無限次元測度特論
—ベクトル測度—

お茶の水女子大学大学院
数理・情報科学専攻集中講義

平成17年1月31日〜2月4日

講 義 の 概 要

N. Dunford and J. T. Schwartz [6], N. Dinculeanu [5], J. Diestel and J. J. Uhl, Jr. [3], さらにはI. Kluvánek and G. Knowles [7] の名著を紐解けばわかるように，ベクトル測度の研究では,

- Radon-Nikodým の定理やマルチンゲール収束定理と Banach 空間の幾何的性質との関係
- 連続関数空間から Banach 空間への作用素のベクトル測度による Riesz タイプの表現とその分類
- ベクトル測度の値域に関する問題
- スペクトル作用素の研究
- ベクトル測度の積測度の存在性とそれによる Banach 空間の分類

さらにはこれらの議論を展開するのに必要不可欠な

- スカラー値関数のベクトル測度にによる積分 (Bartle-Dunford-Schwartz-Lewis 積分)
- ベクトル値関数のベクトル測度による Bartle の双線形ベクトル積分

などの問題に焦点が当てられてきた.

応用面に目を転じてみても，無限自由度をもつ制御系における最適制御問題や，量子場の理論における Feynman-Kac 形式の定式化などでベクトル測度が活躍している．特に，状態空間上で作用する連続線形作用素からなる半群と，観測手段を与えるスペクトル測度の両者によってその発展が記述される物理系の数学的考察と関連して，作用素値ベクトル測度の性質及びそれらによる積分が盛んに研究されている.

これら従来の研究は，個々のベクトル測度のもつ様々な性質を詳細に調べることに重点が置かれてきた．ところが最近になって，M. Dekiert [2] により正値測度や実測度に対する測度の弱収束の概念の自然な拡張としてベクトル測度の弱収束の概念が導入され以来，ベクトル測度一つ一つの持つ性質の解明だけでなく，ベクトル測度から成る空間の（ベクトル測度の弱収束に関する）位相的性質の解明が，ベクトル測度の研究領域の中に新たな興味ある研究対象を提示するようになってきている.

ベクトル測度の研究に対しては，“その理論は通常の測度論で，実数直線 $\mathbb{R}$ を Banach 空間 X に，絶対値 $|\cdot|$ をノルム $\|\cdot\|$ に置き換えただけではないか” という偏見がある．もちろんこのような単純な置き換えによって定式化される命題や証明手法があることは否定できない．しかし，われわれがこれから取り扱うのはこのような単純な抽象化で解決できる問題ではない．この講義で取り扱う題材は，実測度の場合と明らかに異なる（一般に困難な）状況が証明の中に出現する問題や，取る値の空間が Banach 空間のような無限次元空間であることにより本質的に生じる問題（例えば，ノルム位相と弱位相の違いに起因する問題）である.

第 0 章は「Banach 空間論・測度論からの準備」と題し，講義の中で引用される Banach 空間論及び測度論の重要な結果を，付随する定義も含めて解説する．また，受講生の便宜を考えて，付章「講義で参照される定理」でまとめておく．証明は例えば，[4, 6] を見よ.

第 1 章は「ベクトル測度の定義と基本的性質」と題し，ベクトル測度の定義から始めて，その全変動，半変動などの用語とその基本的な性質を準備する.

第 2 章「ベクトル測度の可算加法性 (Orlicz-Pettis の定理)」では，ベクトル測度の値の空間が無限次元であることにより生じる問題の一つとして，弱位相に関する可算加法性と

ノルム位相に関する可算加法性との間の関係を取り扱う.

第3章「Control measures の存在性 (Bartle-Dunford-Schwartz の定理)」では，ベクトル測度の理論を深化させるのに必要不可欠な control measure の存在性に関する Bartle-Dunford-Schwartz の定理について述べる．この定理は実測度全体からなる Banach 空間の部分集合の相対コンパクト性に関する深遠な結果の帰結として得られる.

第4章「その他の重要な定理」で紹介される定理は，ベクトル測度のみならず実測度に対しても重要かつ有益なものである．しかし，その証明は実測度の場合と同様に示せるか，あるいは実測度の場合の結果から簡単に導けるものであり，証明なしで結果を述べるにとどめる.

ベクトル測度の理論展開に際して重要な道具の一つである，スカラー値関数のベクトル測度による積分 (Bartle-Dunford-Schwartz-Lewis 積分) は，第5章「Bartle-Dunford-Schwartz-Lewis 積分」で詳細に述べる．この積分理論の展開に際しては，すでに第3章で述べたベクトル測度に対する control measure が重要な役割を果たす.

第6章「ベクトル測度の正則性」では，位相空間上のベクトルに対して様々なタイプの正則性を導入する．さらに，それらの正則性は対応する実測度の正則性で判定できることを示す.

この講義最後の章である第7章「弱コンパクト作用素の表現 (Riesz-Kakutani の定理の拡張) では，ベクトル測度の理論の作用素論への重要な貢献の一つである Bartle-Dunford-Schwartz の定理を紹介する．この定理はコンパクト空間 S 上の連続関数全体からなる Banach 空間 $C(S)$ 上の有界線形汎関数の表現定理として有名な Riesz-Kakutani の定理の拡張であり，弱コンパクト作用素 $T : C(S) \to X$ が Banach 空間 X に値を取るベクトル測度で表現されることを主張している．この定理により，その性質が調べにくかった弱コンパクト作用素の解明が飛躍的に進展した.

最後になりましたが，今回の講義の機会を与えていただいたお茶の水女子大学教授・前田ミチエ先生に感謝の意を捧げる.

参考文献

[1] R. G. Bartle, N. Dunford and J. T. Schwartz, *Weak compactness and vector measures*, Canad. J. Math. **7** (1955), 289–305.

[2] M. Dekiert, *Kompaktheit, Fortsetzbarkeit und Konvergenz von Vektormassen*, Dissertation, University of Essen, 1991.

[3] J. Diestel and J. J. Uhl, Jr., *Vector measures*, Amer. Math. Soc., Math. Surveys No. 15, Providence, R. I., 1977.

[4] J. Diestel, *Sequences and series in Banach spaces*, Springer-Verlag, New York, 1984.

[5] N. Dinculeanu, *Vector measures*, Pergamon Press, Berlin, 1967.

[6] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators*, part I: general theory, John Wiley & Sons, 1957.

[7] I. Kluvánek and G. Knowles, *Vector measures and control systems*, North-Holland, 1976.

[8] D. R. Lewis, *Integration with respect to vector measures*, Pacific J. Math. **33** (1970), 157–165.

目　　次

付章：講義で参照される定理

測度論からの準備

- **写像の可測性**

(1) $(\Omega, \mathcal{A})$，$(\Phi, \mathcal{B})$ は可測空間，$\xi : \Omega \to \Phi$ は写像とする．このとき，ξ が $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$**-可測** $\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}$ $\forall B \in \mathcal{B}$ に対して $\xi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

(2) $f : \Omega \to \mathbb{R}$ は実数値関数とする．このとき，f が **Borel 可測** $\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}$ $\forall a \in \mathbb{R}$ に対して $\{\omega \in \Omega : f(\omega) < a\} \in \mathcal{A}$.

- **集合族によって生成される σ-集合体**.

Ω は空でない集合，$\mathcal{D}$ は Ω の部分集合からなる空でない集合族とする．このとき，$\mathcal{D}$ を含む最小の σ-集合体がただ一つ存在する．それを $\sigma(\mathcal{D})$ とかき，$\mathcal{D}$ によって**生成される σ-集合体**という．実際，$\sigma(\mathcal{D})$ は $\mathcal{D}$ を含むすべての σ-集合体の共通部分として与えられる．

- **可測性の判定**.

$(\Omega, \mathcal{A})$，$(\Phi, \mathcal{B})$ は可測空間，$\mathcal{B}_0$ は $\mathcal{B}$ の部分集合族で $\sigma(\mathcal{B}_0) = \mathcal{B}$ とする．$\xi : \Omega \to \Phi$ は写像とする．このとき，以下が成り立つ:

(1) $\sigma(\xi^{-1}(\mathcal{B}_0)) = \xi^{-1}(\mathcal{B})$.

(2) ξ が $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-可測 $\Longleftrightarrow$ $\forall B_0 \in \mathcal{B}_0$ に対して $\xi^{-1}(B_0) \in \mathcal{A}$.

- **Dynkin System Theorem**.

Ω は空でない集合で，Ω の部分集合からなる集合族 $\mathcal{D}$ は**Dynkin system** とする．すなわち次の 3 つの条件を満たす:

(a) $\Omega \in \mathcal{D}$.

(b) $A, B \in \mathcal{D}$ で，$B \subset A$ ならば $A - B \in \mathcal{D}$.

(c) $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{D}$ で $A_n \uparrow A$ ならば $A \in \mathcal{D}$.

さらに，$\mathcal{E}$ は Ω の部分集合からなる集合族で有限積に関して閉じており，$\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$ であるとする．このとき，$\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}$ となる．

- **写像族によって生成される σ-集合体**.

Ω は空でない集合，$(\Phi, \mathcal{B})$ は可測空間，Γ は Ω から Φ への写像からなる空でない族とする．このとき，Γ に属する写像をすべて $\mathcal{B}$ に関して可測にする最小の σ-集合体が Ω 上にただ一つ存在する．それを $\sigma(\Gamma)$ とかき，Γ によって**生成される σ-集合体**という．実際，$\sigma(\Gamma)$ は

$$\sigma(\Gamma) = \sigma(\{\xi^{-1}(B) : \xi \in \Gamma, B \in \mathcal{B}\})$$

で与えられる．この σ-集合体は次の性質をもつ:

となる．さらに

$$|\gamma|(S) = \|f\|_1 := \int_S |f| d\lambda$$

が成り立つ．

- **Vitali-Hahn-Saks Theorem.** $(\Omega, \mathcal{A})$ は可測空間，$\{\gamma_n\} \subset \mathrm{ca}(\mathcal{A})$，$\lambda \in \mathrm{ca}^+(\mathcal{A})$ で
  - (i) 各 γ_n は λ-連続
  - (ii) 各 $E \in \mathcal{A}$ に対して $\lim_{n\to\infty} \gamma_n(E) = \gamma(E)$ が存在

と仮定する．このとき，$\{\gamma_n\}$ は一様に λ-連続 (i.e., $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0; E \in \mathcal{A}$ で $\lambda(E) < \delta$ ならば $|\gamma_n(E)| < \varepsilon$ for $n = 1, 2, \ldots$) で，γ は λ-連続かつ可算加法的となる．

- **Nikodým's Convergence Theorem.** $(\Omega, \mathcal{A})$ は可測空間，$\{\lambda_n\} \subset \mathrm{ca}(\mathcal{A})$ で，各 $E \in \mathcal{A}$ に対して $\lim_{n\to\infty} \lambda_n(E) = \lambda(E)$ が存在すると仮定する．このとき，$\{\lambda_n\}$ は一様に可算加法的で，$\lambda \in \mathrm{ca}(\mathcal{A})$ となる．

- **Nikodým Boundedness Theorem.** $(\Omega, \mathcal{A})$ は可測空間，$M \subset \mathrm{ca}(\mathcal{A})$ とする．各 $E \in \mathcal{A}$ に対して $\sup_{\lambda\in M} |\lambda(E)| < \infty$ ならば $\sup_{\lambda\in M} |\lambda|(\Omega) < \infty$.

