  の面積  $0 \leq A \leq S \therefore 0 \leq P(A) \leq 1$

II:  $P(S) = \frac{S}{S} = 1, P(\emptyset) = \frac{0}{S} = 0$

III  $A, B$  が互いに排反であるとき  $A$  と  $B$  の共通部分がないから  $A \cup B$  の面積は  $A+B$

$\therefore P(A \cup B) = \frac{A+B}{S} = \frac{A}{S} + \frac{B}{S} = P(A) + P(B)$

[問3]  $\alpha$ : 針の中心  $M$  から最近の平行線までの距離

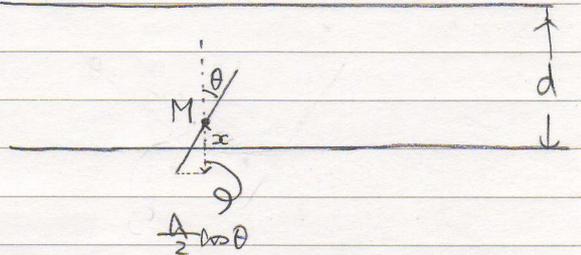
$\theta$ : 平行線に交差する直線と針の角 (正の最小角)

$\alpha$  のとり得る値の範囲:  $0 \leq \alpha \leq \frac{d}{2}$

$\theta$  のとり得る値の範囲:  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

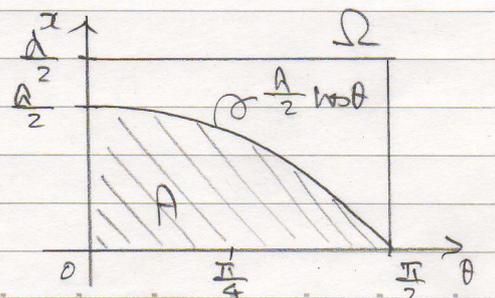
標本空間  $\Omega = \{(\alpha, \theta) : 0 \leq \alpha \leq \frac{d}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$

針が平行線と交差する事象  $A = \{(\alpha, \theta) \in \Omega : \alpha \leq \frac{A}{2} \cos \theta\}$



(由2)の結果より.

$P(A) = \frac{A \text{ の面積}}{\Omega \text{ の面積}} = \frac{\int_0^{\pi/2} \frac{A}{2} \cos \theta d\theta}{\frac{\pi}{2} \times \frac{d}{2}}$





$$= \frac{\frac{A}{2} [\sin \theta]_0^{\frac{\pi}{2}}}{\frac{\pi}{2} d} = \frac{A}{2} \times \frac{4}{\pi d} = \frac{2A}{\pi d}$$

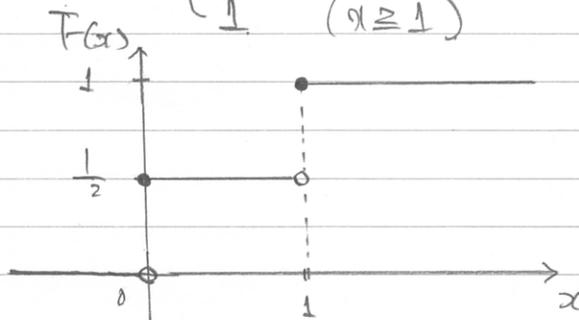
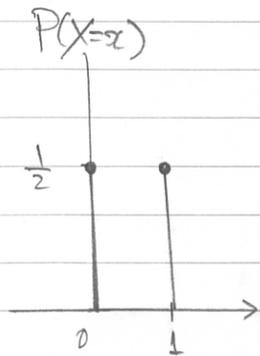
### 1.3 離散型確率変数と確率分布

例1  $X$  が得る値は  $0 \leq 1$ .  $X$  の確率分布表

$$P(X=0) = P(X=1) = 1/2$$

$X$ の値	0	1	計
相対確率	1/2	1/2	1

$$X \text{ の分布関数 } F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1/2 & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (x \geq 1) \end{cases}$$

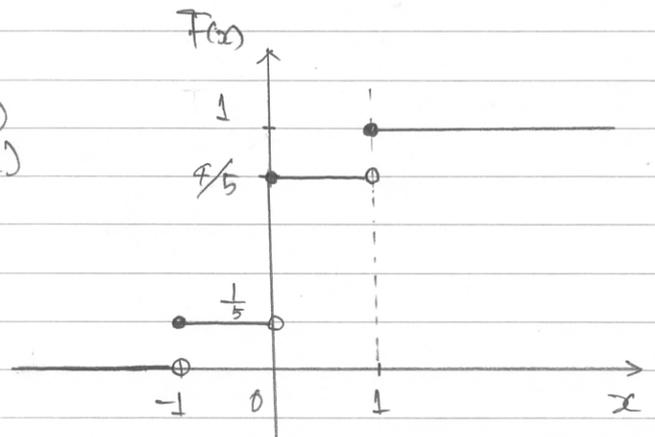


$X$  の確率分布表

$X$  の分布関数

例2 (i)  $\frac{1}{5} + \frac{3}{5} + p = 1 \therefore p = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$  (ii)  $P(X^2=1) = P(X=-1) + P(X=1)$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \quad \text{(iii) } F(x) = \begin{cases} 0 & (x < -1) \\ 1/5 & (-1 \leq x < 0) \\ 4/5 & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (1 \leq x) \end{cases}$$



$X$  の分布関数



**例3** (i)  $X = 2$ 個のサイコロの目之和  $X = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ .  
 2個のサイコロの目之和  $(i, j)$  の表す、サイコロの総数  $= 6 \times 6 = 36$  通り.

$$P(X=2) = (1,1) \text{ の表す } = \frac{1}{36}, \quad P(X=3) = (1,2), (2,1) \text{ の表す } = \frac{2}{36}, \quad P(X=4) = (1,3), (2,2),$$

$$(3,1) \text{ の表す } = \frac{3}{36}, \quad P(X=5) = (1,4), (2,3), (3,2), (4,1) \text{ の表す } = \frac{4}{36}, \quad P(X=6) = (1,5), (2,4), (3,3),$$

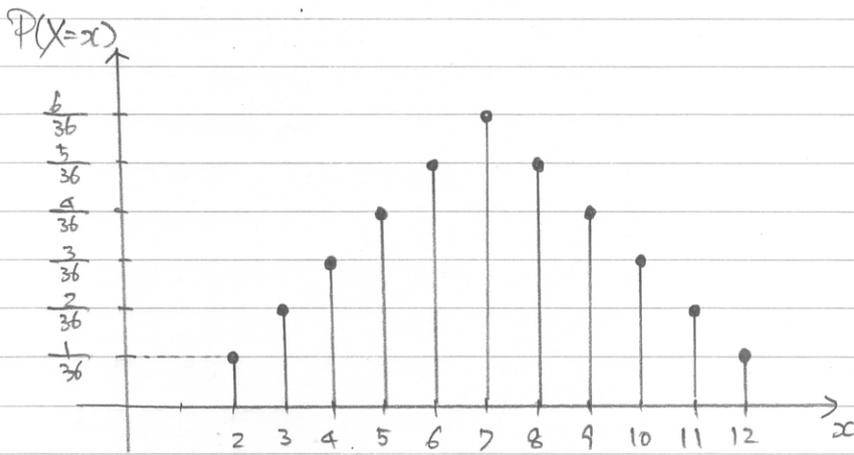
$$(4,2), (5,1) \text{ の表す } = \frac{5}{36}, \quad P(X=7) = (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1) \text{ の表す } = \frac{6}{36},$$

$$P(X=8) = (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2) \text{ の表す } = \frac{5}{36}, \quad P(X=9) = (3,6), (4,5), (5,4), (6,3)$$

$$\text{ の表す } = \frac{4}{36}, \quad P(X=10) = (4,6), (5,5), (6,4) \text{ の表す } = \frac{3}{36}, \quad P(X=11) = (5,6), (6,5) \text{ の表す}$$

$$= \frac{2}{36}, \quad P(X=12) = (6,6) \text{ の表す } = \frac{1}{36}$$

$X$ の値	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
出現確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1



$X$  の確率分布表

$$(ii) P(4 \leq X \leq 8) = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) + P(X=7) + P(X=8) = \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} = \frac{23}{36}$$



(ii)  $F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 2) \\ 1/36 & (2 \leq x < 3) \\ 3/36 & (3 \leq x < 4) \\ 6/36 & (4 \leq x < 5) \\ 10/36 & (5 \leq x < 6) \\ 15/36 & (6 \leq x < 7) \\ 21/36 & (7 \leq x < 8) \\ 26/36 & (8 \leq x < 9) \\ 30/36 & (9 \leq x < 10) \\ 33/36 & (10 \leq x < 11) \\ 35/36 & (11 \leq x < 12) \\ 1 & (x \geq 12) \end{cases}$   $F(x)$  の ~~区間~~ 省略

(iv)  $P(5 \leq X \leq 10) = P(X=5) + P(X=6) + P(X=7) + P(X=8) + P(X=9) + P(X=10)$   
 $= \{F(5) - F(4)\} + \{F(6) - F(5)\} + \{F(7) - F(6)\} + \{F(8) - F(7)\} + \{F(9) - F(8)\} + \{F(10) - F(9)\}$   
 $= F(10) - F(4) = 33/36 - 6/36 = 27/36 = \underline{\underline{3/4}}$

**問4** (i) ~~区間~~ (ii)  $P(X=0) = F(0) = \underline{\underline{1/4}}$ ,  $P(X=1) = F(1) - F(0) = 3/4 - 1/4 = 2/4 = \underline{\underline{1/2}}$

$P(X=2) = F(2) - F(1) = 1 - 3/4 = \underline{\underline{1/4}}$

(iii) $X$ の値	0	1	2	計	<del>区間</del> 省略
出現確率	1/4	1/2	1/4	1	

**[1.2] 事象の独立性とベイズの定理**

**[問1]** 製品A, B, Cが不良である事象をそれぞれ  $A, B, C$ , 製品が不良である事象  $E$  とする。Bayesの定理を用いて

$$\begin{aligned}
 P(A|E) &= \frac{P(A) \cdot P(E|A)}{P(A)P(E|A) + P(B) \cdot P(E|B) + P(C) \cdot P(E|C)} \\
 &= \frac{0.4 \times 0.02}{0.4 \times 0.02 + 0.3 \times 0.04 + 0.3 \times 0.05} = \frac{0.008}{0.008 + 0.012 + 0.015} \\
 &= \frac{0.008}{0.035} \approx 0.23
 \end{aligned}$$

**[問2]** 100点の2人  $a, b$  とする。正解の個数を  $(a, b) = (\text{男}, \text{男}), (\text{男}, \text{女}), (\text{女}, \text{男}),$

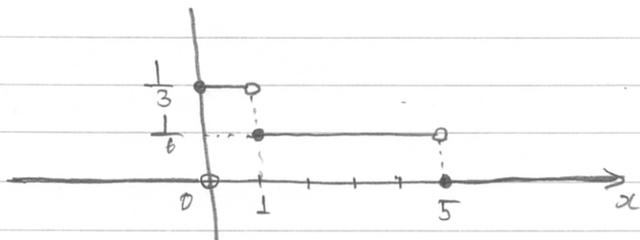
$(\text{女}, \text{女})$  の4通り。ただし同様に確からしいとする。  $A =$  2人共女子である事象,

$B =$  1人女子である事象とする。求める確率  $P(A|B)$ .

