# 平成28年度応用数学I・A共通試験問題（河邊担当）

平成28年8月9日3時限（13:00〜14:30）

[1] 変数 $x$ の関数 $y = y(x)$ に関する微分方程式

$$y' + \frac{1}{x}y = 1 - x^2$$

の一般解を求めよ.

[2] 積分因子を見つけ，全微分方程式

$$(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0$$

の一般解を求めよ.

[3] 変数 $x$ の関数 $y = y(x)$ に関する次の微分方程式の一般解を，ラプラス変換を用いずに解け. **ラプラス変換を用いた場合は零点とします.**

$$y'' - 2y' + 2y = x^2 - 1$$

[4] 次の関数のラプラス変換を求めよ.

(1) $t^3e^t$　　(2) $t\sin t$　　(3) $\sin^2 t$

[5] 変数 $t$ の関数 $f = f(t)$ に関する次の初期値問題を解け.

$$f'' + f = t; \qquad f(0) = 1,\ f'(0) = -2$$

[6] 変数 $t$ の関数 $f = f(t)$，$g = g(t)$ に関する連立微分方程式

$$\begin{cases} f' + 2g = \cos t \\ f - \ \ g' = \sin t \end{cases}$$

を，初期条件 $f(0) = 0$，$g(0) = 1$ のもとで解け.

# 平成28年度応用数学I・A 学習試験の解答

$\boxed{1}$ ① $y' + \frac{1}{x}y = 0$ を解く: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ ∴ $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$ ∴ $\log y = -\log x + c$

$= \log \frac{e^c}{x}$ ∴ $y = \frac{e^c}{x}$ ∴ $y = \frac{c}{x}$

② $y = \frac{v}{x}$ が与式を満たすように $v$ を定める: $y' = \frac{v' \cdot x - v}{x^2}$. これを与式に代入:

$\frac{xv' - v}{x^2} + \frac{v}{x^2} = 1 - x^2$ ∴ $\frac{v'}{x} = 1 - x^2$ ∴ $v' = x - x^3$ ∴ $v = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + c$

∴ $y = \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + c\right) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{4} + \frac{c}{x}$

$\boxed{2}$ $P = x^2 + y^2 + x$, $Q = xy$ とおくと. $P_y = 2y$, $Q_x = y$ ∴ $P_y \neq Q_x$ ∴ 完全でない.

積分因子を $\mu = x^m y^n$ とおくと.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y}\left(x^{m+2}y^n + x^m y^{n+2} + x^{m+1}y^n\right) = nx^{m+2}y^{n-1} + (n+2)x^m y^{n+1} + nx^{m+1}y^{n-1} \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{m+1}y^{n+1}\right) = (m+1)x^m y^{n+1} \end{cases}$$

右辺を比較して $\begin{cases} n = 0 \\ m+1 = n+2 \end{cases}$ ∴ $\begin{cases} m = 1 \\ n = 0 \end{cases}$ . よって. 積分因子 $\mu = x$

∴ $(x^3 + xy^2 + x^2)dx + x^2 y\, dy = 0$ は完全.

① $u_x = x^3 + xy^2 + x^2$ となる $u$ を求める:

$u = \int (x^3 + xy^2 + x^2)dx + w(y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}x^3 + w(y)$

② $u_y = x^2 y$ となる $w(y)$ を求める.

$x^2 y + \frac{dw}{dy} = x^2 y$ ∴ $\frac{dw}{dy} = 0$ ∴ $w(y) = 0$

③ 以上より. $u = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x^2y^2$. ゆえに一般解は

$\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x^2y^2 = c$ .

[3] ① 基本解：$\lambda^2-2\lambda+2=(\lambda-1)^2+1=0 \quad \therefore \lambda=1\pm i$

$\therefore y_1=e^x\sin x,\ y_2=e^x\cos x$ が基本解.