距離空間論からの準備

- **点と集合の距離.**

  (S, d) は距離空間，$A \subset S$ とする．このとき，点 s と集合 A の**距離**を

$$d(s, A) := \inf\{d(s, t) : t \in A\}$$

で定義する．この距離は次の性質をもつ:

(1) 不等式

$$|d(s, A) - d(t, A)| \le d(s, t) \quad \text{for all } s, t \in S$$

を満たす．それゆえ，写像 $s \in S \mapsto d(s, A)$ は一様連続.

(2) A が閉集合のとき，$s \in A \iff d(s, A) = 0$.

- **距離空間におけるコンパクト性判定条件.**

  (S, d) は距離空間，$A \subset S$ とする．このとき，次の条件は同値:

  - (a) A は相対コンパクト, i.e., $\bar{A}$ がコンパクト.
  - (b) $\bar{A}$ は可算コンパクト，i.e., $\bar{A}$ の任意の可算開被覆は有限部分被覆をもつ.
  - (c) A は相対点列コンパクト，i.e., A の中の任意の点列は収束する部分列をもつ (収束先は A に属する必要はない).
  - (d) $\bar{A}$ は完備かつ A は全有界，i.e., $\forall\varepsilon > 0$ に対して有限個の点 $s_1, \ldots, s_n$ が存在して，$A \subset \cup_{i=1}^n B(s_i, \varepsilon)$ とできる (このとき，点 $s_1, \ldots, s_n$ は A に属していなくてもよい)．この点の集合 $\{s_1, \ldots, s_n\}$ のことを集合 A の **ε-網** (ε-net) という.

- **距離空間における可分性の判定条件.**

  (S, d) は距離空間，$A \subset S$ とする．このとき次の条件は同値.

  (a) S は可分.

  (b) S は第 2 可算公理を満たす，i.e.，S は可算個の集合からなる開基底をもつ.

  (c) S は fully Lindelöf 空間，i.e.，S の任意の部分集合の任意の開被覆は可算部分被覆をもつ.

  (d) S は $\inf\{d(s,t) : s, t \in A, s \neq t\} > 0$ を満たす非可算部分集合 A をもたない.

位相空間論からの準備

- **2 つの位相が一致するための十分条件.**

  S は空でない集合，τ_1，τ_2 は S 上の位相とし，τ_1 は τ_2 よりも強く，(S, τ_1) はコンパクト空間，(S, τ_2) は Hausdorff 空間とする．このとき，2 つの位相 τ_1 と τ_2 は一致する.

- **$C_b(S)$ の可分性.**

  S は完全正則空間とする．このとき，Banach 空間 $C_b(S)$ が可分 $\Longleftrightarrow$ S はコンパクト距離付け可能.

- **完全正則空間の閉集合とコンパクト集合の連続関数による分離.**

  S は完全正則空間，$F \subset S$ は閉集合，$K \subset S$ はコンパクト集合とする．このとき，$0 \leq f \leq 1, f(F) = 0, f(K) = 1$ を満たす S 上の連続関数 $f \in C_b(S)$ が存在する.

- **下半連続・上半連続関数.**

  S は Hausdorff 空間，$f : S \to \mathbb{R}$ は関数とする.

  (1) f が**下半連続** (lower semicontinuous) $\Longleftrightarrow$ 各 $a \in \mathbb{R}$ に対して，$\{s \in S : f(s) > a\}$ は S の開集合.

  (2) f が**上半連続** (upper semicontinuous) $\Longleftrightarrow$ 各 $a \in \mathbb{R}$ に対して，$\{s \in S : f(s) < a\}$ は S の開集合.

  下半連続・上半連続関数は次の性質をもつ:

  (a) 開集合の定義関数は下半連続．閉集合の定義関数は上半連続.

  (b) f が下半連続 $\Longleftrightarrow$ $-f$ が上半連続.

  (c) f が連続 $\Longleftrightarrow$ f は下半連続かつ上半連続.

  (d) f が下半連続 $\Longleftrightarrow$ S の点からなる任意のネット $\{s_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ と $s \in S$ に対して

  $$f(s) \leq \liminf_{\alpha \in \Gamma} f(s_\alpha).$$

  f が上半連続 $\Longleftrightarrow$ S の点からなる任意のネット $\{s_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ と $s \in S$ に対して

  $$\limsup_{\alpha \in \Gamma} f(s_\alpha) \leq f(s).$$

(1) $(\Omega', \mathcal{A}')$ は可測空間で，$\eta : \Omega' \to \Omega$ は写像とする．このとき，η が $(\mathcal{A}', \sigma(\Gamma))$-可測 $\Longleftrightarrow$ 各 $\xi \in \Gamma$ に対して，写像 $\xi \circ \eta$ が $(\mathcal{A}', \mathcal{B})$-可測．

• **直積 σ-集合体**.

$(\Omega_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ は可測空間の族とする．次の形の可測長方形

$$A = \Pi_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha, \quad \text{各 } A_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha \text{ で，有限個の } \alpha \in \Gamma \text{ を除いて } A_\alpha = \Omega_\alpha$$

によって生成された直積集合 $\Pi_{\alpha \in \Gamma} \Omega_\alpha$ 上の σ-集合体を $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ の**直積 σ-集合体**といい，$\Pi_{\alpha \in \Gamma} \mathcal{A}_\alpha$ で表す．特に，すべての $\alpha \in \Gamma$ に対して $\Omega_\alpha = \Omega$，$\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A}$ のときは，$(\Pi_{\alpha \in \Gamma} \Omega_\alpha, \Pi_{\alpha \in \Gamma} \mathcal{A}_\alpha)$ を $(\Omega^\Gamma, \mathcal{A}^\Gamma)$ で表す．直積 σ-集合体は次の性質をもつ:

(1) 各 $\alpha \in \Gamma$ に対して

$$\pi_\alpha(\omega) = \omega_\alpha, \quad \omega = (\omega_\alpha)_{\alpha \in \Gamma} \in \Pi_{\alpha \in \Gamma} \Omega_\alpha$$

によって射影 $\pi_\alpha : \Pi_{\alpha \in \Gamma} \Omega_\alpha \to \Omega_\alpha$ を定義する．このとき，直積 σ-集合体 $\Pi_{\alpha \in \Gamma} \mathcal{A}_\alpha$ はすべての射影 $\pi_\alpha : \Pi_{\alpha \in \Gamma} \Omega_\alpha \to \Omega_\alpha$ を $\mathcal{A}_\alpha$ に関して可測にする最小の σ-集合体である．それゆえ

$$\Pi_{\alpha \in \Gamma} \mathcal{A}_\alpha = \sigma\left(\{\pi_\alpha^{-1}(A_\alpha) : \alpha \in \Gamma, A_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha\}\right)$$

である．さらに，各 $\alpha \in \Gamma$ に対して $\mathcal{D}_\alpha$ は $\mathcal{A}_\alpha$ の部分集合族で $\sigma(\mathcal{D}_\alpha) = \mathcal{A}_\alpha$ とすると

$$\Pi_{\alpha \in \Gamma} \mathcal{A}_\alpha = \sigma\left(\{\pi_\alpha^{-1}(A_\alpha) : \alpha \in \Gamma, A_\alpha \in \mathcal{D}_\alpha\}\right)$$

でもある．

(2) $(\Omega, \mathcal{A})$ は可測空間，$f_\alpha : \Omega \to \Omega_\alpha$ $(\alpha \in \Gamma)$ は写像の族で，写像 $f : \Omega \to \Pi_{\alpha \in \Gamma} \Omega_\alpha$ を $f(\omega) := (f_\alpha(\omega))_{\alpha \in \Gamma}$ $(\omega \in \Omega)$ で定義する．このとき

$$f \text{ が } (\mathcal{A}, \Pi_{\alpha \in \Gamma} \mathcal{A}_\alpha)\text{-可測} \Longleftrightarrow \text{すべての } \alpha \in \Gamma \text{ に対して } f_\alpha \text{ が } (\mathcal{A}, \mathcal{A}_\alpha)\text{-可測.}$$

• **Egorov Theorem**. $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ は有限な測度空間，Ω 上で定義された実数値関数 f, f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ は $\mathcal{A}$-可測とする．このとき，$f_n \to f$ λ-a.e. ならば，$f_n \to f$ λ-almost uniformly, i.e., $\forall \varepsilon > 0$, $\exists E_\varepsilon \in \mathcal{A}$; $\lambda(E_\varepsilon) < \varepsilon$ かつ $f_n(\omega) \to f(\omega)$ uniformly on $\omega \in \Omega - E_\varepsilon$.

• **Carathéodory-Hahn Extension Theorem**.

Ω は空でない集合，$\mathcal{F}$ は Ω の部分集合からなる集合体とする．有限加法的な実数値集合関数 $\lambda : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ が $\mathcal{F}$ 上で可算加法的ならば，λ は可算加法的な拡張 $\bar{\lambda} : \sigma(\mathcal{F}) \to \mathbb{R}$ をただ一つもつ．

• **Radon-Nikodým Theorem**. $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ は σ-有限な測度空間で，$\gamma \in \mathrm{ca}(\mathcal{A})$ は λ-連続とする．このとき，$f \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ が一意的に存在して

$$\gamma(E) = \int_E f d\lambda, \quad E \in \mathcal{A}$$

(e) コンパクト集合上の下半連続 (上半連続) 関数はそこで最小値 (最大値) をとる.