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

**1.4** 連続型確率変数と確率密度関数

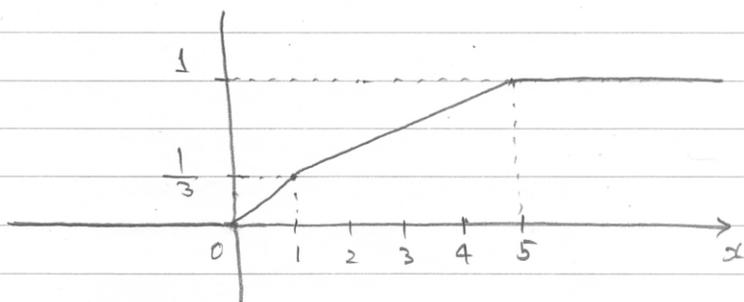
**問1** (i)  $1 = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{3} dx + \int_1^5 c dx = \frac{1}{3} + 4c \therefore 4c = \frac{2}{3} \therefore c = \frac{1}{6}$

密度関数  $p(x)$  のグラフ

(ii)  $P(\frac{1}{2} \leq X < 4) = \int_{\frac{1}{2}}^4 p(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{3} dx + \int_1^4 \frac{1}{6} dx = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times 3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

(iii)  $x < 0$  なら  $F(x) = 0$ ;  $0 \leq x < 1$  なら  $F(x) = \int_0^x \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3}x$ ;  $1 \leq x < 5$  なら

$F(x) = \int_0^1 \frac{1}{3} dx + \int_1^x \frac{1}{6} dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}(x-1) = \frac{x+1}{6}$ ;  $x \geq 5$  なら  $F(x) = 1$