② 推測特殊解：$y_0=ax^2+bx+c \quad \therefore y_0'=2ax+b,\ y_0''=2a$. これらを与式に代入：$2a-2(2ax+b)+2(ax^2+bx+c)=x^2-1$

$\therefore 2ax^2+(2b-4a)x+2a-2b+2c=x^2-1$

$$\therefore \begin{cases} 2a=1 \\ 2b-4a=0 \\ 2a-2b+2c=-1 \end{cases} \quad \therefore a=\frac{1}{2},\ b=1,\ c=0 \quad \therefore y_0=\frac{x^2}{2}+x$$

③ 一般解：$y=e^x(c_1\sin x+c_2\cos x)+\frac{x^2}{2}+x$

[4] (1) $\mathcal{L}(e^t\cdot t^3)=\mathcal{L}(t^3)(s-1)=\frac{6}{(s-1)^4}$

$\uparrow$ $\mathcal{L}(t^3)(s)=\frac{6}{s^4}$

(2) $\mathcal{L}(t\sin t)=-\mathcal{L}((-t)\sin t)=-\frac{d}{ds}\mathcal{L}(\sin t)(s)=-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$

$=-\left(-\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right)=\frac{2s}{(s^2+1)^2}$

(3) $\cos 2t=\cos^2 t-\sin^2 t=1-2\sin^2 t \quad \therefore \sin^2 t=\frac{1-\cos 2t}{2}$ Too:

$\mathcal{L}(\sin^2 t)=\mathcal{L}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)=\frac{1}{2}\{\mathcal{L}(1)-\mathcal{L}(\cos 2t)\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}\right)$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\cancel{s^2}+4-\cancel{s^2}}{s(s^2+4)}=\frac{2}{s(s^2+4)}$

[5] ① ラプラス変換：$s^2F-f(0)s-f'(0)+F=\frac{1}{s^2}$

$\therefore s^2F-s+2+F=\frac{1}{s^2}$

② Fについて解く： $(s^2+1)F = s-2+\frac{1}{s^2}$

$$\therefore F = \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1} + \frac{1}{s^2(s^2+1)}$$

$$= \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}$$

$$= \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1} + \frac{1}{s^2}$$

$$= \mathcal{L}(\cos t) - 3\mathcal{L}(\sin t) + \mathcal{L}(t) = \mathcal{L}(t+\cos t - 3\sin t)$$

③ 逆変換：

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F) = t + \cos t - 3\sin t$$

$\boxed{6}$ ① ラプラス変換：

$$\begin{cases} sF - f(0) + 2G = \dfrac{s}{s^2+1} \\ F - (sG - g(0)) = \dfrac{1}{s^2+1} \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} sF + 2G = \dfrac{s}{s^2+1} \\ F - sG = \dfrac{1}{s^2+1} - 1 \end{cases}$$

② F, Gについて解く：

$$\begin{cases} sF + 2G = \dfrac{s}{s^2+1} \\ sF - s^2G = \dfrac{s}{s^2+1} - s \end{cases} \quad \therefore (s^2+2)G = s \quad \therefore G = \frac{s}{s^2+2}$$

$$\therefore F = sG + \frac{1}{s^2+1} - 1 = \frac{s^2}{s^2+2} + \frac{1}{s^2+1} - 1 = \cancel{1} - \frac{2}{s^2+2} + \frac{1}{s^2+1} \cancel{-1}$$

$$= \frac{1}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+2}$$

③ ラプラス逆変換： $F = \frac{1}{s^2+1} - \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{s^2+2} = \mathcal{L}(\sin t) - \sqrt{2}\,\mathcal{L}(\sin\sqrt{2}t)$

$= \mathcal{L}(\sin t - \sqrt{2}\sin\sqrt{2}t) \quad \therefore f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F) = \sin t - \sqrt{2}\sin\sqrt{2}t$

一方，$G = \frac{s}{s^2+2} = \mathcal{L}(\cos\sqrt{2}t) \quad \therefore g(t) = \cos\sqrt{2}t$