(f) $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ は S 上の下半連続関数族とする．このとき，$\sup_{\alpha\in\Gamma} f_\alpha$ は下半連続．特に，Γ が有限集合のときは，$\inf_{\alpha\in\Gamma} f_\alpha$ も下半連続．同様に，$\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ は S 上の上半連続関数族とすると，$\inf_{\alpha\in\Gamma} f_\alpha$ は上半連続．特に，Γ が有限集合のときは，$\sup_{\alpha\in\Gamma} f_\alpha$ も上半連続.

(g) S は完全正則空間とする．このとき，S 上の任意の下半連続 (上半連続) 関数は連続関数族の上限 (下限) 関数として表される．特に，S が距離空間の場合は，S 上の任意の下半連続 (上半連続) 関数 f は単調増加 (単調減少) な連続関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の極限関数として表される．さらに，ある定数 $M>0$ が存在して，$|f(s)|\le M$ for all $s\in S$ を満たせば，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $|f_n(s)|\le M$ for all $n\in\mathbb{N}$ and $s\in S$ を満たすように選べる.

函数解析学からの準備

• **Hahn-Banach Theorem.** X はノルム空間とする.

(1) M は X の閉部分空間で, $x_0\notin M$ とする．このとき

$$\exists x^*\in X^*;\quad x^*x_0=1 \text{ and } x^*x=0 \text{ for } \forall x\in M.$$

(2) $x_0\ne 0$ とする．このとき

$$\exists x^*\in X^*;\quad \|x^*\|=1 \text{ and } x^*x_0=\|x_0\|.$$

• **The Principle of Uniform Boundedness.**

(1) X はノルム空間で，$A\subset X$ とする．このとき，次の条件は同値:

(i) A は弱有界, i.e., 各 $x^*\in X^*$ に対して，$\sup_{x\in A}|x^*x|<\infty$.

(ii) A は有界, i.e., $\sup_{x\in A}\|x\|<\infty$

(2) X，Y は Banach 空間で，$\mathcal{H}$ は X から Y への有界線形作用素から成る集合とする．このとき，次の 3 つの条件は同値:

(i) $\sup_{T\in\mathcal{H}}\|T\|<\infty$.

(ii) 各 $x\in X$ に対して $\sup_{T\in\mathcal{H}}\|Tx\|<\infty$.

(iii) 各 $x\in X$，各 $y^*\in Y^*$ に対して $\sup_{T\in\mathcal{H}}|y^*Tx|<\infty$.

• **Banach-Alaoglue Theorem.**

X は Banach 空間とする.

(1) X^* の有界閉集合は弱位相 $\sigma(X^*,X)$ に関してコンパクト.

(2) X^* の有界閉集合が弱位相 $\sigma(X^*,X)$ に関して (コンパクト) 距離付け可能となるための必要十分条件は X が可分.

• **Eberlein-Šmulian Theorem.** X は Banach 空間，$A \subset X$ とする．このとき，次の条件は同値:

(i) A は相対弱点列コンパクト, i.e., A の中の任意の点列は X の点に弱収束する部分列をもつ．

(ii) A の任意の可算無限部分集合 H は弱位相に関する集積点 $x_0 \in X$ をもつ, i.e., x_0 の任意の弱近傍 $U(x_0)$ に対して，$U(x_0) \cap \{H - \{x_0\}\} \neq \emptyset$.

(iii) A の弱位相に関する閉包は弱コンパクト．

(iv) X の弱開集合からなる A の任意の可算被覆が有限部分被覆をもつ．

• **Riesz Representation Theorem.** S は compact Hausdorff 空間で，$\varphi \in C(S)^*$ とする．このとき

$$\varphi(f) = \int_S f d\lambda, \quad f \in C(S)$$

を満たす $\lambda \in \mathrm{rca}(S)$ が一意的に存在して，$\|\varphi\| = |\lambda|(S)$ が成り立つ．言い換えれば，対応 $\varphi \in C(S)^* \mapsto \lambda \in \mathrm{rca}(S)$ は $C(S)^*$ と $\mathrm{rca}(S)$ の間の等距離同型対応を与える．さらにこの対応は順序も保存する, i.e.,

$$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \iff \int_S f d\lambda_1 \leqq \int_S f d\lambda_2 \quad \text{for } \forall f \geqq 0$$

が成り立つ．

連絡先: 河邊　淳
〒３８０－８５５３　長野県長野市若里４－１７－１　信州大学工学部数学教室
Tel: 026-269-5562
e-mail: jkawabe@shinshu-u.ac.jp

§0 Banach空間論からの準備 (Part I)

この節では この講義を展開するにあたり必要となる最小限のBanach空間論における定義及び結果を簡潔にまとめる.

<u>(0.1) 定義</u> (ノルム空間) Xを (複素または実) ベクトル空間とする.
$\forall x \in X$に対して次の (N1)–(N3) を満たす実数 $\|x\|$ が定まるとき, $\|x\|$ を x のノルム (norm) という:

(N1) $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, ただし α は複素数または実数 (=スカラー)

(N3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (三角不等式)

ノルムをもつベクトル空間を <u>ノルム空間</u> (normed space) という.

<u>(0.2) 命題</u> (ノルム空間の基本的な性質) $(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする.

(1) $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\|$. $(x, y \in X)$

(2) ノルム空間は $d(x,y) = \|x-y\|$ $(x, y \in X)$ とおくと 距離空間となる.

(3) $f(x) := \|x\|$, $g(\alpha, x) := \alpha x$, $h(x,y) := x+y$ $(x, y \in X$, αはスカラー$)$
によって定まる写像 $f: X \to \mathbb{R}$, $g: (\mathbb{C} \text{ or } \mathbb{R}) \times X \to \mathbb{R}$,
$h: X \times X \to \mathbb{R}$ は連続.

ここで, $x_n \in X$ が $x \in X$ にこの距離に関して収束するとき, $x_n \to x$ とかく:
すなわち, $x_n \to x \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \|x_n - x\| \to 0$.

(証明) (1). $\|x\| = \|(x+y)+(-y)\| \leq \|x+y\| + \|-y\| = \|x+y\| + \|y\|$

$\therefore \|x\| - \|y\| \leq \|x+y\| \cdots\cdots ①$

同様に. $\|y\| = \|(x+y)+(-x)\| \leq \|x+y\| + \|x\|$ $\therefore \|y\| - \|x\| \leq \|x+y\| \cdots ②$

①, ②より. $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x+y\|$.

(2) $d(x,y) = \|x-y\|$ が 距離の3つの公理 (D1)-(D3), i.e.,

(D1) $d(x,y) \geq 0$; $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(D2) $d(x,y) = d(y,x)$

(D3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

を満たすことを確かめればよい.

(D1): $d(x,y) = \|x-y\| \underset{(N1)}{\geq} 0$ である. さらに $d(x,y) = \|x-y\| = 0 \underset{(N1)}{\Longleftrightarrow} x-y=0 \Leftrightarrow x=y$.

(D2) $d(x,y) = \|x-y\| = \|(-1)(y-x)\| \underset{(N2)}{=} \|y-x\| = d(y,x)$

(D3) $d(x,y) = \|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \underset{(N3)}{\leq} \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y)$.

(3) $\alpha_k \to \alpha$, $x_m \to x$, $y_n \to y$, すなわち, $|\alpha_k - \alpha| \to 0$, $\|x_m - x\| \to 0$,

$\|y_n - y\| \to 0$ とする. このとき, (3)を示すには

$\|x_m\| \to \|x\|$, $\|\alpha_k x_m - \alpha x\| \to 0$, $\|(x_m + y_n) - (x+y)\| \to 0$

を示せばよい. 以下でこれを順に示す:

$$\left|\,\|x_n\|-\|x\|\,\right| \underset{(1)}{\leq} \|x_n-x\| \to 0$$

$$\|\alpha_k x_n-\alpha x\| = \|(\alpha_k-\alpha)x_n+\alpha(x_n-x)\| \leq |\alpha_k-\alpha|\cdot\|x_n\|+|\alpha|\cdot\|x_n-x\|$$

$$\to 0\cdot\|x\|+|\alpha|\cdot 0=0$$

$$\|(x_n+y_n)-(x+y)\| = \|(x_n-x)+(y_n-y)\| \leq \|x_n-x\|+\|y_n-y\| \to 0. \quad \square$$

<u>(0.3) 定義</u> (Banach空間) ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ が、そのノルムによって定まる距離 $d(x,y)=\|x-y\|$ に関して完備であるとき、<u>Banach空間</u>という。

以下ではBanach空間の代表的な例をあげる。

<u>(0.4) 例</u> (Banach空間の例)。

(1). n次元Euclid空間 $\mathbb{R}^n$ はノルム $\|x\|:=\left(|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2\right)^{1/2}$ に関して Banach空間；n次Unitary空間 $\mathbb{C}^n$ も同じノルムに関してBanach空間。

(2) 閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数全体から成るベクトル空間 $C[a,b]$ は、ノルム $\|x\|:=\sup_{t\in[a,b]}|x(t)|$ に関してBanach空間。

(3) $1\leq p<\infty$ とする。p乗総和可能, i.e., $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<\infty$ を満たす数列 $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 全体から成るベクトル空間 ℓ^p は、ノルム $\|x\|:=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p}$ に関してBanach空間。

また、有界な数列 $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 全体から成るベクトル空間 l^∞ はノルム

$\|x\|:=\sup_{k\in\mathbb{N}}|x_k|$ に関してBanach空間.

(4) $1\leq p<\infty$ とする. 閉区間 $[a,b]$ 上で定義された p 乗可積分, i.e.,

$$\int_a^b |x(t)|^p dt<\infty$$

である関数 $x(t)$ の全体から成るベクトル空間 $L^p[a,b]$ はノルム

$\|x\|:=\left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{1/p}$ に関してBanach空間.

また、本質的に有界, i.e., $\exists N$:零集合; $x(t)$ は $[a,b]-N$ 上で有界,

である関数 $x(t)$ の全体から成るベクトル空間 $L^\infty[a,b]$ は、ノルム

$\|x\|:=\inf\{\sup\{|x(t)|:t\in[a,b]-N\}:N$ は零集合$\}$ に関して

Banach空間.

念のため、l^p 空間がノルム $\|x\|:=\left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p\right)^{1/p}$ に関して完備となる

ことの証明を与えておく:

$\{x^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ (ただし $x^{(n)}=(x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$) を l^p のCauchy列とする.