分布関数  $F(x)$  のグラフ

**問2** 閉区間  $[0, 1]$  の中の任意の実数  $y$  と  $1/2$  と  $1/3$  と  $2/3$  と  $1/4$  と  $3/4$  と  $1/5$  と  $4/5$  と  $1/6$  と  $5/6$  と  $1/7$  と  $6/7$  と  $1/8$  と  $7/8$  と  $1/9$  と  $8/9$  と  $1/10$  と  $9/10$  と  $1/11$  と  $10/11$  と  $1/12$  と  $11/12$  と  $1/13$  と  $12/13$  と  $1/14$  と  $13/14$  と  $1/15$  と  $14/15$  と  $1/16$  と  $15/16$  と  $1/17$  と  $16/17$  と  $1/18$  と  $17/18$  と  $1/19$  と  $18/19$  と  $1/20$  と  $19/20$  と  $1/21$  と  $20/21$  と  $1/22$  と  $21/22$  と  $1/23$  と  $22/23$  と  $1/24$  と  $23/24$  と  $1/25$  と  $24/25$  と  $1/26$  と  $25/26$  と  $1/27$  と  $26/27$  と  $1/28$  と  $27/28$  と  $1/29$  と  $28/29$  と  $1/30$  と  $29/30$  と  $1/31$  と  $30/31$  と  $1/32$  と  $31/32$  と  $1/33$  と  $32/33$  と  $1/34$  と  $33/34$  と  $1/35$  と  $34/35$  と  $1/36$  と  $35/36$  と  $1/37$  と  $36/37$  と  $1/38$  と  $37/38$  と  $1/39$  と  $38/39$  と  $1/40$  と  $39/40$  と  $1/41$  と  $40/41$  と  $1/42$  と  $41/42$  と  $1/43$  と  $42/43$  と  $1/44$  と  $43/44$  と  $1/45$  と  $44/45$  と  $1/46$  と  $45/46$  と  $1/47$  と  $46/47$  と  $1/48$  と  $47/48$  と  $1/49$  と  $48/49$  と  $1/50$  と  $49/50$  と  $1/51$  と  $50/51$  と  $1/52$  と  $51/52$  と  $1/53$  と  $52/53$  と  $1/54$  と  $53/54$  と  $1/55$  と  $54/55$  と  $1/56$  と  $55/56$  と  $1/57$  と  $56/57$  と  $1/58$  と  $57/58$  と  $1/59$  と  $58/59$  と  $1/60$  と  $59/60$  と  $1/61$  と  $60/61$  と  $1/62$  と  $61/62$  と  $1/63$  と  $62/63$  と  $1/64$  と  $63/64$  と  $1/65$  と  $64/65$  と  $1/66$  と  $65/66$  と  $1/67$  と  $66/67$  と  $1/68$  と  $67/68$  と  $1/69$  と  $68/69$  と  $1/70$  と  $69/70$  と  $1/71$  と  $70/71$  と  $1/72$  と  $71/72$  と  $1/73$  と  $72/73$  と  $1/74$  と  $73/74$  と  $1/75$  と  $74/75$  と  $1/76$  と  $75/76$  と  $1/77$  と  $76/77$  と  $1/78$  と  $77/78$  と  $1/79$  と  $78/79$  と  $1/80$  と  $79/80$  と  $1/81$  と  $80/81$  と  $1/82$  と  $81/82$  と  $1/83$  と  $82/83$  と  $1/84$  と  $83/84$  と  $1/85$  と  $84/85$  と  $1/86$  と  $85/86$  と  $1/87$  と  $86/87$  と  $1/88$  と  $87/88$  と  $1/89$  と  $88/89$  と  $1/90$  と  $89/90$  と  $1/91$  と  $90/91$  と  $1/92$  と  $91/92$  と  $1/93$  と  $92/93$  と  $1/94$  と  $93/94$  と  $1/95$  と  $94/95$  と  $1/96$  と  $95/96$  と  $1/97$  と  $96/97$  と  $1/98$  と  $97/98$  と  $1/99$  と  $98/99$  と  $1/100$  と  $99/100$  と  $1/101$  と  $100/101$  と  $1/102$  と  $101/102$  と  $1/103$  と  $102/103$  と  $1/104$  と  $103/104$  と  $1/105$  と  $104/105$  と  $1/106$  と  $105/106$  と  $1/107$  と  $106/107$  と  $1/108$  と  $107/108$  と  $1/109$  と  $108/109$  と  $1/110$  と  $109/110$  と  $1/111$  と  $110/111$  と  $1/112$  と  $111/112$  と  $1/113$  と  $112/113$  と  $1/114$  と  $113/114$  と  $1/115$  と  $114/115$  と  $1/116$  と  $115/116$  と  $1/117$  と  $116/117$  と  $1/118$  と  $117/118$  と  $1/119$  と  $118/119$  と  $1/120$  と  $119/120$  と  $1/121$  と  $120/121$  と  $1/122$  と  $121/122$  と  $1/123$  と  $122/123$  と  $1/124$  と  $123/124$  と  $1/125$  と  $124/125$  と  $1/126$  と  $125/126$  と  $1/127$  と  $126/127$  と  $1/128$  と  $127/128$  と  $1/129$  と  $128/129$  と  $1/130$  と  $129/130$  と  $1/131$  と  $130/131$  と  $1/132$  と  $131/132$  と  $1/133$  と  $132/133$  と  $1/134$  と  $133/134$  と  $1/135$  と  $134/135$  と  $1/136$  と  $135/136$  と  $1/137$  と  $136/137$  と  $1/138$  と  $137/138$  と  $1/139$  と  $138/139$  と  $1/140$  と  $139/140$  と  $1/141$  と  $140/141$  と  $1/142$  と  $141/142$  と  $1/143$  と  $142/143$  と  $1/144$  と  $143/144$  と  $1/145$  と  $144/145$  と  $1/146$  と  $145/146$  と  $1/147$  と  $146/147$  と  $1/148$  と  $147/148$  と  $1/149$  と  $148/149$  と  $1/150$  と  $149/150$  と  $1/151$  と  $150/151$  と  $1/152$  と  $151/152$  と  $1/153$  と  $152/153$  と  $1/154$  と  $153/154$  と  $1/155$  と  $154/155$  と  $1/156$  と  $155/156$  と  $1/157$  と  $156/157$  と  $1/158$  と  $157/158$  と  $1/159$  と  $158/159$  と  $1/160$  と  $159/160$  と  $1/161$  と  $160/161$  と  $1/162$  と  $161/162$  と  $1/163$  と  $162/163$  と  $1/164$  と  $163/164$  と  $1/165$  と  $164/165$  と  $1/166$  と  $165/166$  と  $1/167$  と  $166/167$  と  $1/168$  と  $167/168$  と  $1/169$  と  $168/169$  と  $1/170$  と  $169/170$  と  $1/171$  と  $170/171$  と  $1/172$  と  $171/172$  と  $1/173$  と  $172/173$  と  $1/174$  と  $173/174$  と  $1/175$  と  $174/175$  と  $1/176$  と  $175/176$  と  $1/177$  と  $176/177$  と  $1/178$  と  $177/178$  と  $1/179$  と  $178/179$  と  $1/180$  と  $179/180$  と  $1/181$  と  $180/181$  と  $1/182$  と  $181/182$  と  $1/183$  と  $182/183$  と  $1/184$  と  $183/184$  と  $1/185$  と  $184/185$  と  $1/186$  と  $185/186$  と  $1/187$  と  $186/187$  と  $1/188$  と  $187/188$  と  $1/189$  と  $188/189$  と  $1/190$  と  $189/190$  と  $1/191$  と  $190/191$  と  $1/192$  と  $191/192$  と  $1/193$  と  $192/193$  と  $1/194$  と  $193/194$  と  $1/195$  と  $194/195$  と  $1/196$  と  $195/196$  と  $1/197$  と  $196/197$  と  $1/198$  と  $197/198$  と  $1/199$  と  $198/199$  と  $1/200$  と  $199/200$  と  $1/201$  と  $200/201$  と  $1/202$  と  $201/202$  と  $1/203$  と  $202/203$  と  $1/204$  と  $203/204$  と  $1/205$  と  $204/205$  と  $1/206$  と  $205/206$  と  $1/207$  と  $206/207$  と  $1/208$  と  $207/208$  と  $1/209$  と  $208/209$  と  $1/210$  と  $209/210$  と  $1/211$  と  $210/211$  と  $1/212$  と  $211/212$  と  $1/213$  と  $212/213$  と  $1/214$  と  $213/214$  と  $1/215$  と  $214/215$  と  $1/216$  と  $215/216$  と  $1/217$  と  $216/217$  と  $1/218$  と  $217/218$  と  $1/219$  と  $218/219$  と  $1/220$  と  $219/220$  と  $1/221$  と  $220/221$  と  $1/222$  と  $221/222$  と  $1/223$  と  $222/223$  と  $1/224$  と  $223/224$  と  $1/225$  と  $224/225$  と  $1/226$  と  $225/226$  と  $1/227$  と  $226/227$  と  $1/228$  と  $227/228$  と  $1/229$  と  $228/229$  と  $1/230$  と  $229/230$  と  $1/231$  と  $230/231$  と  $1/232$  と  $231/232$  と  $1/233$  と  $232/233$  と  $1/234$  と  $233/234$  と  $1/235$  と  $234/235$  と  $1/236$  と  $235/236$  と  $1/237$  と  $236/237$  と  $1/238$  と  $237/238$  と  $1/239$  と  $238/239$  と  $1/240$  と  $239/240$  と  $1/241$  と  $240/241$  と  $1/242$  と  $241/242$  と  $1/243$  と  $242/243$  と  $1/244$  と  $243/244$  と  $1/245$  と  $244/245$  と  $1/246$  と  $245/246$  と  $1/247$  と  $246/247$  と  $1/248$  と  $247/248$  と  $1/249$  と  $248/249$  と  $1/250$  と  $249/250$  と  $1/251$  と  $250/251$  と  $1/252$  と  $251/252$  と  $1/253$  と  $252/253$  と  $1/254$  と  $253/254$  と  $1/255$  と  $254/255$  と  $1/256$  と  $255/256$  と  $1/257$  と  $256/257$  と  $1/258$  と  $257/258$  と  $1/259$  と  $258/259$  と  $1/260$  と  $259/260$  と  $1/261$  と  $260/261$  と  $1/262$  と  $261/262$  と  $1/263$  と  $262/263$  と  $1/264$  と  $263/264$  と  $1/265$  と  $264/265$  と  $1/266$  と  $265/266$  と  $1/267$  と  $266/267$  と  $1/268$  と  $267/268$  と  $1/269$  と  $268/269$  と  $1/270$  と  $269/270$  と  $1/271$  と  $270/271$  と  $1/272$  と  $271/272$  と  $1/273$  と  $272/273$  と  $1/274$  と  $273/274$  と  $1/275$  と  $274/275$  と  $1/276$  と  $275/276$  と  $1/277$  と  $276/277$  と  $1/278$  と  $277/278$  と  $1/279$  と  $278/279$  と  $1/280$  と  $279/280$  と  $1/281$  と  $280/281$  と  $1/282$  と  $281/282$  と  $1/283$  と  $282/283$  と  $1/284$  と  $283/284$  と  $1/285$  と  $284/285$  と  $1/286$  と  $285/286$  と  $1/287$  と  $286/287$  と  $1/288$  と  $287/288$  と  $1/289$  と  $288/289$  と  $1/290$  と  $289/290$  と  $1/291$  と  $290/291$  と  $1/292$  と  $291/292$  と  $1/293$  と  $292/293$  と  $1/294$  と  $293/294$  と  $1/295$  と  $294/295$  と  $1/296$  と  $295/296$  と  $1/297$  と  $296/297$  と  $1/298$  と  $297/298$  と  $1/299$  と  $298/299$  と  $1/300$  と  $299/300$  と  $1/301$  と  $300/301$  と  $1/302$  と  $301/302$  と  $1/303$  と  $302/303$  と  $1/304$  と  $303/304$  と  $1/305$  と  $304/305$  と  $1/306$  と  $305/306$  と  $1/307$  と  $306/307$  と  $1/308$  と  $307/308$  と  $1/309$  と  $308/309$  と  $1/310$  と  $309/310$  と  $1/311$  と  $310/311$  と  $1/312$  と  $311/312$  と  $1/313$  と  $312/313$  と  $1/314$  と  $313/314$  と  $1/315$  と  $314/315$  と  $1/316$  と  $315/316$  と  $1/317$  と  $316/317$  と  $1/318$  と  $317/318$  と  $1/319$  と  $318/319$  と  $1/320$  と  $319/320$  と  $1/321$  と  $320/321$  と  $1/322$  と  $321/322$  と  $1/323$  と  $322/323$  と  $1/324$  と  $323/324$  と  $1/325$  と  $324/325$  と  $1/326$  と  $325/326$  と  $1/327$  と  $326/327$  と  $1/328$  と  $327/328$  と  $1/329$  と  $328/329$  と  $1/330$  と  $329/330$  と  $1/331$  と  $330/331$  と  $1/332$  と  $331/332$  と  $1/333$  と  $332/333$  と  $1/334$  と  $333/334$  と  $1/335$  と  $334/335$  と  $1/336$  と  $335/336$  と  $1/337$  と  $336/337$  と  $1/338$  と  $337/338$  と  $1/339$  と  $338/339$  と  $1/340$  と  $339/340$  と  $1/341$  と  $340/341$  と  $1/342$  と  $341/342$  と  $1/343$  と  $342/343$  と  $1/344$  と  $343/344$  と  $1/345$  と  $344/345$  と  $1/346$  と  $345/346$  と  $1/347$  と  $346/347$  と  $1/348$  と  $347/348$  と  $1/349$  と  $348/349$  と  $1/350$  と  $349/350$  と  $1/351$  と  $350/351$  と  $1/352$  と  $351/352$  と  $1/353$  と  $352/353$  と  $1/354$  と  $353/354$  と  $1/355$  と  $354/355$  と  $1/356$  と  $355/356$  と  $1/357$  と  $356/357$  と  $1/358$  と  $357/358$  と  $1/359$  と  $358/359$  と  $1/360$  と  $359/360$  と  $1/361$  と  $360/361$  と  $1/362$  と  $361/362$  と  $1/363$  と  $362/363$  と  $1/364$  と  $363/364$  と  $1/365$  と  $364/365$  と  $1/366$  と  $365/366$  と  $1/367$  と  $366/367$  と  $1/368$  と  $367/368$  と  $1/369$  と  $368/369$  と  $1/370$  と  $369/370$  と  $1/371$  と  $370/371$  と  $1/372$  と  $371/372$  と  $1/373$  と  $372/373$  と  $1/374$  と  $373/374$  と  $1/375$  と  $374/375$  と  $1/376$  と  $375/376$  と  $1/377$  と  $376/377$  と  $1/378$  と  $377/378$  と  $1/379$  と  $378/379$  と  $1/380$  と  $379/380$  と  $1/381$  と  $380/381$  と  $1/382$  と  $381/382$  と  $1/383$  と  $382/383$  と  $1/384$  と  $383/384$  と  $1/385$  と  $384/385$  と  $1/386$  と  $385/386$  と  $1/387$  と  $386/387$  と  $1/388$  と  $387/388$  と  $1/389$  と  $388/389$  と  $1/390$  と  $389/390$  と  $1/391$  と  $390/391$  と  $1/392$  と  $391/392$  と  $1/393$  と  $392/393$  と  $1/394$  と  $393/394$  と  $1/395$  と  $394/395$  と  $1/396$  と  $395/396$  と  $1/397$  と  $396/397$  と  $1/398$  と  $397/398$  と  $1/399$  と  $398/399$  と  $1/400$  と  $399/400$  と  $1/401$  と  $400/401$  と  $1/402$  と  $401/402$  と  $1/403$  と  $402/403$  と  $1/404$  と  $403/404$  と  $1/405$  と  $404/405$  と  $1/406$  と  $405/406$  と  $1/407$  と  $406/407$  と  $1/408$  と  $407/408$  と  $1/409$  と  $408/409$  と  $1/410$  と  $409/410$  と  $1/411$  と  $410/411$  と  $1/412$  と  $411/412$  と  $1/413$  と  $412/413$  と  $1/414$  と  $413/414$  と  $1/415$  と  $414/415$  と  $1/416$  と  $415/416$  と  $1/417$  と  $416/417$  と  $1/418$  と  $417/418$  と  $1/419$  と  $418/419$  と  $1/420$  と  $419/420$  と  $1/421$  と  $420/421$  と  $1/422$  と  $421/422$  と  $1/423$  と  $422/423$  と  $1/424$  と  $423/424$  と  $1/425$  と  $424/425$  と  $1/426$  と  $425/426$  と  $1/427$  と  $426/427$  と  $1/428$  と  $427/428$  と  $1/429$  と  $428/429$  と  $1/430$  と  $429/430$  と  $1/431$  と  $430/431$  と  $1/432$  と  $431/432$  と  $1/433$  と  $432/433$  と  $1/434$  と  $433/434$  と  $1/435$  と  $434/435$  と  $1/436$  と  $435/436$  と  $1/437$  と  $436/437$  と  $1/438$  と  $437/438$  と  $1/439$  と  $438/439$  と  $1/440$  と  $439/440$  と  $1/441$  と  $440/441$  と



命題「2113 と #B 2 は 30x2」

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{x - (-0.5)}{0.5 - (-0.5)} = x + 0.5$$

(c)  $x \geq 0.5$  の場合:  $F(x) = P(X \leq x) = 1$

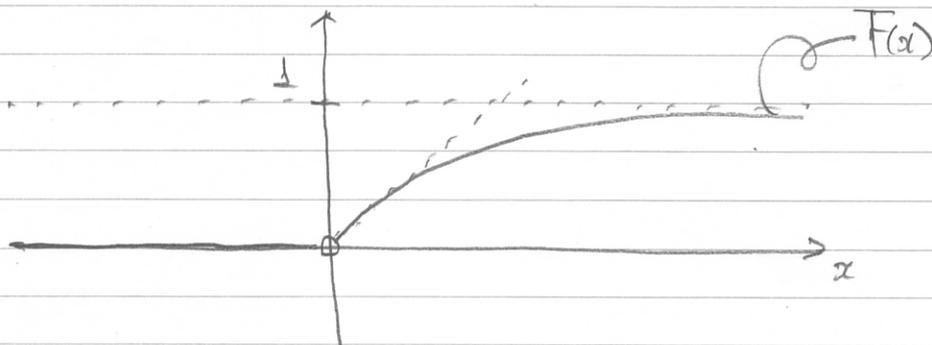
$$\therefore F(x) = \begin{cases} 0 & (x < -0.5) \\ x + 0.5 & (-0.5 \leq x < 0.5) \\ 1 & (x \geq 0.5) \end{cases}$$

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx} \text{ となる}$$

$$p(x) = \begin{cases} 0 & (x < -0.5, x \geq 0.5) \\ 1 & (-0.5 \leq x < 0.5) \end{cases}$$

(ii)  $P(0 \leq X \leq 0.1) = \int_0^{0.1} p(x) dx = \int_0^{0.1} 1 dx = \underline{0.1}$

[P3] (i)  $\lambda = 1$  とし  $F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 - e^{-x} & (x \geq 0) \end{cases}$



(ii)  $P(0 \leq X \leq \frac{1}{\lambda}) = F(\frac{1}{\lambda}) - F(0) = 1 - e^{-\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}} - (1 - e^{-\lambda \cdot 0}) = \underline{1 - e^{-1}}$

(iii)  $p(x) = \frac{dF(x)}{dx}$  とする。

(a)  $x < 0$  とし  $p(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx} 0 = 0$

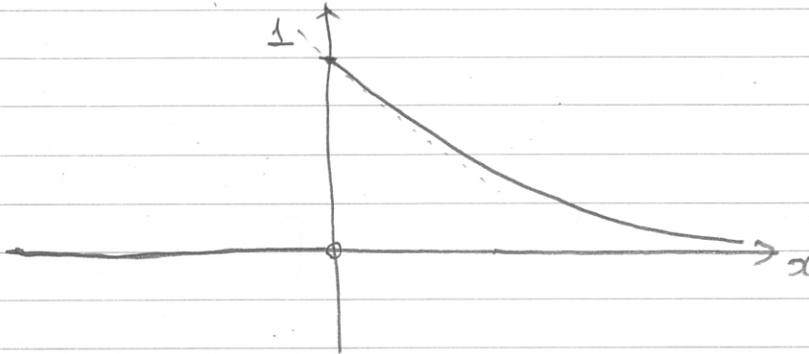
(b)  $x \geq 0$  とし  $p(x) = \frac{d}{dx} (1 - e^{-\lambda x}) = -(-\lambda) e^{-\lambda x} = \lambda e^{-\lambda x}$



$$\therefore P(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \end{cases}$$

---

$$\lambda = 1 \text{ のとき } P(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ e^{-x} & (x \geq 0) \end{cases}, \quad \text{① 示す } \textcircled{2} \text{ の } \textcircled{3} \text{ となる}$$



**[1.5] 期待値と分散**

**[例1]** 2点投りの確率分布

$X$ の値	0	1
$P_i$	1/2	1/2

$$\therefore E(X) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \underline{0.5}$$

$$V(X) = (0-0.5)^2 \times \frac{1}{2} + (1-0.5)^2 \times \frac{1}{2} = 0.125 + 0.125 = 0.25$$

$$Z = \frac{X-E(X)}{\sqrt{V(X)}} = \frac{X-0.5}{\sqrt{0.25}} = \frac{X-0.5}{0.5} = \underline{2X-1}$$

**[例2]** (i)  $E(X+a) = \int_{-\infty}^{\infty} (x+a)p(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx + a \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = E(X) + a$

(ii)  $E(aX) = \int_{-\infty}^{\infty} axp(x)dx = a \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = aE(X)$

**[例3]** (i)  $E[X-E(X)] = 0$

(証明) 定理 1.5.1'  $a = -E(X)$  と置くと  $E[X-E(X)] = E[X+(-E(X))]$

$$= E(X) + (-E(X)) = 0 \quad \#$$

(ii)  $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$

(証明)  $V(X) = E\{[X-E(X)]^2\} \quad \therefore \text{①}$

$$\{X-E(X)\}^2 = X^2 - 2E(X) \cdot X + \{E(X)\}^2$$

$$\therefore V(X) = E[X^2 - 2E(X) \cdot X + \{E(X)\}^2] = E[X^2 - 2E(X) \cdot X] + \{E(X)\}^2$$

$$\therefore \text{②} \quad E[X^2 - 2E(X) \cdot X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2E(X) \cdot x)p(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx - 2E(X) \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

$$= E(X^2) - 2\{E(X)\}^2 \quad \text{①と②より} \quad V(X) = E(X^2) - 2\{E(X)\}^2 + \{E(X)\}^2 = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \quad \#$$



$$\boxed{\text{問4}} \quad Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}} = \frac{1}{\sqrt{V(X)}} \{X - E(X)\}$$

$$\therefore E(Z) = E\left[\frac{1}{\sqrt{V(X)}} \{X - E(X)\}\right] = \frac{1}{\sqrt{V(X)}} E[X - E(X)]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{V(X)}} \{E(X) - E(X)\} = 0$$

$$V(Z) = V\left[\frac{1}{\sqrt{V(X)}} \{X - E(X)\}\right] = \left(\frac{1}{\sqrt{V(X)}}\right)^2 V[X - E(X)] = \frac{1}{V(X)} \cdot V(X) = 1$$

**[1.6] 同時確率分布**

**[例1]** (a)  $1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx dy = \int_1^3 \int_1^2 c dx dy = c \cdot (2-1)(3-1) = 2c \therefore c = \frac{1}{2}$

(b)  $p(x) = 1/2$ :  $1 \leq x \leq 3$  のとき  $p_1(x) = \int_1^2 \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2}$ ;  $x$  の範囲外  $p_1(x) = 0$

$p(y) = 1/2$ :  $1 \leq y \leq 2$  のとき  $p_2(y) = \int_1^3 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} \times 2 = 1$ ;  $y$  の範囲外  $p_2(y) = 0$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_1(x) dx = \int_1^3 \frac{1}{2} x dx = \left[ \frac{1}{4} x^2 \right]_1^3 = \frac{1}{4} (9-1) = 2$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y p_2(y) dy = \int_1^2 y dy = \left[ \frac{1}{2} y^2 \right]_1^2 = \frac{1}{2} (4-1) = \frac{3}{2}$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-2)^2 p_1(x) dx = \int_1^3 \frac{1}{2} (x-2)^2 dx = \left[ \frac{1}{6} (x-2)^3 \right]_1^3 = \frac{1}{6} (1+1) = \frac{1}{3}$$

$$V(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} (y - \frac{3}{2})^2 p_2(y) dy = \int_1^2 (y - \frac{3}{2})^2 dy = \left[ \frac{1}{3} (y - \frac{3}{2})^3 \right]_1^2 = \frac{1}{3} (\frac{1}{8} + \frac{1}{8}) = \frac{1}{12}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy p(x, y) dx dy &= \int_1^3 \int_1^2 \frac{1}{2} xy dx dy = \frac{1}{2} \int_1^3 x dx \cdot \int_1^2 y dy \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_1^3 \cdot \left[ \frac{1}{2} y^2 \right]_1^2 = \frac{1}{8} (9-1) \cdot (4-1) = 3 \end{aligned}$$

$$\therefore \rho(X, Y) = 3 - 2 \times \frac{3}{2} = 0 \quad \therefore \rho(X, Y) = \frac{\gamma(X, Y)}{\sqrt{V(X)} \sqrt{V(Y)}} = 0$$

**[例2]** (1.6.4) の証明:  $\sum_{i=1}^m p_{i0} = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n p_{ij} \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$

$$\sum_{j=1}^n p_{0j} = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m p_{ij} \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$$

(1.6.8) の証明:  $\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx dy = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx dy = 1$$



**PA3**  $E(X) = \mu, E(Y) = \nu$  とおく.

$$\begin{aligned}
 (1.6.14) \text{の証明: } \gamma(X, Y) &= \sum_i \sum_j (x_i - \mu)(y_j - \nu) p_{ij} = \sum_i \sum_j (x_i y_j - \nu x_i - \mu y_j + \mu \nu) p_{ij} \\
 &= \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} - \nu \underbrace{\sum_i \sum_j x_i p_{ij}}_{\mu} - \mu \underbrace{\sum_i \sum_j y_j p_{ij}}_{\nu} + \mu \nu \underbrace{\sum_i \sum_j p_{ij}}_1 \\
 &= \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} - \mu \nu - \mu \nu + \mu \nu = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} - \mu \nu.
 \end{aligned}$$

(1.6.15) の証明:

$$\begin{aligned}
 \gamma(X, Y) &= \int_{-b}^b \int_{-b}^b (x - \mu)(y - \nu) p(x, y) dx dy = \int_{-b}^b \int_{-b}^b (xy - \mu y - \nu x + \mu \nu) p(x, y) dx dy \\
 &= \int_{-b}^b \int_{-b}^b xy p(x, y) dx dy - \mu \underbrace{\int_{-b}^b \int_{-b}^b y p(x, y) dx dy}_{\nu} - \nu \underbrace{\int_{-b}^b \int_{-b}^b x p(x, y) dx dy}_{\mu} + \mu \nu \underbrace{\int_{-b}^b \int_{-b}^b p(x, y) dx dy}_1 \\
 &= \int_{-b}^b \int_{-b}^b xy p(x, y) dx dy - \mu \nu.
 \end{aligned}$$

(1.6.13) の証明: 期待値の定義から

$$E(XY) = \begin{cases} \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} & \text{(離散型)} \\ \int_{-b}^b \int_{-b}^b xy \cdot p(x, y) dx dy & \text{(連続型)} \end{cases}$$

よって (1.6.14) 及び (1.6.15) から  $\gamma(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$

(1.6.16) の証明: 離散型の場合を示す.

$$E(aX + bY) = \sum_i \sum_j (ax_i + by_j) p_{ij} = a \sum_i \sum_j x_i p_{ij} + b \sum_i \sum_j y_j p_{ij} = a E(X) + b E(Y)$$



(1.6.17) a)  $\bar{E}$ FAA:  $E(X) = \mu, E(Y) = \nu \in \mathbb{R} \text{ c.c.e. } E(aX+bY) = a\mu + b\nu$

$$\therefore V(aX+bY) = \sum_i \sum_j \{a x_i + b y_j - (a\mu + b\nu)\}^2 p_{ij} = \sum_i \sum_j \{a(x_i - \mu) + b(y_j - \nu)\}^2 p_{ij}$$

$$= \sum_i \sum_j \{a^2(x_i - \mu)^2 + 2a \cdot b(x_i - \mu)(y_j - \nu) + b^2(y_j - \nu)^2\} p_{ij}$$

$$= a^2 \sum_i \sum_j (x_i - \mu)^2 p_{ij} + 2ab \sum_i \sum_j (x_i - \mu)(y_j - \nu) p_{ij} + b^2 \sum_j (y_j - \nu)^2 p_{ij}$$

$$= a^2 V(X) + 2ab \rho(X, Y) + b^2 V(Y)$$

(1.6.18) a)  $\bar{E}$ FAA:  $\rho$  (Korollar-Schwarz a)  $\bar{E}$ FAA:  $|\sum_{k=1}^n x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right)^{1/2}$