$\forall\varepsilon>0$ を固定: $\exists n_0\in\mathbb{N}$; $m,n\geq n_0$ のとき、

$$\|x^{(n)}-x^{(m)}\|=\left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^{(n)}-x_k^{(m)}|^p\right)^{1/p}<\varepsilon \qquad (*)$$

よって、各 $k\in\mathbb{N}$ に対して、$|x_k^{(n)}-x_k^{(m)}|<\varepsilon$. ゆえに、$\{x_k^{(n)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ は、

$\mathbb{C}$ におけるCauchy列である. $\mathbb{C}$ は完備なので、

$\exists a_k \in \mathbb{C}\,;\ x_k^{(n)} \to a_k \ (n \to \infty)$.

各$k\in\mathbb{N}$に対して上記のようにしてa_kが定まるので $a=(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$と置く.

以下では. $a\in l^p$で $\|x^{(n)}-a\|\to 0$となることを示す:

<u>$a\in l^p$であること:</u> Nは任意の自然数とする. (＊)より. $m, n \geq n_0$のとき.

$$\left(\sum_{k=1}^{N}|x_k^{(n)}-x_k^{(m)}|^p\right)^{1/p} < \varepsilon$$

$m\to\infty$とすると $x_k^{(m)}\to a_k$なので. $n\geq n_0$のとき.

$$\left(\sum_{k=1}^{N}|x_k^{(n)}-a_k|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon.$$

Nは任意なので $N\to\infty$とすると. $n\geq n_0$のとき.

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k^{(n)}-a_k|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon. \quad \cdots\cdots\cdots (※)$$

よって $x^{(n_0)}-a\in l^p$ $\therefore a = x^{(n_0)}-(x^{(n_0)}-a)\in l^p$.

また. (※)より. $n\geq n_0$のとき $\|x^{(n)}-a\|\leq\varepsilon$. ゆえに. $\|x^{(n)}-a\|\to 0$ □

<u>(0.5) 定義</u> (線形作用素) X, Yはノルム空間とする. 写像$T: X\to Y$は

$T(x+y)=T(x)+T(y)$, $T(\alpha x)=\alpha T(x)$ ($x, y\in X$, αはスカラー)

を満たすとき. <u>線形写像</u> (linear operator, あるいは略して operator) という.

特に. Yがスカラー, すなわち $Y=\mathbb{C}$ または $Y=\mathbb{R}$のとき. Tを<u>線形汎関数</u>

(linear functional) という.

(0.6) 定義 (有界線形作用素) X, Y はノルム空間で, $T: X \to Y$ は線形作用素とする.

T が有界 (bounded) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists k \geq 0 ; \forall x \in X, \ \|T(x)\| \leq k \cdot \|x\|$.

(0.7) 命題 (線形作用素に対しては連続性 = 有界性) X, Y はノルム空間, $T: X \to Y$ は線形作用素とする. このとき次の (1)–(3) は同値:

(1) T は有界

(2) T は X 上で連続, i.e., $\forall x \in X$ と $x_n \to x$ なる任意の点列 $\{x_n\}$ に対して
$$T(x_n) \to T(x).$$

(3) T は $x = 0$ で連続.

(証明) (1) $\Rightarrow$ (2): T は有界なので $\exists k \geq 0 ; \forall z \in X, \ \|T(z)\| \leq k \cdot \|z\|$.

$x_n \to x$ とする. 上式に $z = x_n - x$ を代入すると,
$$\|T(x_n) - T(x)\| = \|T(x_n - x)\| \leq k \cdot \|x_n - x\|.$$
$n \to \infty$ とすると, $\|x_n - x\| \to 0$ なので $T(x_n) \to T(x)$.

(2) $\Rightarrow$ (3): T は $\forall x \in X$ において連続なので $x = 0$ でも連続.

(3) $\Rightarrow$ (1): T は有界でないとすると, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\exists x_n \in X$;
$\|T(x_n)\| > n \cdot \|x_n\|$ とできる. (このとき $\|x_n\| \neq 0$. 実際, $\|x_n\| = 0$ とすると, $x_n = 0$. $\therefore T(x_n) = 0$ $\therefore \|T(x_n)\| = 0 > 0 = n \cdot \|x_n\|$ となり矛盾!)

ここで $y_n := x_n / n \cdot \|x_n\|$ とおくと,

$\|T(y_n)\| = \dfrac{\|T(x_n)\|}{n\cdot\|x_n\|} > 1$. 一方, $\|y_n\| = \frac{1}{n} \to 0$ なので T の $x=0$ における連続性より, $T(y_n) \to 0$. $\therefore \|T(y_n)\| \to 0$. これは矛盾 $\square$

<u>(0.8) 定義</u> (有界線形作用素のノルム) X, Y はノルム空間で $T: X \to Y$ は有界線形作用素とする. このとき,

$$\|T\| := \inf\{K \geq 0 : \|T(x)\| \leq K\cdot\|x\| \text{ for } {}^\forall x \in X\}$$

のことを T の<u>ノルム</u>という. (右辺の inf の $\{\cdots\}$ は下に有界な空でない集合なので下限は常に存在. よって定義は well-defined.)

<u>(0.9) 命題</u> (ノルムの公式)

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\leq 1}\|T(x)\| = \sup_{\|x\|=1}\|T(x)\|$$

(証明) $\mathcal{K} := \{K \geq 0 : \|T(x)\| \leq K\cdot\|x\| \text{ for } {}^\forall x \in X\}$ と置くと, $\|T\| = \inf\{K : K \in \mathcal{K}\}$

また, $K_0 := \sup_{x\neq 0}\|T(x)\|/\|x\|$ とおく. ${}^\forall\varepsilon > 0$, ${}^\exists K_\varepsilon \in \mathcal{K}$; $\|T\| + \varepsilon \geq K_\varepsilon$.

$$\therefore \|T(x)\| \leq K_\varepsilon\cdot\|x\| \leq (\|T\|+\varepsilon)\|x\| \text{ for } {}^\forall x \in X.$$

$$\therefore \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq \|T\| + \varepsilon \text{ for } {}^\forall x \neq 0$$

$$\therefore \sup_{x\neq 0}\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq \|T\| + \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ は任意なので $\varepsilon \to 0$ とすると, $K_0 \leq \|T\| \cdots ①$

一方, K_0 の定義より, $K_0 \geq 0$ で ${}^\forall x \neq 0$ に対して $K_0 \geq \|T(x)\|/\|x\|$.

$\therefore \|T(x)\| \leq K_0\cdot\|x\|$. この式は $x=0$ でも成り立つので $K_0 \in \mathcal{K}$. よって,

$\|T\|$の定義より. $\|T\| \leq K_0$ ・・・・②. ゆえに. ①, ②より $K_0 = \|T\|$.

⑤ $K_0 = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$ の証明: $y \in X$ で $\|y\| = 1$ とすると. $\|T(y)\| \leq K_0$ は明らか.

$$\therefore \sup_{\|y\|=1} \|T(y)\| \leq K_0 \quad \cdots\cdots ③$$

一方. $x \neq 0$ とする. $y = \dfrac{x}{\|x\|}$ と置くと. $\|y\| = 1$ なので

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \|T(y)\| \leq \sup_{\|y\|=1} \|T(y)\|.$$

$$\therefore K_0 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq \sup_{\|y\|=1} \|T(y)\| \quad \cdots\cdots ④$$

③, ④より.

$$K_0 = \sup_{\|y\|=1} \|T(y)\| \text{ が成り立つ.}$$

⑤ $\sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$ の証明:

"$\geq$" は明らか. よって "$\leq$" を示す. $\forall x \in X$ with $\|x\| \leq 1$ を固定:

$x \neq 0$ とすると. $y = x/\|x\|$ と置けば $\|y\| = 1$

$$\therefore \|T(x)\| = \|T(\|x\| y)\| = \|x\| \cdot \|T(y)\| \leq \|T(y)\|$$

$$\therefore \|T(x)\| \leq \sup_{\|y\|=1} \|T(y)\|$$

上式は $x = 0$ でも成り立つ. よって. $\sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$.

□

(0.10) 例 (有界線形作用素) $K(s,t):[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R}$ は連続とする.

$$T(x)(s) := \int_a^b K(s,t)x(t)\,dt,\quad x=x(t)\in C[a,b]$$

で定義される写像 $T: C[a,b]\to C[a,b]$ は,有界線形写像で

$$\|T(x)\| \le \|x\| \sup_{a\le s\le b}\int_a^b |K(s,t)|\,dt \quad \text{for } \forall x\in C[a,b]$$

を満たす.この T を $K(s,t)$ を核 (kernel) とする積分作用素という.

(証明) K は $[a,b]\times[a,b]$ 上で連続なので,有界かつ一様連続.

(i) 各 $x=x(t)\in C[a,b]$ に対して,$T(x)\in C[a,b]$.

∵) $x=x(t)\in C[a,b]$ とする.$\forall s_0\in[a,b]$,$\forall\varepsilon>0$ を固定:

K は $[a,b]\times[a,b]$ 上で一様連続なので,$\exists\delta>0$; $|s_1-s_2|<\delta$,$|t_1-t_2|<\delta$ ならば $|K(s_1,t_1)-K(s_2,t_2)|<\varepsilon$.

よって,$s\in[a,b]$ で $|s-s_0|<\delta$ とすると,

$$|T(x)(s)-T(x)(s_0)| = \left|\int_a^b K(s,t)x(t)\,dt - \int_a^b K(s_0,t)x(t)\,dt\right|$$

$$\le \int_a^b |K(s,t)-K(s_0,t)|\cdot|x(t)|\,dt \le \varepsilon\cdot\|x\|(b-a)$$

ゆえに,$T(x)$ は $s=s_0$ で連続.s_0 は任意なので $T(x)$ は $[a,b]$ 上で連続.

(ii) $T: C[a,b]\to C[a,b]$ が有界線形.