$\bar{E}$ FAA:

$$|\rho(X, Y)| = \left| \sum_i \sum_j (x_i - E(X))(y_j - E(Y)) p_{ij} \right|$$

$$= \left| \sum_{(i,j)} \{ (x_i - E(X)) \sqrt{p_{ij}} \} \{ (y_j - E(Y)) \sqrt{p_{ij}} \} \right|$$

$$\leq \left( \sum_{(i,j)} (x_i - E(X))^2 p_{ij} \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{(i,j)} (y_j - E(Y))^2 p_{ij} \right)^{1/2}$$

$$= \left( \sum_i \sum_j (x_i - E(X))^2 p_{ij} \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_j \sum_i (y_j - E(Y))^2 p_{ij} \right)^{1/2}$$

$$= \sigma(X) \cdot \sigma(Y)$$

Schwarz a)  $\bar{E}$ FAA

$$\therefore |\rho(X, Y)| = \left| \frac{\rho(X, Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)} \right| \leq 1 \quad \therefore -1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$$

(1.6.19) a)  $\bar{E}$ FAA:  $\rho(aX+b, cY+d) = E((aX+b)(cY+d)) - E(aX+b) \cdot E(cY+d)$

$$\Leftrightarrow (aX+b)(cY+d) = ac \cdot XY + adX + bcY + bd$$

$$\therefore E((aX+b)(cY+d)) = ac E(XY) + ad E(X) + bc E(Y) + bd$$

$$- \bar{E} \cdot E(aX+b) \cdot E(cY+d) = \{aE(X)+b\} \{cE(Y)+d\} = ac \cdot E(X) E(Y) + ad E(X) + bc E(Y) + bd$$



$$\therefore \rho(aX+b, cY+d) = ac \{E(XY) - E(X) \cdot E(Y)\} = ac \rho(X, Y)$$

$$\text{---} \sigma(aX+b) = \sqrt{V(aX+b)} = \sqrt{a^2 V(X)} = a \sigma(X),$$

$$\sigma(cY+d) = \sqrt{V(cY+d)} = \sqrt{c^2 V(Y)} = c \cdot \sigma(Y)$$

$$\therefore \rho(aX+b, cY+d) = \frac{\sigma(aX+b, cY+d)}{\sigma(aX+b) \cdot \sigma(cY+d)} = \frac{ac \rho(X, Y)}{a \sigma(X) \cdot c \sigma(Y)} = \rho(X, Y)$$

**例 4**

$X$  の周辺分布  $\{p_i (i=1, 2, \dots)\}$ ,  $Y$  の周辺密度関数  $\pi(y) \in \mathcal{B}$  と

$$p_i = \int_{-\infty}^{\infty} p_i(y) dy, \quad \pi(y) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(y)$$

と与えられる。

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_i(y) dy$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \pi(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} y \sum_{i=1}^{\infty} p_i(y) dy$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \{x_i - E(X)\}^2 p_i = \sum_{i=1}^{\infty} \{x_i - E(X)\}^2 \int_{-\infty}^{\infty} p_i(y) dy$$

$$V(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \{y - E(Y)\}^2 \pi(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \{y - E(Y)\}^2 \sum_{i=1}^{\infty} p_i(y) dy$$

$$\rho(X, Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{x_i - E(X)\} \{y - E(Y)\} p_i(y) dy$$

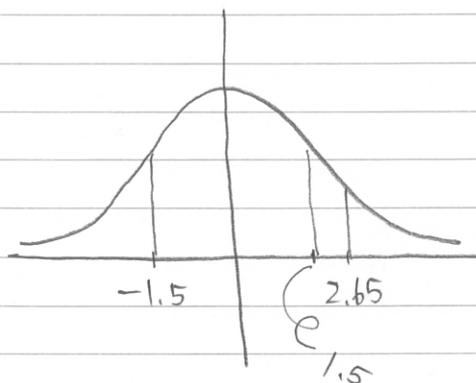
**1.8** 確率分布 I - 正規分布**問 1**  $X \sim N(30, 100)$  に従うとき、 $P(15 \leq X \leq 56.5)$  を求めよ。

$$Z = \frac{X-30}{10} \text{ は } N(0, 1) \text{ に従う。}$$

$$P(15 \leq X \leq 56.5) = P\left[ \underbrace{\frac{15-30}{10}}_{-1.5} \leq Z \leq \underbrace{\frac{56.5-30}{10}}_{2.65} \right]$$

$$= \Phi(1.5) + \Phi(2.65)$$

$$= 0.4332 + 0.4960 = \underline{0.9292}$$

**問 2** (a)  $P(0 < Z < 1.34) = \Phi(1.34) = \underline{0.4099}$ 

(b)  $P(-2.06 < Z < 0) = P(0 < Z < 2.06) = \underline{0.4803}$

(c)  $P(-1.97 < Z < 0.88) = \Phi(1.97) + \Phi(0.88) = 0.4758 + 0.3106 = \underline{0.7864}$

(d)  $P(|Z| < 1.23) = 2\Phi(1.23) = 2 \times 0.3907 = \underline{0.7814}$

(e)  $\Phi(z) = 0.458 \therefore z = \underline{1.7279}$

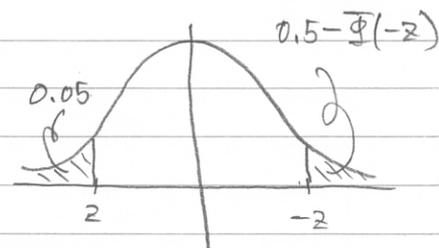
(f)  $\Phi(-z) = 0.336 \therefore -z = 0.9782 \therefore z = \underline{-0.9782}$

(g)  $0.5 - \Phi(z) = 0.025 \therefore \Phi(z) = 0.475 \therefore z = \underline{1.9600}$

(h)  $P(Z < z) = 0.05 < 0.5$  より  $z < 0$

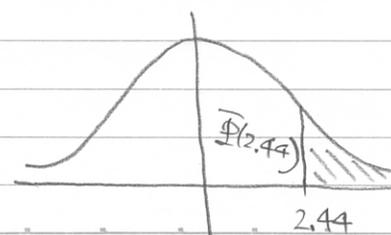
$$\therefore 0.5 - \Phi(-z) = 0.05 \therefore \Phi(-z) = 0.45$$

$$\therefore -z = 1.6449 \therefore z = \underline{-1.6449}$$



(i)  $2 \cdot \Phi(z) = 0.95 \therefore \Phi(z) = 0.475 \therefore z = \underline{1.9600}$

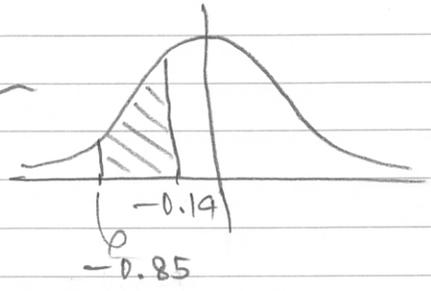
(j)  $P(Z > 2.44) = 0.5 - \Phi(2.44) = 0.5 - 0.4927 = \underline{0.0073}$





**PA3**  $X \sim N(2.4, 8) \therefore Z = \frac{X-2.4}{2\sqrt{2}} \sim N(0,1)$

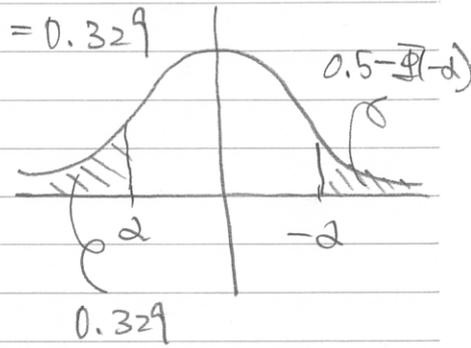
(a)  $P(0 < X < 2) = P\left(\frac{0-2.4}{2\sqrt{2}} < Z < \frac{2-2.4}{2\sqrt{2}}\right) = P(-0.85 < Z < -0.14)$   
 $= \Phi(0.85) - \Phi(0.14) = 0.3023 - 0.0557 = \underline{0.2466}$



(b)  $P(|X-2.4| < 5.31) = P(-5.31 < X-2.4 < 5.31)$   
 $= P\left(-\frac{5.31}{2\sqrt{2}} < Z < \frac{5.31}{2\sqrt{2}}\right)$   
 $= P(-1.88 < Z < 1.88) = 2\Phi(1.88) = 2 \times 0.4699 = \underline{0.9398}$

(c)  $P(X \leq c) = P\left(\frac{X-2.4}{2\sqrt{2}} \leq \frac{c-2.4}{2\sqrt{2}}\right) = P\left(Z \leq \frac{c-2.4}{2\sqrt{2}}\right) = 0.329 < 0.5$

Then:  $\frac{c-2.4}{2\sqrt{2}} = d < 0 \therefore P(Z \leq d) = 0.5 - \Phi(-d) = 0.329$



$\therefore \Phi(-d) = 0.171 \therefore -d = 0.4427 \therefore d = -0.4427$   
 $\therefore \frac{c-2.4}{2\sqrt{2}} = -0.4427$   
 $\therefore c = 2.4 - 2\sqrt{2} \times 0.4427 = 2.4 - 1.252 = 1.15$

(d)  $P(|X-2.4| > d) = P\left(\left|\frac{X-2.4}{2\sqrt{2}}\right| > \frac{d}{2\sqrt{2}}\right) = P(|Z| > \frac{d}{2\sqrt{2}})$   
 $= 1 - P(|Z| \leq \frac{d}{2\sqrt{2}}) = 1 - 2\Phi\left(\frac{d}{2\sqrt{2}}\right) = 0.95$   
 $\therefore \Phi\left(\frac{d}{2\sqrt{2}}\right) = 0.025 \therefore \frac{d}{2\sqrt{2}} = 0.0627 \therefore d = \underline{0.1773}$

**PA4** (a)  $3X-2Y \sim N(3 \times 3.2 - 2 \times (-6.4), 3^2 \times 5 + (-2)^2 \times 8)$   
 $= N(9.6 + 12.8, 45 + 32) = \underline{N(22.4, 77)}$

(b)  $U = 3X-2Y$  & hence  $U \sim N(22.4, 77) \therefore Z = \frac{U-22.4}{\sqrt{77}} \sim N(0,1)$   
 $\therefore P(U > 25) = P\left(\frac{U-22.4}{\sqrt{77}} > \frac{25-22.4}{\sqrt{77}}\right) = P(Z > 0.30)$   
 $= 0.5 - \Phi(0.30) = 0.5 - 0.1179 = \underline{0.3821}$



$$\boxed{\text{Pr 5}} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \sqrt{2}\sigma du$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \cdot \sqrt{2}\sigma du = \sqrt{2}\sigma \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = 2\sqrt{2}\sigma \int_0^{\infty} e^{-u^2} du$$

$$du = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} dx$$

$$= 2\sqrt{2}\sigma \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{2\pi}\sigma \quad \therefore \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \times \sqrt{2\pi}\sigma = 1$$

$$\boxed{\text{Pr 6}} E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\frac{z = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}{x | -\infty \rightarrow \infty, z | -\infty \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2}\sigma z + \mu) e^{-z^2} \cdot \sqrt{2}\sigma dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma z + \mu) e^{-z^2} dz = \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-z^2} dz + \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-z^2} dz = \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ a \rightarrow -\infty}} \int_a^b \left(-\frac{1}{2} e^{-z^2}\right)' dz = \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ a \rightarrow -\infty}} \left[-\frac{1}{2} e^{-z^2}\right]_a^b$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-b^2} + \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow -\infty} e^{-a^2} = 0$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = 2 \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = 2 \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

$$\therefore E(X) = \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = \mu$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad \frac{z = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}{x | -\infty \rightarrow \infty, z | -\infty \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2}\sigma z)^2 e^{-z^2} \cdot \sqrt{2}\sigma dz$$



$$= \frac{2\sigma^2 \cdot \sqrt{2}\sigma}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2} dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2} dz$$

$\therefore \int$

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot z e^{-z^2} dz = \left[ z \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-z^2}\right) \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz$$

~~(L'Hôpital's Rule)~~  $= -\frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b}{e^{b^2}} + \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{a}{e^{a^2}} = 0$  ↑  
L'Hôpital's Rule

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2} dz = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

$$\therefore V(X) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma^2 \times \frac{1}{2} \sqrt{\pi} = \sigma^2$$

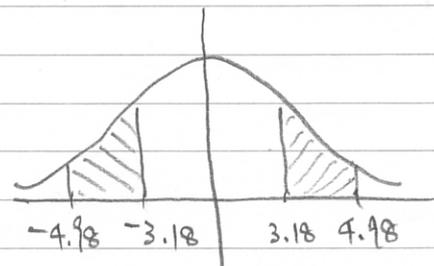
1.9 二項分布PA1 命中回数  $X$  は  $X \sim B(10, 0.65)$ 

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad P(X \geq 7) &= P(X=7) + P(X=8) + P(X=9) + P(X=10) \\
 &= {}_{10}C_7 (0.65)^7 \cdot (0.35)^3 + {}_{10}C_8 \cdot (0.65)^8 \cdot (0.35)^2 + {}_{10}C_9 (0.65)^9 (0.35) + {}_{10}C_{10} (0.65)^{10} \\
 &= 120 \times 0.00210183 + 45 \times 0.0039034 + 10 \times 0.00724917 + 0.0134627 \\
 &= 0.513827 \div \underline{0.51}
 \end{aligned}$$

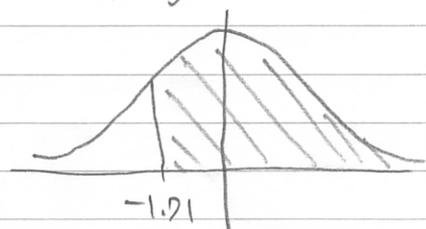
$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad P(X \leq 3) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) \\
 &= {}_{10}C_0 (0.65)^0 (0.35)^{10} + {}_{10}C_1 (0.65) \cdot (0.35)^9 + {}_{10}C_2 (0.65)^2 (0.35)^8 + {}_{10}C_3 (0.65)^3 (0.35)^7 \\
 &= 0.0260243 \div \underline{0.026}
 \end{aligned}$$

PA2  $n=200, p=0.25, q=0.75$  故に  $np=50 > 5, nq=150 > 5$ .  $\therefore Z$  は正規分布に従う。

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad P(20 \leq X < 30) &= P(20 - 0.5 \leq X < 30 + 0.5) \\
 &\quad B(200, 0.25) \qquad \qquad \qquad N(50, 37.5) \\
 &= P(19.5 \leq X < 30.5) = P\left(\frac{19.5-50}{\sqrt{37.5}} \leq Z < \frac{30.5-50}{\sqrt{37.5}}\right) = 6.124 \\
 &= P(-4.98 \leq Z < -3.18) \\
 &= \Phi(4.98) - \Phi(3.18) = 0.5 - 0.4993 = \underline{0.0007}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad P(X \geq 40) &= P(X \geq 40 - 0.5) \\
 &\quad B(200, 0.25) \qquad \qquad \qquad N(50, 37.5) \\
 &= P(X \geq 39.5) = P\left(Z \geq \frac{39.5-50}{\sqrt{37.5}}\right) = P(Z \geq -1.71) \\
 &= 0.5 + \Phi(1.71) = 0.5 + 0.4564 = \underline{0.9564}
 \end{aligned}$$

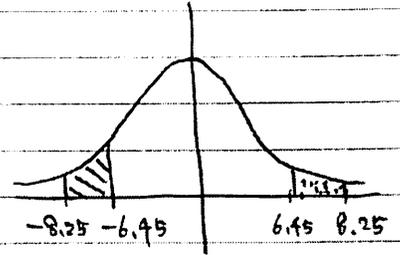


$$\text{(c)} \quad P(0 \leq X \leq 10) = P(-0.5 \leq X \leq 10.5) \\
 \quad \quad \quad B(200, 0.25) \qquad \qquad \qquad N(50, 37.5)$$



$$= P\left(\frac{-0.5-50}{\sqrt{37.5}} \leq Z \leq \frac{10.5-50}{\sqrt{37.5}}\right) = P(-8.25 \leq Z \leq -6.45)$$

$$= \Phi(8.25) - \Phi(6.45) \doteq 0.5 - 0.5 = 0$$



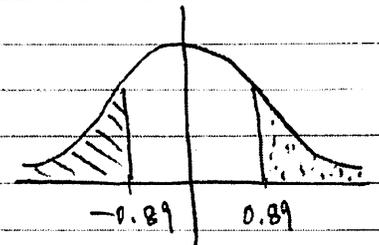
問3 1000個の製品中の不良品の個数を  $X$  個とする。

題意より  $X \sim B(1000, 0.008)$ .  $n=1000$ ,  $p=0.008$ ,  $q=0.992$ ,  $np=8 > 5$ ,

$nq=992 > 5$  となるのでラプラスの定理による近似計算を使用。よって  $npq=7.936$

$$\therefore \sqrt{npq} \doteq 2.817$$

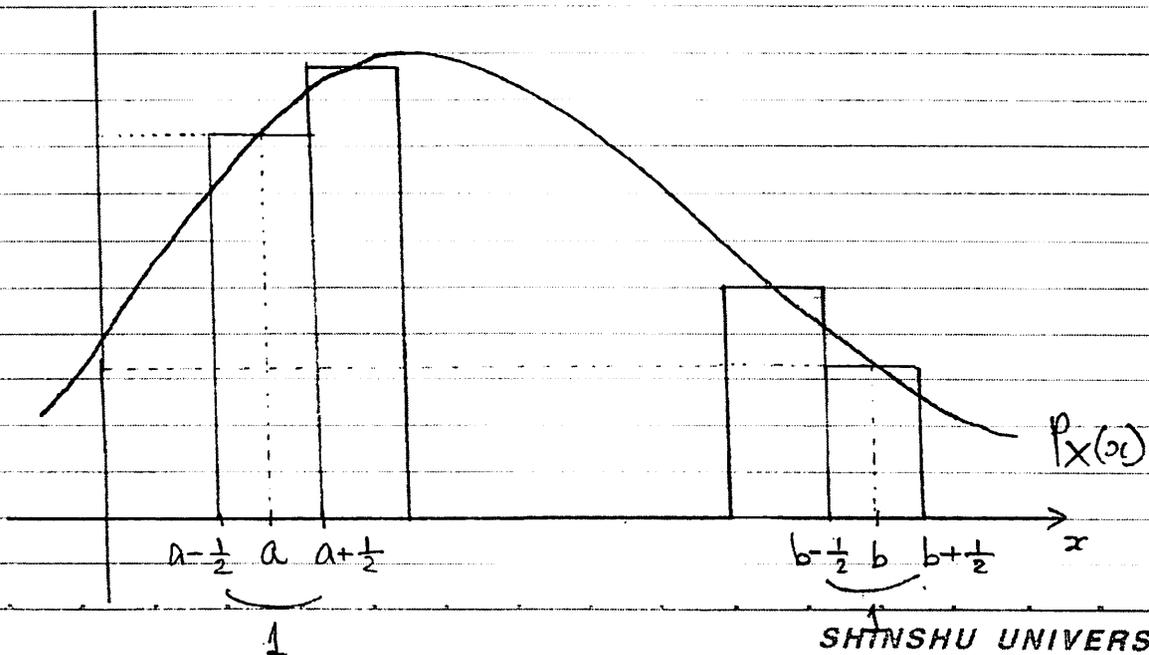
$$P(X \leq 5) \stackrel{B(1000, 0.008)}{=} P(X \leq 5.5) \stackrel{N(8, 2.817^2)}{=} P\left(Z \leq \frac{5.5-8}{2.817}\right) = P(Z \leq -0.89)$$



$$= 0.5 - \Phi(0.89) = 0.5 - 0.3133 = 0.1867$$

$$P(X=0) = {}_{1000}C_0 (0.008)^0 \cdot (0.992)^{1000} = 0.992^{1000} \doteq 0.0003$$