∵) T の線形性は明らか.よって有界性を示す:$\forall x\in C[a,b]$ に対して,

$$\|T(x)\| = \sup_{a\le s\le b}\left|\int_a^b K(s,t)x(t)\,dt\right| \le \sup_{a\le s\le b}\left\{\|x\|\cdot\int_a^b |K(s,t)|\,dt\right\}$$

ノルムは $\|x\| := \sup_{0\le t\le 1}|x(t)|$ とする.

$$= \|x\| \cdot \sup_{a\le s\le b} \int_a^b |K(s,t)|\,dt$$

□

(0.11) 例. (有界でない線形作用素) $[0,1]$ 上で定義された C^1 級の関数 (i.e., 1回微分可能で, その導関数が連続) 全体から成るノルム空間を $C^1[0,1]$ で表す.

$$T(x)(t) := \frac{d}{dt}x(t), \quad x = x(t) \in C^1[0,1]$$

で定義される線形作用素 $T : C^1[0,1] \to C[0,1]$ は有界でない. この T を微分作用素という.

(証明) $x_n(t) := t^n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ と置くと, $x_n \in C^1[0,1]$ で $\|x_n\| = 1$.

一方, $T(x_n)(t) = \frac{d}{dt}t^n = n \cdot t^{n-1}$ なので $\|T(x_n)\| = n$.

以上より, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in C^1[0,1]$; $\|x_n\| = 1$ かつ $\|T(x_n)\| \geq n = n \cdot \|x_n\|$

となるので, T は有界ではない. □

(0.12) 定義 (有界線形作用素の作る空間) X, Y をノルム空間とする.

$B(X,Y) :=$ X から Y への有界線形作用素全体とし, $T, S \in B(X,Y)$, α はスカラーとする.

和 $T+S$: $(T+S)(x) := T(x) + S(x)$, $\forall x \in X$

スカラー倍 αT : $(\alpha T)(x) := \alpha T(x)$, $\forall x \in X$

零元 O : $O(x) := 0$, $\forall x \in X$

と定義すると. $T+S$, αT, O はすべて有界線形作用素で $\|O\|=0$ となる.

よって, $B(X,Y)$ はベクトル空間となる.

(0.13) 命題 (有界線形作用素の作るBanach空間) X はノルム空間, Y はBanach空間とする. このとき, $B(X,Y)$ は作用素ノルムに関してBanach空間となる.

(証明) $B(X,Y)$ がノルム空間となること:

(N1) $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| \geq 0$. $T=O$ ならば $\|T\|=\|O\|=0$. 逆に, $\|T\|=0$ とすると,
$\|T(x)\| \leq \|T\|\cdot\|x\|$ $(\forall x\in X)$. $\therefore \|T(x)\|=0$ $(\forall x\in X)$ $\therefore T(x)=0$ $(\forall x\in X)$.
$\therefore T=O$.

(N2) $\|\alpha T\| = \sup_{\|x\|=1}\|(\alpha T)(x)\| = \sup_{\|x\|=1}\|\alpha T(x)\| = |\alpha|\cdot\sup_{\|x\|=1}\|T(x)\| = |\alpha|\cdot\|T\|$.

(N3) $\|T+S\| = \sup_{\|x\|=1}\|(T+S)(x)\| \leq \sup_{\|x\|=1}\{\|T(x)\|+\|S(x)\|\}$

$$\leq \sup_{\|x\|=1}\|T(x)\| + \sup_{\|x\|=1}\|S(x)\| = \|T\|+\|S\|.$$

$B(X,Y)$ が完備であること: $\{T_n\}$ を $B(X,Y)$ のCauchy列とする.

$\forall \varepsilon>0$ を固定: $\exists n_0\in\mathbb{N}$; $m,n \geq n_0$ のとき $\|T_m - T_n\| < \varepsilon$ . . . . . (*)

$\forall x\in X$ を固定. (*) より, $m,n\geq n_0$ のとき

$$\|T_m(x)-T_n(x)\| \leq \|T_m - T_n\|\cdot\|x\| < \varepsilon\|x\|, \quad \cdots\cdots (**)$$

よって, $\{T_n(x)\}$ は Y のCauchy列となる. Y は完備なので $\{T_n(x)\}$ の極限が存在

ある. これを $T(x)$ と成く: $T(x)=\lim_{n\to\infty} T_n(x)$.

<u>Tの線形性:</u> $x, y\in X$, α, β はスカラーとすると. Tの定義より

$$T(\alpha x+\beta y)=\lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x+\beta y)=\alpha\lim_{n\to\infty} T_n(x)+\beta\cdot\lim_{n\to\infty} T_n(y)$$
$$=\alpha T(x)+\beta T(y).$$

<u>Tの有界性:</u> (＊)で $m\to\infty$ とすると. $n\geq n_0$ のとき

$$\|T(x)-T_n(x)\|\leq\|x\|\cdot\varepsilon \qquad (＊＊＊)$$

上式は $\forall x\in X$ で成立つので $T-T_{n_0}$ は有界. よって $T=(T-T_{n_0})+T_{n_0}$ は有界.

<u>$\|T-T_n\|\to 0$ であること:</u> (＊＊＊)より. $n\geq n_0$ のとき.

$$\|T-T_n\|=\sup_{\|x\|=1}\|T(x)-T_n(x)\|\leq\varepsilon.$$

よって $\|T-T_n\|\to 0$ となる.

以上より. $B(X, Y)$ は完備となる. □

§0 Banach空間論からの準備 (Part II)

この§では、ノルム空間上には十分多くの有界線形汎関数が存在することを保証するHahn-Banachの定理を証明する。その為に、Zornの補題を公理として仮定する。

(0.14) 定義 (半順序集合, 全順序, 鎖, 上界, 上限, 極大).

Xは空でない集合とする。Xの要素の間に、次の3つの条件を満たす2項関係$\leq$が定義されているとする：

(P1) $x \leq x$ (反射法則)

(P2) $x \leq y$ かつ $y \leq x$ ならば $x = y$ (反対称法則)

(P3) $x \leq y$ かつ $y \leq z$ ならば $x \leq z$ (推移法則)

このとき、$\leq$のことを半順序関係 (partial ordering) といい、$(X, \leq)$のことを半順序集合 (partially ordered set) という。

以下では$(X, \leq)$は半順序集合とする。

(i) $(X, \leq)$が全順序集合 (totally ordered set) $\overset{\text{def}}{\iff}$ Xの任意の2つの要素x, yが比較可能, i.e., $x \leq y$ または $y \leq x$ が成り立つ.

(ii) Cが鎖 (chain) $\overset{\text{def}}{\iff}$ $(C, \leq)$が全順序集合, i.e.,

$C \subset X$で$C \neq \phi$とする.

の任意の2つの要素 x, y が比較可能.

(iii) $A \subset X$ で $A \neq \phi$ とする. A が上に有界 (upper bounded)

$\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists x_0 \in X$; $a \leq x_0$ for $\forall a \in A$.

このとき, x_0 のことを A の上界 (upper bound) あるいは, A は上界 x_0 を持つという.

(iv) $A \subset X$ で $A \neq \phi$ とする. A の上界全体から成る集合に最小要素 x_0 が存在するとき, x_0 を A の上限 (supremum) という.

$x_0 \in X$ が A の上限 $\Longleftrightarrow$ (i) $a \leq x_0$ for $\forall a \in A$

(ii) $a \leq x$ for $\forall a \in A$ ならば $x_0 \leq x$.

(v) $x_0 \in X$ が極大 (maximal) $\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $x_0 < w$ となる $w \in X$ は存在しない.

次の Zorn の補題は. 選出公理, 整列原理, Hausdorff の極大原理と同値であることが知られている:

(0.15) Zorn の補題. 任意の鎖が上に有界な半順序集合は極大要素を持つ.

選出公理 (Axiom of choice) F は集合 I 上の任意の写像で $F(x) \neq \phi$ for $\forall x \in I$ を満たすとする. このとき, $f(x) \in F(x)$ for $\forall x \in I$ となる I 上の

写像が存在する.

整列原理 (Well-ordering principle) 任意の集合は整列可能である, すなわち, 任意の集合 X は X に適当な順序 $\le$ を定義して $(X, \le)$ を全順序集合で, その空でない任意の部分集合が常に最小元をもつ (i.e. $(X, \le)$ を整列集合とする) ようにできる.

Hausdorff の極大原理 (Hausdorff's maximal principle)
任意の半順序集合は包含関係の意味で極大な鎖をもつ.

さて, 以下で Zorn の補題を利用して実ノルム空間に対して Hahn-Banach の定理を証明する. 実ノルム空間での結果を複素ノルム空間の場合に拡張するのは難しくないが省略する.

定理の定式化と証明のために基本的な用語と結果を復習しておく:

- X を実線形空間, M, N を X の線形部分空間とする.

$$M+N := \{x+y : x\in M,\ y\in N\}$$

とおくと, $M+N$ は X の線形部分空間となる. これを M と N によって張られた空間という.

- $x_0 \in X$ に対して

$$[x_0] := \{\alpha x_0 : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

とおくと、$[x_0]$ も X の線形部分空間となる。

- M は X の線形部分空間とする。記号を簡単にするために、M 上で定義された線形汎関数 $f: M \to \mathbb{R}$ に対して、

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in M, \|x\| \leq 1\}$$

とおく。$M = X$ で f が有界のとき、$\|f\|$ は f の作用素ノルムと一致する。

まず準備的な補題を与える。

<u>(0.16) 補題</u> X をノルム空間、M は X の線形部分空間で $x_0 \notin M$ とする。$M_0 := M + [x_0]$ とする。f を M 上で定義された有界線形汎関数とするとき、f は M_0 上の有界線形汎関数 f_0 に拡張され、$\|f\| = \|f_0\|$ とできる。

(証明) $f = 0$ ならば $f_0 = 0$ とすればよい。そこで $f \neq 0$ とする。

まず $\|f\| = 1$ の場合を考える：

(i) $y \in M_0$ は、$y = x + \alpha x_0$ ($\alpha \in \mathbb{R}, x \in M$) と一意に表わされる。

∵) $M_0 = M + [x_0]$ なので y が上のように表されることは明らか。よって一意性を示す。今、$y = x_1 + \alpha_1 x_0 = x_2 + \alpha_2 x_0$ ($\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, x_1, x_2 \in M$) とすると、$x_1 - x_2 = (\alpha_2 - \alpha_1)x_0$。$x_1, x_2 \in M$ なので $(\alpha_2 - \alpha_1)x_0 = x_1 - x_2 \in M$。

$\alpha_1 \neq \alpha_2$ とすると、$x_0 \in M$ となり矛盾！ ∴ $\alpha_1 = \alpha_2$。このとき $x_1 = x_2$ となる。

よって表し方は一意的である ~~//~~

ここで $r_0 \in \mathbb{R}$ を固定して,

$$f_0(y) := f(x) + \alpha r_0 \quad (y = x + \alpha x_0 \in M_0) \quad \cdots\cdots (1)$$

と定義する.