問4





定理 1.9.3 の証明計算の仕方

$$\begin{aligned}
 & P(a \leq X \leq b) \\
 & \stackrel{B(n,p)}{=} P(X=a) + P(X=a+1) + \dots + P(X=b) \\
 & \stackrel{\text{上区間の区間和}}{=} \int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} f_X(x) dx + \int_{a+\frac{1}{2}}^{a+\frac{3}{2}} f_X(x) dx + \dots + \int_{b-\frac{1}{2}}^{b+\frac{1}{2}} f_X(x) dx \\
 & = \int_{a-\frac{1}{2}}^{b+\frac{1}{2}} f_X(x) dx = P\left(a-\frac{1}{2} \leq X \leq b+\frac{1}{2}\right) \stackrel{N(np, npq)}{=}
 \end{aligned}$$

ただし、 $a, b$  の代りに  $a-\frac{1}{2}, b+\frac{1}{2}$  に置き換える。

**問 5** 2項展開  $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k x^k y^{n-k}$  の両辺  $x$  の偏微分、両辺  $x$  を

微分

$$n x (x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^n k {}_n C_k x^{k-1} y^{n-k} \quad (1)$$

上式に  $x=p, y=q$  を代入

$$np = \sum_{k=0}^n k {}_n C_k p^k q^{n-k} = E(X)$$

次に (1) の両辺  $x$  の偏微分、両辺  $x$  を微分

$$n x (x+y)^{n-1} + n(n-1) x^2 (x+y)^{n-2} = \sum_{k=0}^n k^2 {}_n C_k x^{k-2} y^{n-k}$$

上式に  $x=p, y=q$  を代入

$$np + n(n-1)p^2 = \sum_{k=0}^n k^2 {}_n C_k p^k q^{n-k} = E(X^2)$$

$$\begin{aligned}
 \therefore V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 = np + n(n-1)p^2 - n^2 p^2 = np - np^2 = np(1-p) \\
 &= npq
 \end{aligned}$$

1.10 ポアソン分布と指数分布

[問1] (i)  $X$  は 1 時間の来客数と仮定する。  $X$  は  $\lambda = 4$  のポアソン分布に従う

$$P(X \geq 10) = P(X=10) + P(X=11) + P(X=12) + P(X=13) + P(X=14) + \dots$$

$$\begin{aligned} &= 0.0053 + 0.0019 + 0.0006 + 0.0002 + 0.0001 = \underline{0.0081} \\ &\text{ポアソン分布表} \end{aligned}$$

(ii)  $Y$  は 1 人の客が来るまでの待ち時間 (時) と仮定する。  $Y$  は

$\lambda = 4$  の指数分布に従う。 即ち

$$P(Y \geq 0.5) = \int_{0.5}^{\infty} 4e^{-4x} dx = \left[ -e^{-4x} \right]_{0.5}^{\infty} = \frac{1}{e^2} \doteq \underline{0.135}$$

↑  
30分以上客が来る

[問2]  $e^t$  のマクローリン展開  $e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$  の両辺に  $t$  を掛けると、両辺に  $t$  を掛けたら

$$te^t = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{t^k}{k!} \quad (1)$$

上式に  $t = \lambda$  と置くと

$$\lambda e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \quad \therefore \lambda = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = E(X)$$

同様 (1) の両辺に  $t^2$  を掛けると、両辺に  $t^2$  を掛けたら

$$(t^2 + t)e^t = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{t^k}{k!}$$

上式に  $t = \lambda$  と置くと

$$(\lambda^2 + \lambda)e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \quad \therefore \lambda^2 + \lambda = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \left( e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right) = E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2$$

$$\therefore V(X) = (\lambda^2 + \lambda) - \lambda^2 = \lambda$$



$$\boxed{\text{PR 3}} \quad E(X) = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx &= \left[ -\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{\lambda x}} \right) + \frac{1}{\lambda} \left[ -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

DESIKATA

$$\therefore E(X) = \lambda \times \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{Pr. } E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \left[ -\frac{x^2}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} + \frac{2}{\lambda} \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^3}$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \lambda \cdot \frac{2}{\lambda^3} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

1.11 2次元正規分布問1 (1.11.2)の証明:

$$P(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2(1-\rho^2)}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Q} dy = (*)$$

F.F.L.

$$Q = -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left\{ \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} - \frac{2\rho}{\sigma_x\sigma_y} (x-\mu_x)(y-\mu_y) \right\}$$

$$= -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left\{ \frac{y-\mu_y}{\sigma_y} - \frac{2\rho(x-\mu_x)}{\sigma_x} \right\}^2 + \frac{\rho^2(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2(1-\rho^2)}$$

$$\therefore (*) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2(1-\rho^2)}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{\rho^2(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2(1-\rho^2)}\right\}$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{\sqrt{2(1-\rho^2)}} \left( \frac{y-\mu_y}{\sigma_y} - \frac{2\rho(x-\mu_x)}{\sigma_x} \right)^2\right] dy$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right\} \times \int$$

$$\int = \frac{1}{\sqrt{2(1-\rho^2)}} \left\{ \frac{y-\mu_y}{\sigma_y} - \frac{2\rho(x-\mu_x)}{\sigma_x} \right\} \text{ と } t \text{ と } dt = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2(1-\rho^2)}} dy$$

$$\frac{y}{\sigma_y} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\infty}{\sigma_y} - \frac{-\infty}{\sigma_y} = \frac{\infty - (-\infty)}{\sigma_y} = \frac{\infty}{\sigma_y}$$

$$\frac{t}{\sqrt{\pi}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\infty}{\sqrt{\pi}} - \frac{-\infty}{\sqrt{\pi}} = \frac{\infty - (-\infty)}{\sqrt{\pi}} = \frac{\infty}{\sqrt{\pi}}$$

$$\therefore \int = \sigma_y\sqrt{2(1-\rho^2)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sigma_y\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}$$

$$\therefore P(x) = \frac{\sigma_y\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} \quad \#$$

(1.11.3)の証明は同様 #



[例2] (1.1.4)の証明:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y) \cdot \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2}Q} dx dy = (*)$$

TEL

$$Q = \frac{1}{1-\rho^2} \left\{ \frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \cdot \frac{y-\mu_y}{\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right\}$$

$$\begin{cases} u = \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \\ v = \frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \end{cases}$$

変数変換の Jacobian:  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \sigma_v \\ \sigma_u & \sigma_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{vmatrix} = \sigma_x \cdot \sigma_y$

例2 = 2重積分の変数変換の公式。

$$(*) = \frac{\sigma_x \cdot \sigma_y}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot v \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} (u^2 - 2\rho uv + v^2) \right\} du dv$$

$$= \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v e^{-\frac{v^2}{2}} dv \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} e^{-\frac{(u-\rho v)^2}{2(1-\rho^2)}} du$$

$$= \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \rho v^2 e^{-\frac{v^2}{2}} dv$$

これは  $N(\rho v, 1-\rho^2)$  の  
密度関数

$$= \rho \sigma_x \sigma_y \int_{-\infty}^{\infty} v^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = \rho \sigma_x \cdot \sigma_y$$

これは  $N(0, 1)$  の  
密度関数

[例3]

例1 (p. 66)  $\chi^2$  检验法

例2 (p. 66) (i)  $\chi^2$  检验法.  $\chi^2_{18}(0.05) = 28.9$

(ii)  $\chi^2$  检验法.  $\chi^2_{12}(1-0.025) = \chi^2_{12}(0.975) = 11.7$  且  $n=23$

**例1** (p. 93) 題意:  $n=50, \sigma=5.54, \bar{X}=169.8, \alpha=0.01$ . 正態分布表 II 中  
 $z(\alpha/2) = z(0.005) = 2.5758$ .  $\therefore$  母平均  $\mu$  區間推定 (母分散  $\sigma$  已知) 公式 (1)

$$169.8 - \frac{5.54}{\sqrt{50}} \times 2.5758 < \mu < 169.8 + \frac{5.54}{\sqrt{50}} \times 2.5758 \quad \therefore 169.8 - 2.02 < \mu < 169.8 + 2.02$$

$$\therefore 167.8 < \mu < 171.8$$

信頼度  $\varepsilon=100\%$  の推定  $\rightarrow$   $\varepsilon=100\%$   $\alpha=0$ .  $\therefore z(\alpha/2) = z(0) = \infty$ .  $\therefore$  信頼区間は  $-\infty < \mu < \infty$ .

**例2** (p. 93) 題意:  $n=20, \bar{X}=280, \sigma=60$ . 母平均  $\mu$  区間推定 (母分散  $\sigma$  已知) 公式 (1)

• 信頼度 90%:  $\alpha=0.1$ . 正態分布表 (1)  $z(\alpha/2) = z(0.05) = 1.6449$ .  $\therefore$  信頼区間  $1-\alpha$ :

$$280 - \frac{60}{\sqrt{20}} \times 1.6449 < \mu < 280 + \frac{60}{\sqrt{20}} \times 1.6449 \quad \therefore 280 - 22.06 < \mu < 280 + 22.06$$

$$\therefore \underline{257.9 < \mu < 302.1}$$

• 信頼度 95%:  $\alpha=0.05$ . 正態分布表 (1)  $z(\alpha/2) = z(0.025) = 1.96$ .  $\therefore$  信頼区間  $1-\alpha$ :

$$280 - \frac{60}{\sqrt{20}} \times 1.96 < \mu < 280 + \frac{60}{\sqrt{20}} \times 1.96 \quad \therefore 280 - 26.30 < \mu < 280 + 26.30$$

$$\therefore \underline{253.7 < \mu < 306.3}$$

• 信頼度 99%:  $\alpha=0.01$ . 正態分布表 (1)  $z(\alpha/2) = z(0.005) = 2.5758$ .  $\therefore$  信頼区間  $1-\alpha$ :

$$280 - \frac{60}{\sqrt{20}} \times 2.5758 < \mu < 280 + \frac{60}{\sqrt{20}} \times 2.5758 \quad \therefore 280 - 34.56 < \mu < 280 + 34.56$$

$$\therefore \underline{245.4 < \mu < 314.6}$$

• 95% 信頼区間の幅は  $2 \times \left( \frac{60}{\sqrt{n}} \times 1.96 \right) = \frac{235.2}{\sqrt{n}}$ .  $\therefore$  題意より  $\frac{235.2}{\sqrt{n}} \leq 5$

$$\therefore \sqrt{n} \geq 47.04 \quad \therefore n \geq 2212.8 \quad \therefore \underline{2213 \text{ (個)}}$$

**例1** (p. 100) 題意:  $n=50, \alpha=0.05$ . 母分散  $\sigma^2$  区間推定 (母平均  $\mu$  未知) 公式 (1)

$$\frac{49 S^2}{\chi_{49}^2(\alpha/2)} < \sigma^2 < \frac{49 S^2}{\chi_{49}^2(1-\alpha/2)}$$

$\therefore$   $\chi^2$  分布表 (1)  $\chi_{49}^2(\alpha/2) = \chi_{50}^2(0.025) = 71.4, \chi_{49}^2(1-\alpha/2) = \chi_{50}^2(0.975) = 32.4$ .