(ii) f_0 は M_0 上で線形.

$\because$) $y_1, y_2 \in M$ とすると $y_1 = x_1 + \alpha_1 x_0$, $y_2 = x_2 + \alpha_2 x_0$ $(\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, x_1, x_2 \in M)$

と一意的に表せる. このとき $f_0(y_1) = f(x_1) + \alpha_1 r_0$, $f_0(y_2) = f(x_2) + \alpha_2 r_0$.

ここで $y_1 + y_2 = (x_1 + x_2) + (\alpha_1 + \alpha_2) x_0$ なので

$$f_0(y_1 + y_2) = f(x_1 + x_2) + (\alpha_1 + \alpha_2) r_0 = \{f(x_1) + \alpha_1 r_0\} + \{f(x_2) + \alpha_2 r_0\}$$
$$= f(y_1) + f(y_2).$$

$\beta \in \mathbb{R}$, $y \in M_0$ に対して $f_0(\beta y) = \beta f_0(y)$ となることも同様に示せる #

よって以下では $\|f_0\| = 1$ となるように r_0 の値を定める:

$$\|f_0\| = 1 \iff |f_0(x + \alpha x_0)| = |f(x) + \alpha r_0| \leq \|x + \alpha x_0\| \quad (\forall x \in M, \forall \alpha \in \mathbb{R})$$
$$\iff |f(x) + \alpha r_0| \leq \|x + \alpha x_0\| \quad (\forall x \in M, \forall \alpha \neq 0) \quad (\because) \|f\| \leq 1)$$
$$\iff -f(x) - \|x + \alpha x_0\| \leq \alpha r_0 \leq -f(x) + \|x + \alpha x_0\| \quad (\forall x \in M, \forall \alpha \neq 0)$$
$$\iff -f\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \left\|\frac{x}{\alpha} + x_0\right\| \leq r_0 \leq -f\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \left\|\frac{x}{\alpha} + x_0\right\| \quad (\forall x \in M, \forall \alpha \neq 0) \quad \cdots\cdots (*)$$

($\because$) α の正, 負にかかわらず O.K)

よって, $\|f_0\| = 1$ とするには, $r_0 \in \mathbb{R}$ を $(*)$ を満たすように選べばよい.

よって. f は M 上で有界線形で $\|f\|=1$ なので. $\forall u, \forall v \in M$ に対して

$$|f(u)-f(v)|=|f(u-v)|\leq\|u-v\|$$

$$=\|(u+x_0)-(v+x_0)\|\leq\|u+x_0\|+\|v+x_0\|$$

$$\therefore -f(u)-\|u+x_0\|\leq -f(v)+\|v+x_0\|$$

$$\therefore \sup_{u\in M}\{-f(u)-\|u+x_0\|\}\leq\inf_{v\in M}\{-f(v)+\|v+x_0\|\}$$

そこで $\sup_{u\in M}\{-f(u)-\|u+x_0\|\}\leq r_0\leq\inf_{v\in M}\{-f(v)+\|v+x_0\|\}$ を満たす $r_0\in\mathbb{R}$ を選べば、この r_0 に対して

$$-f(u)-\|u+x_0\|\leq r_0\leq -f(v)+\|v+x_0\| \quad (\forall u, \forall v\in M)$$

となるので (*) が成立. よって. この r_0 に対して. f_0 は求める有界線形汎関数となる.

最後に. $\|f\|\neq 1$ のときは. $g=f/\|f\|$ とおくと. $\|g\|=1$ となるので g の拡張 g_0 が上の方法で得られる. よって. $f_0=\|f\|\cdot g_0$ とおけばよい. □

<u>(0.17) Hahn-Banachの定理</u> X はノルム空間, M は X の線形部分空間、f を M 上で定義された有界線形汎関数とする. このとき. f は X 上の有界線形汎関数 f_0 に拡張され, しかも. $\|f\|=\|f_0\|$ とできる.

(証明) $M=X$ のときは何も証明すべきことはない. よって. $M\subsetneqq X$ とする.

$\mathcal{F} := \left\{ g : \begin{array}{l} g \text{ は } M \text{ を含む線形部分空間 } E \text{ 上への } f \text{ の拡張で} \\ g \text{ は } E \text{ 上で有界線形で } \|g\| = \|f\|. \end{array} \right\}$

とおくと. 補題0.16より. $\mathcal{F} \neq \phi$ である.

$g_1, g_2 \in \mathcal{F}$ に対して. その定義域をそれぞれ E_1, E_2 とすると.

$$g_1 \leq g_2 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} E_1 \subset E_2 \text{ かつ } g_1(x) = g_2(x) \quad (\forall x \in E_1)$$

によって $\mathcal{F}$ に大小関係を導入すると. $(\mathcal{F}, \leq)$ は半順序集合となる.

$\mathcal{C} := \{g_\mu : \mu \in L\}$ を $\mathcal{F}$ の chain とする.

- $\mathcal{C}$ は上に有界

$\because)$ 各 g_μ の定義域を E_μ とし, $E_0 := \bigcup_{\mu \in L} E_\mu$ と置く.

$x \in E_0$ のとき $\exists \mu \in L ; x_0 \in E_\mu$ なので $g_0(x) := g_\mu(x)$ により. 写像

$g_0 : E_0 \to \mathbb{R}$ を定義する:

(i) この定義は well-defined, i.e., $x \in E_0$ が属する E_μ の選び方によらない.

$\because)$ $x \in E_0$ が E_μ 及び E_ν に属しているとする. $\mathcal{C} = \{g_\mu : \mu \in L\}$ は chain

なので. $g_\mu \leq g_\nu$ 又は $g_\nu \leq g_\mu$ となる.

$g_\mu \leq g_\nu$ のときは $E_\mu \subset E_\nu$ $\therefore x \in E_\mu$ で $g_\mu(x) = g_\nu(x)$

$g_\nu \leq g_\mu$ のときは $E_\nu \subset E_\mu$ $\therefore x \in E_\nu$ で $g_\nu(x) = g_\mu(x)$.

いずれにしても $g_\mu(x) = g_\nu(x)$ なので $g_0(x)$ の値は x が属する E_μ の選び方に

よらない. よって well-defined. ＃

(ii) $g_0 \in \mathcal{F}$ で $g_\mu \le g_0$ for $\forall \mu \in L$.

∵) $g_0 \in \mathcal{F}$ であること: 各 $E_\mu \supset M$ なので $E_0 \supset M$. よって g_0 は f の拡張.

• g_0 の線形性: $x, y \in E_0$ とすると. $\exists \mu, \exists \nu \in L$; $x \in E_\mu$, $y \in E_\nu$

ここで $\mathcal{C} = \{g_\mu : \mu \in L\}$ は chain なので $g_\mu \le g_\nu$ または $g_\nu \le g_\mu$.

$g_\mu \le g_\nu$ のとき. $E_\mu \subset E_\nu$ ∴ $x, y \in E_\nu$ で $g_0(x) = g_\nu(x)$, $g_0(y) = g_\nu(y)$

ここで $x+y \in E_\nu$ となるので

$$g_0(x+y) = g_\nu(x+y) = g_\nu(x) + g_\nu(y) = g_0(x) + g_0(y).$$

$g_\nu \le g_\mu$ のときも同様にして示せる.

また. $\beta \in \mathbb{R}$, $x \in E_0$ に対して. $g_0(\beta x) = \beta g_0(x)$ も同様に示せる.

ゆえに. g_0 は E_0 上で線形.

• $\|g_0\| = \|f\|$.

∵) g_0 は f の拡張なので $\|g_0\| \ge \|f\|$ は明らか. よって. $\|g_0\| \le \|f\|$ を示す.

$x \in E_0$ とすると. $\exists \mu \in L$; $x \in E_\mu$

$$\therefore |g_0(x)| = |g_\mu(x)| \le \|g_\mu\| \cdot \|x\| = \|f\| \cdot \|x\|.$$

$\therefore \|g_0\| \le \|f\|$ #

以上より. $g_0 \in \mathcal{F}$ となる.

$g_\mu \le g_0$ for $\forall \mu \in L$ となることは g_0 の定義より明らか #

以上より. $\mathcal{C}$ は上に有界である #

以上まとめると，$(\mathcal{F}, \leqq)$の任意のchainが上に有界となるので，Zornの補題により，

$\mathcal{F}$は極大要素$f_0 \in \mathcal{F}$をもつ．このとき，f_0の定義域はXとなる

$\because)$ f_0の定義域をM_0とし，$M_0 \subsetneqq X$とすると，$\exists x_0 \notin M_0$．すると，補題0.16

により，f_0の$M_0 + [x_0]$上への拡張g_0が存在する．このとき，$g_0 \in \mathcal{F}$で$g_0 \geqq f_0$か

$g_0 \neq f_0$となるので，f_0が$\mathcal{F}$の極大要素であることに反する．$\#$

よって，このf_0が求めるfの拡張となる □

Hahn-Banachの定理は，次のような形式で利用されることも多い

<u>(0.18) 系</u>（Hahn-Banachの定理の変形 I）Xをノルム空間，$x_0 \neq 0$とする．

このとき，$\exists f_0 : X$上の有界線形汎関数；$f_0(x_0) = \|x_0\|$，$\|f_0\| = 1$．

（証明）$M = [x_0]$はXの線形部分空間，各$x \in M$は$x = \alpha x_0$（$\alpha \in \mathbb{R}$）と

一意的に表される．

$\because)$ $x = \alpha_1 x_0 = \alpha_2 x_0$（$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$）と2通りに表されたとすると，$(\alpha_1 - \alpha_2)x_0 = 0$．

$x_0 \neq 0$なので$\alpha_1 = \alpha_2$．よって，一意的 $\#$

ここで$f(x) := \alpha\|x_0\|$と定義すると，fはM上の有界線形汎関数で$f(x_0) = \|x_0\|$，

$\|f\| = 1$を満たす（各自で確かめる）．よって，Hahn-Banachの定理より，fは，X上

の有界線形汎関数f_0に拡張され，このf_0が求めるものとなっている（ことを

容易に示せる）□

(0.14) 系（Hahn-Banachの定理の変形II）．Xをノルム空間，MをXの線形部分空間とする．$x_0 \notin \overline{M}$とする．このとき，

$\exists f_0$：X上の有界線形汎関数；$f_0(M)=\{0\}$，$f_0(x_0)=1$，$\|f_0\|=1/d$

ただし，$d:=d(x_0, M):=\inf\{\|x_0-y\| : y\in M\}$．

（証明）$x_0 \notin \overline{M}$なので$d>0$．$M_1 := M+[x_0]$とおくと，M_1はXの線形部分空間で，各$x\in M_1$は，$x=m+\alpha x_0$ $(m\in M, \alpha\in\mathbb{R})$の形に一意的に表せる．

そこで，$f_1(x):=\alpha$と置くと，f_1はM_1上の線形汎関数で$f_1(M)=\{0\}$，$f_1(x_0)=1$を満たす（各自で確かめよ）．

- f_1はM_1上で有界で$\|f_1\|=1/d$

$\because$）$x\in M_1$で$x=m+\alpha x_0$ $(m\in M, \alpha\in\mathbb{R})$と表されているとする．このとき，

f_1の定義より，$|f_1(m+\alpha x_0)|=|\alpha|$ ⋯ ①

一方，$\alpha\neq 0$のとき，dの定義より，

$$\|m+\alpha x_0\| = |\alpha|\,\|x_0-(-\tfrac{1}{\alpha}m)\| \geq |\alpha|\cdot d \quad \cdots ②$$

$-\frac{1}{\alpha}m\in M$なので．

①，②より，$\alpha\neq 0$のとき，

$$|f_1(m+\alpha x_0)| \leq \frac{1}{d}\|m+\alpha x_0\|$$

上式は$\alpha=0$の場合も成り立つので，$\forall x\in M_1$に対して

$$|f_1(x)| \leq \frac{1}{d}\|x\|$$

よって. f_1 は M_1 上で有界で $\|f_1\| \leq 1/d$ となる.

次に $\|f_1\| \geq 1/d$ を示す: $\forall \varepsilon > 0$ を固定. d の定義より

$\exists m \in M$; $\|x_0 - m\| \leq d + \varepsilon$. ここで $u_0 := \frac{1}{d+\varepsilon}(x_0 - m) \in M_1$ とおくと. $\|u_0\| \leq 1$ で.

f_1 の定義より. $f_1(u_0) = \frac{1}{d+\varepsilon}$. よって.

$$\|f_1\| := \sup\{|f_1(u)| : u \in M_1, \|u\| \leq 1\} \geq f_1(u_0) = \frac{1}{d+\varepsilon}$$

ここで $\varepsilon > 0$ は任意なので $\varepsilon \to 0$ とすると. $\|f_1\| \geq \frac{1}{d}$ //

以上より. f_1 は X の線形部分空間 M_1 上の有界線形汎関数で $f_1(M) = \{0\}$,

$f_1(x_0) = 1$, $\|f_1\| = 1/d$ を満たすので. 再び Hahn-Banach の定理より. f_1 の X 全体

への拡張 f_0 が存在する. この f_0 が $f_0(M) = \{0\}$, $f_0(x_0) = 1$, $\|f_0\| = 1/d$ を満たす

ことは容易に示せる □

§0 Banach空間論からの準備 (Part III)

この§では、ノルム空間上にノルム位相(=強位相)よりも弱い位相を導入し、その性質をまとめる。この§の結果の証明については例えば[4]を見よ。

- 有限次元ノルム空間 $\Leftrightarrow$ 任意の有界点列はノルム収束する部分列をもつ
- 無限次元ノルム空間：有界点列は必ずしもノルム収束する部分列をもつとは限らない

$\Downarrow$

無限次元ノルム空間を取り扱う場合、ノルム位相は強すぎる

$\Downarrow$

弱位相，弱*位相

(0.20) 定義 (強双対空間) X はノルム空間とする。

$X^* :=$ X 上の有界線形汎関数全体から成るベクトル空間

とすると、$X^* \neq \{0\}$ (Hahn-Banachの定理)。この X^* のことを X の双対空間という。

各 $x^* \in X^*$ に対して、

$$\|x^*\| := \sup_{\|x\| \leq 1} |x^* x|$$

は X^* 上のノルムであり、$(X^*, \|\cdot\|)$ は Banach空間となる。このBanach空間 X^* のことを、X の強双対空間という。

(0.21) 定義 (弱位相) X はノルム空間, X^* を X の双対空間とする.

$x_0 \in X$ の基本近傍系として

$$W(x_0; x_1^*, \cdots, x_n^*; \varepsilon) := \{x \in X : |x_k^* x - x_k^* x_0| < \varepsilon \ (k=1,2,\cdots,n)\}$$

(ただし. $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, $x_1^*, \cdots, x_n^* \in X^*$)

の形をした集合の全体を考える (実際, この形の集合全体は基本近傍系の条件を満たすことが示せる). これによって導入される X の位相を弱位相 (weak topology) といい, $\sigma(X, X^*)$ で表す.

以下で弱位相のもつ基本的な性質をまとめておく.

(0.22) 命題 (弱位相の性質) X はノルム空間, X^* を X の双対空間とする.

(1) 弱位相 $\sigma(X, X^*)$ は. ベクトル位相 (すなわち, 加法とスカラー倍が連続) であり, Hausdorff である.

(2) (弱位相の net による定義) $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subset X$ は net, $x_0 \in X$ とする.

x_α が x_0 に弱収束する (すなわち, $\sigma(X, X^*)$ に関して収束する)

$\Longleftrightarrow$ $\forall x^* \in X^*$ に対して $x^* x_\alpha \to x^* x_0$.

弱位相は Hausdorff なので, 弱収束の極限は一意である.

(3)（弱位相の射影位相的定義）X上の弱位相$\sigma(X, X^*)$は，X^*の要素をすべて連続にする最弱の位相

(4)（弱位相の距離付け不可能性）弱位相$\sigma(X, X^*)$が距離付け可能．
$\Leftrightarrow$ Xは有限次元

それゆえ，無限次元ノルム空間Xの弱位相$\sigma(X, X^*)$はX上のノルム位相よりも真に弱い．

(5)（弱位相の非完備性）弱位相$\sigma(X, X^*)$が完備 $\Leftrightarrow$ Xは有限次元

(6)（凸集合の弱閉包）$K \subset X$は凸集合とする．このとき
Kのノルムに関する閉包 $=$ Kの弱位相$\sigma(X, X^*)$に関する閉包
それゆえ，Kがノルムに関して閉集合 $\Leftrightarrow$ Kは弱位相に関して閉集合．

(7) X, Yはノルム空間で，$T: X \to Y$は線形作用素とする．このとき，次の3つの条件は同値：

(i) TはXのノルム位相，Yのノルム位相に関して連続
(ii) TはXのノルム位相，Yの弱位相に関して連続
(iii) TはXの弱位相，Yの弱位相に関して連続

それゆえ，X上の線形汎関数fに対して，
$f \in X^*$, i.e., fはノルム位相に関して連続 $\Leftrightarrow$ fは弱位相に関して連続

(0.23) 定義 (弱*位相の定義) X はノルム空間, X^* を X の双対空間とする.

$x_0^* \in X^*$ の基本近傍系として

$$W(x_0^*; x_1, \cdots, x_n; \varepsilon) := \{x^* \in X^* : |x^* x_k - x_0^* x_k| < \varepsilon \ (k=1,2,\cdots,n)\}$$

(ただし, $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$)

の形をした集合の全体を考える (実際, この形の集合全体は基本近傍系の条件を満たすことが示せる). これによって導入される X^* の位相を弱*位相 (weak* topology) といい, $\sigma(X^*, X)$ で表す.

以下で弱*位相のもつ基本的な性質をまとめておく:

(0.24) 命題 (弱*位相の性質) X はノルム空間, X^* を X の双対空間, X^{**} を X の第2双対空間 (bidual), すなわち, 強双対空間 X^* の双対空間とする

(1) 弱*位相 $\sigma(X^*, X)$ はベクトル位相 (すなわち, 加法とスカラー倍は連続) であり, Hausdorff である.

(2) (弱*位相の網による定義) $\{x_\alpha^*\}_{\alpha \in P} \subset X^*$, $x_0^* \in X^*$ とする.

x_α^* が x_0^* に弱*収束する (すなわち, $\sigma(X^*, X)$ に関して収束する)

$\Leftrightarrow$ $\forall x \in X$ に対して, $x_\alpha^* x \to x_0^* x$

弱*位相は Hausdorff なので, 弱*収束の極限は一意である.

(3)（弱*位相の射影位相的定義） 各 $x \in X$ に対し $F_x(x^*) := x^*x$ ($x^* \in X^*$) によって X^* 上の（ノルムに関し連続な）線形汎関数 F_x を定義する。このとき、X^* 上の弱*位相 $\sigma(X^*, X)$ は すべての $x \in X$ に対し F_x を連続にする最弱の位相。

(4) $\sigma(X^*, X) < \sigma(X^*, X^{**}) <$ X^* 上のノルム位相

X が回帰的, i.e., $X = X^{**}$ の場合に限り一致

X が有限次元の場合に限り一致

(5)（弱*位相の距離付け不可能性） 弱*位相 $\sigma(X^*, X)$ が距離付け可能 $\Leftrightarrow$ X は有限次元。

(6)（弱*位相の非完備性） 弱*位相 $\sigma(X^*, X)$ が完備 $\Leftrightarrow$ X は有限次元。

(7)（X^* 上の $\sigma(X^*, X)$ 連続線形汎関数） (3) より、各 $x \in X$ に対し X^* 上の線形汎関数 F_x は $\sigma(X^*, X)$ 連続。逆に、X^* 上の $\sigma(X^*, X)$ 連続な線形汎関数 F は、適当な $x \in X$ が存在し $F = F_x$ で与えられる。

(8) Goldstine's Theorem: X の閉単位球 $B_X := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ は、X^{**} の閉単位球 $B_{X^{**}} := \{x^{**} \in X^{**} : \|x^{**}\| \leq 1\}$ の中で弱*位相 $\sigma(X^{**}, X^*)$ に関し稠密である。それゆえ、X は X^{**} の中で弱*位相 $\sigma(X^{**}, X^*)$ に関し稠密。

(9) Alaoglu's Theorem: X^* の閉単位球 $B_{X^*} := \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq 1\}$ は弱*位相 $\sigma(X^*, X)$ に関し compact. それゆえ、X^* の弱*位相に関し閉な有界集合は

弱*位相に関して compact

§1 ベクトル測度の定義と基本的性質

この§ではベクトル測度の定義から始めて、その全変動、半変動などの用語とそれらの基本的性質を準備する。

(1.1) 記号 この§を通じて

$(\Omega, \mathcal{A})$: 可測空間, i.e. Ω は空でない集合, $\mathcal{A}$ は Ω の部分集合から成る

σ-集合体 (次の3つの条件を満たす集合族

(σ1) $\phi \in \mathcal{A}$

(σ2) $E \in \mathcal{A}$ ならば $E^c \in \mathcal{A}$

(σ3) $E_n \in \mathcal{A}$ $(n=1,2,\cdots)$ ならば $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$)

X : 実Banach空間, X^* : X の双対空間

(1.2) 定義 (ベクトル測度) ベクトル値集合関数 $\mu : \mathcal{A} \to X$ に対して

(i) μ が 有限加法的 (finitely additive)

定. 互いに素 $E, F \in \mathcal{A}$ に対して $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$

(ii) μ が 可算加法的 (countably additive)

定. 互いに素な $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ に対して

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \qquad (X \text{ のノルム位相に関して})$$

以下では、可算加法的なベクトル値集合関数のことを単にベクトル測度

(vector measure) という.