$\bar{X}$  と  $S^2$  は  $T$  の  $\bar{X}$  と  $S^2$  の  $\bar{X} = 171.304, S^2 = \frac{1}{49} \{ (X_1^2 + \dots + X_{50}^2) - 50 \bar{X}^2 \} = 27.14$ .  $\therefore$

$$\frac{49 \times 27.14}{71.4} < \sigma^2 < \frac{49 \times 27.14}{32.4} \quad \therefore \underline{18.63 < \sigma^2 < 41.05}$$

**例2** (p.100) 題意より  $n=10, \alpha=0.1$ . 非正規分布  $\bar{X}=1.701, S^2=0.0218$

(i) 母分散  $\sigma^2$  の区間推定 (母平均未知) の公式より

$$\frac{\sum_{i=1}^{10} (X_i - 1.708)^2}{\chi_{10}^2(\alpha/2)} < \sigma^2 < \frac{\sum_{i=1}^{10} (X_i - 1.708)^2}{\chi_{10}^2(1-\alpha/2)}$$

$\therefore \chi^2$  分布表より  $\chi_{10}^2(\alpha/2) = \chi_{10}^2(0.05) = 18.31, \chi_{10}^2(1-\alpha/2) = \chi_{10}^2(0.95) = 3.94$   
非正規分布

$$\sum_{i=1}^{10} (X_i - 1.708)^2 = 0.00478 \quad \therefore \sqrt{\frac{0.00478}{18.31}} < \mu < \sqrt{\frac{0.00478}{3.94}}$$

$$\therefore \underline{0.00162} < \sigma < \underline{0.0348}$$

(ii) 母分散  $\sigma^2$  の区間推定 (母平均未知) の公式より  $\frac{9S^2}{\chi_9^2(\alpha/2)} < \mu^2 < \frac{9S^2}{\chi_9^2(1-\alpha/2)}$

$\therefore \chi^2$  分布表より  $\chi_9^2(\alpha/2) = \chi_9^2(0.05) = 16.92, \chi_9^2(1-\alpha/2) = \chi_9^2(0.95) = 3.33$  より

$$\frac{3 \times 0.0218}{\sqrt{16.92}} < \mu < \frac{3 \times 0.0218}{\sqrt{3.33}} \quad \therefore \underline{0.0159} < \sigma < \underline{0.0358}$$

**例1** (p.104) 題意より  $n=500, P=11/500=0.022, \alpha=0.01$ . 正規分布  $\mu$  の区間推定 (正規分布) の公式より

$$0.022 - \sqrt{\frac{0.022 \times (1-0.022)}{500}} \times z(\alpha/2) < \mu < 0.022 + \sqrt{\frac{0.022 \times (1-0.022)}{500}} \times z(\alpha/2)$$

$\therefore$  正規分布表より  $z(\alpha/2) = z(0.005) = 2.5758$  より

$$0.022 - \sqrt{\frac{0.022 \times 0.978}{500}} \times 2.5758 < \mu < 0.022 + \sqrt{\frac{0.022 \times 0.978}{500}} \times 2.5758$$

$$\therefore 0.022 - 0.0169 < \mu < 0.022 + 0.0169 \quad \therefore \underline{0.0051} < \mu < \underline{0.0389}$$

**問1** (p.122) 題意の母平均の検定方式2両側検定E行う。

- 母平均  $\mu$  と比較対象値  $\mu_0 = 12.6$
- 標本サイズ  $n = 20$
- 母標準偏差の推定値  $\sigma = 1.8$
- 標本平均の実現値  $\bar{X} = 13.2$

(1) 帰無仮説  $H_0: \mu = 12.6$

(2) 対立仮説  $H_1: \mu \neq 12.6$

(3) 検定統計量: 標本平均  $\bar{X}$ . 仮説  $H_0$  の下では  $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$

(4) 棄却域の設定: 有意水準  $\alpha = 0.05 \therefore z(\alpha/2) = z(0.025) = 1.96$   
 $\therefore$  棄却域:  $Z < -1.96, Z > 1.96$

(5) 実現値の計算:

$$Z = \frac{13.2 - 12.6}{1.8/\sqrt{20}} \doteq 1.49$$

(6) 結論:  $Z$  の実現値が棄却域に入らぬ。仮説  $H_0$  は棄却されず。すなわち、「改良の効果があるとは言えない (有意水準 5%)」

**問2** (p.122) 題意の母平均の検定方式2両側検定E行う。

- 母平均  $\mu$  と比較対象値  $\mu_0 = 12.6$
- 標本サイズ  $n = 50$
- 母標準偏差の推定値  $\sigma = 1.8$
- 標本平均の実現値  $\bar{X} = 13.4$

(1) 帰無仮説  $H_0: \mu = 12.6$

(2) 対立仮説  $H_1: \mu \neq 12.6$

(3) 検定統計量: 標本平均  $\bar{X}$ . 仮説  $H_0$  の下では  $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$

(4) 棄却域の設定: 有意水準  $\alpha = 0.05 \therefore z(\alpha/2) = z(0.025) = 1.96$

$\therefore$  棄却域:  $Z < -1.96, Z > 1.96$

(5) 実現値の計算:  $Z = \frac{13.4 - 12.6}{1.8/\sqrt{50}} \doteq 3.14$

(6) 結論:  $Z$  の実現値が棄却域に入らぬ。仮説  $H_0$  は棄却されず。すなわち、「改良の効果がある (有意水準 5%)」

問題3 (p.122) 題意の母平均の検定方式: 左側検定を行う。

- 母平均  $\mu$  と比較する値  $\mu_0 = 49.4$
- 標本の大きさ  $n = 200$
- 母標準偏差の推定値  $\sigma = 6.91$
- 標本平均の実現値  $\bar{X} = 48.2$

(1) 帰無仮説  $H_0: \mu = 49.4$

(2) 対立仮説  $H_1: \mu < 49.4$

(3) 検定統計量: 標本平均  $\bar{X}$ . 仮説  $H_0$  の下で  $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$

(4) 棄却域の設定: 有意水準  $\alpha = 0.05$   $\therefore z(\alpha) = z(0.05) = 1.6449$

$\therefore$  棄却域:  $Z < -1.6449$

(5) 実現値の計算:  $Z = \frac{48.2 - 49.4}{6.91/\sqrt{200}} \doteq -2.456$

(6) 結論:  $Z$  の実現値は棄却域に入らぬ。よって仮説  $H_0$  は棄却されず、すなわち、「平均体重は全国平均以下ではない (有意水準 5%)」。

問題4 (p.136) 題意の母分散の検定方式: 右側検定を行う。

- 母分散  $\sigma^2$  と比較する値  $\sigma_0^2 = 10^2$
- 標本の大きさ  $n = 30$
- 標本分散の実現値  $s^2 = 11.8^2$

(1) 帰無仮説  $H_0: \sigma^2 = 10^2$

(2) 対立仮説  $H_1: \sigma^2 > 10^2$

(3) 検定統計量: 標本分散  $s^2$ . 仮説  $H_0$  の下で  $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim$  自由度 29 の  $\chi^2$  分布

(4) 棄却域の設定: 有意水準  $\alpha = 0.05$ .  $\therefore \chi_{29}^2(0.05) = 42.6$   $\therefore$  棄却域:  $\chi^2 > 42.6$

(5) 実現値の計算:

$$\chi^2 = \frac{29 \times 11.8^2}{10^2} \doteq 40.4$$

(6) 結論:  $\chi^2$  の実現値は棄却域に入らぬ。よって仮説  $H_0$  は棄却されず、すなわち、「強度のバツキに対する望みの条件は満たされていない (有意水準 5%)」。

問1 (p.139) 題意の母比率の検定(大標本)を両側検定で行う。

- 母比率  $p$  と比較母値  $p_0 = 4/(3\pi)$
- 標本の大きさ  $n = 500$
- 標本比率の実現値  $P = 219/500 \doteq 0.438$

(1) 帰無仮説  $H_0: p = 4/(3\pi)$

(2) 対立仮説  $H_1: p \neq 4/(3\pi)$

(3) 検定統計量: 標本比率  $P$ .  $\therefore 2np_0 \doteq 213 > 5$   $np_0 = n(1-p_0) \doteq 287 > 5$ .  
よって仮説  $H_0$  が  $F$  近似の:

$$Z = \frac{P - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \sim N(0,1)$$

(4) 棄却域の設定: 有意水準  $\alpha = 0.01 \therefore z(\alpha/2) = z(0.005) = 2.5758$

$\therefore$  棄却域:  $Z < -2.5758, Z > 2.5758$

(5) 実現値の計算:  $Z = \frac{0.438 - \frac{4}{3\pi}}{\sqrt{\frac{4}{3\pi}(1 - \frac{4}{3\pi})/500}} \doteq 0.6147$

(6) 結論:  $Z$  の実現値が棄却域に入らぬ。よって仮説  $H_0$  を棄却する可からず。  
交差確率が  $\frac{4}{3\pi} = 1/3$  に等しからぬと言えぬ (有意水準 1%) 。

問3 (p.139) 題意の母比率の検定(大標本)を両側検定で行う。

- 母比率  $p$  と比較母値  $p_0 = \frac{53.74}{100} = 0.5374$
- 標本の大きさ  $n = 1000$
- 標本比率の実現値  $P = \frac{541}{1000} = 0.541$

(1) 帰無仮説  $H_0: p = 0.5374$

(2) 対立仮説  $H_1: p \neq 0.5374$

(3) 検定統計量: 標本比率  $P$ .  $\therefore 2np_0 \doteq 537 > 5, np_0 = n(1-p_0) \doteq 463 > 5$   
よって仮説  $H_0$  が  $F$  近似の:

$$Z = \frac{P - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \sim N(0,1)$$

(4) 棄却域の設定: 有意水準  $\alpha = 0.01 \therefore z(\alpha/2) = z(0.005) = 2.5758$

$\therefore$  棄却域:  $Z < -2.5758, Z > 2.5758$

(5) 果現値の計算:

$$Z = \frac{0.541 - 0.5374}{\sqrt{0.5374(1-0.5374)/1000}} \doteq 0.2283$$

(6) 結論:  $Z$  の果現値の棄却域に入らぬ。作ら仮説  $H_0$  の棄却域に入らぬ。ゆえに  
「両側検定上有意差が認めらるる言えぬ (有意水準 1%)」。