(1.3) 命題 $\mu : \mathcal{A} \to X$ はベクトル値集合関数とする.

(1) μ が有限加法的ならば $\mu(\phi) = 0$

(2) μ が可算加法的ならば $\mu(\phi) = 0$ で μ は有限加法的

(証明) (1) $\phi \cup \phi = \phi$ なので $\mu(\phi) = \mu(\phi \cup \phi) = \mu(\phi) + \mu(\phi)$

$\therefore \mu(\phi) = 0$

(2) $E_n = \phi \ (n \geqq 1)$ とおくと. $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ は互いに素で $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \phi$. よって. μ の

可算加法性により $\left\| \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) - \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k) \right\| \to 0 \quad (as\ n \to \infty)$

$$\therefore \left\| \mu(\phi) - \sum_{k=1}^{n} \mu(\phi) \right\| = (n-1)\|\mu(\phi)\| \to 0$$

上式より. $\|\mu(\phi)\| = 0 \quad \therefore \mu(\phi) = 0$

次に. $E, F \in \mathcal{A}$ で $E \cap F = \phi$ とする. $E_1 = E, E_2 = F, E_n = \phi \ (n \geqq 3)$ と

おくと. $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E \cup F$

$$\therefore \mu(E \cup F) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

$$= \mu(E) + \mu(F) + \mu(\phi) + \mu(\phi) + \cdots$$

$$= \mu(E) + \mu(F) \quad \square$$

(1.4) 命題 (ベクトル測度の基本的性質) $\mu : \mathcal{A} \to X$ はベクトル測度とする.

(1) μ は強加法的 (strongly additive): 互いに素な $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ に

対して. $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$ が X のノルムで収束する.

(2) μ は強有界 (strongly bounded): 互いに素な $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)=0$$

(3) 単調列的連続性: 任意の単調増加(減少)列 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\quad\left(\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)=\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\right)\right).$$

(証明) (1)は定義より明らか. (2)は次の級数の性質より明らか.

"$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ が収束する $\Rightarrow x_n\to 0$"

$\because)$ $y_n=\sum_{k=1}^{n}x_k$ と置くと. $\{y_n\}$ は Cauchy 列. よって. $\forall \varepsilon>0, \exists n_0;$

$l, m \geq n_0$ ならば $\|y_l-y_m\|<\varepsilon$. ここで $l=n$, $m=n-1\ (\geq n_0)$ とすると.

$$\|y_l-y_m\|=\|y_n-y_{n-1}\|=\|x_n\|<\varepsilon \qquad \therefore x_n\to 0 \quad ※$$

(3) 単調増加の場合: $E_1\subset E_2\subset\cdots\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=E$ とする.

$F_1=E_1, F_2=E_2-E_1, \cdots, F_n=E_n-E_{n-1}, \cdots$ と置くと $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ は互いに素で

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=E$$

$$\begin{aligned}
\therefore \mu(E)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)&=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(F_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mu(F_k)\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[\mu(E_1)+\mu(E_2-E_1)+\cdots+\mu(E_n-E_{n-1})\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)
\end{aligned}$$

単調減少の場合：補集合を考えれば良い □

<u>(1.5) 命題</u> (ベクトル測度となるための条件) $\mu : \mathcal{A} \to X$ は有限加法的とする

μ が可算加法的 $\Leftrightarrow$ 任意の単調減少列 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ with $E_n \downarrow \phi$ に

対して $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$

(証明) ($\Rightarrow$) は命題1.4 (3) より明らか.

($\Leftarrow$) $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ は互いに素とする. $F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n - \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ $(n \geqq 1)$ とおくと,

$F_n \downarrow \phi$ であり, $\mu(F_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) - \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k)$ となる. 仮定より, $\mu(F_n) \to 0$

なので $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ が成り立つ. ゆえに μ は可算加法的となる □

<u>(1.6) 定義</u> (全変動) $\mu : \mathcal{A} \to X$ をベクトル測度, $E \in \mathcal{A}$ とする.

$$|\mu|(E) \equiv \sup\left\{ \sum_{k=1}^{n} \|\mu(E_k)\| : \{E_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathcal{A} \text{ は } E \text{ の有限可測分割} \right\}$$

と定義して 集合関数 $|\mu| : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ のことを<u>全変動</u> (variation) という.

$|\mu|(\Omega) < \infty$ のとき. μ は<u>有界変動</u> (of bounded variation) という.

実測度の場合と同様にして次の性質が示せる

<u>(1.7) 命題</u>. ベクトル測度 $\mu : \mathcal{A} \to X$ の全変動 $|\mu|$ は $\mathcal{A}$ 上の可算加法的な

非負値集合関数 ($+\infty$ の値を取り得る) となる.

実測度の場合にはその全変動は必らず有限な値をとる（例えば [6] の p.97 と p.128 を見よ）．しかしベクトル測度の全変動は必らずしも有限な値をとるとは限らない．

(1.8) 例（有界変動でないベクトル測度）$\Omega=[0,1]$，$\mathcal{A}=[0,1]$ の Lebesgue 可測集合全体，λ を $[0,1]$ 上の Lebesgue 測度とする．ベクトル測度 $\mu:\mathcal{A}\to L_\infty[0,1]$ を

$$\mu(E)\equiv \chi_E,\quad E\in\mathcal{A}$$

で定義する．

$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ かつ $\lambda(E_n)>0$ となる互いに素な集合列 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{A}$ と $E\in\mathcal{A}$ を選ぶ（← これは実際に可能である．例えば

$E=[0,1)$，$E_1=[0,\frac{1}{2})$，$E_2=[\frac{1}{2},\frac{2}{3})$，…，$E_n=[\frac{n-1}{n},\frac{n}{n+1})$，…

とすればよい）．このとき E の有限可測分割として $\{E_1,E_2,\cdots,E_{n-1},\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k\}$ を考えると

$$|\mu|(E)\geq\sum_{k=1}^{n-1}\|\mu(E_k)\|_\infty+\|\mu(\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k)\|_\infty$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\underbrace{\|\chi_{E_k}\|_\infty}_{=1}+\underbrace{\|\chi_{\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k}\|_\infty}_{=1}=(n-1)+1=n$$

上式で $n\to\infty$ とすると，$|\mu|(E)=\infty$ □

実測度の理論，特に実測度による積分論では，全変動が常に有限であることが有効に活用され理論展開されている．それゆえベクトル測度による積分論を展開するには，対象とするベクトル測度を有界変動なものに限定するか（Dinculeanu 流の

積分論）あるいは常に有限な値をとる何か他の基準量を新たに導入する必要がある。
それが次に紹介する"半変動"である。これを用いて§5ではベクトル測度による
Bartle-Dunford-Schwartz 流の積分論が展開される。

<u>(1.9) 定義</u>（半変動） $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow X$ をベクトル測度とする。

$$\|\mu\|(E) \equiv \sup_{\|x^*\|\leq 1} |x^*\mu|(E), \quad E \in \mathcal{A}$$

と定義して $\|\mu\|(\cdot)$ のことを μ の<u>半変動</u>（semivariation）という。

<u>(1.10) 命題</u>（半変動の性質） $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow X$ はベクトル測度とする。

(1) $\|\mu(E)\| \leq \|\mu\|(E) \leq |\mu|(E), \quad E \in \mathcal{A}$

(2) $\|\mu\|(E) = \sup \left\{ \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(E_k) \right\| : \{E_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathcal{A}\text{ は }E\text{ の有限可測分割}, |\alpha_k| \leq 1 \ (k=1,2,\cdots,n) \right\}$

(3) 半変動 $\|\mu\|(\cdot)$ は $\mathcal{A}$ 上で

単調増加：$E \subset F$ ならば $\|\mu\|(E) \leq \|\mu\|(F)$.

可算劣加法的：$\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ に対して $\|\mu\|\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\mu\|(E_n)$

(証明) (1) $\longrightarrow$ $\|\mu\|(E) = \sup_{\|x^*\|\leq 1} \sup_{\{E_k\}} \sum_{k=1}^{n} |x^*\mu(E_k)| \leq \sup_{\{E_k\}} \sum_{k=1}^{n} \|\mu(E_k)\| = |\mu|(E)$)

(2)：$\Pi = \{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$ を E の有限可測分割, $|\alpha_k| \leq 1$ $(k=1,2,\cdots,n)$ とする。

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(E_k) \right\| = \sup_{\|x^*\|\leq 1} \left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x^*\mu(E_k) \right| \qquad \left(\leftarrow \|x\| = \sup_{\|x^*\|\leq 1} |x^* x|\right)$$

$$\|\mu(E)\| = \sup_{\|x^*\|\leq 1} |x^*\mu(E)| \leq \sup_{\|x^*\|\leq 1} |x^*\mu|(E) =$$

$$\leqq \sup_{\|x^*\|\leq 1} \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k||x^*\mu(E_k)| \quad |\alpha_k| \leq 1 \ (k=1,2,\cdots,n)$$

$$\leqq \sup_{\|x^*\|\leq 1} \sum_{k=1}^{n} |x^*\mu(E_k)| \leqq \sup_{\|x^*\|\leq 1} |x^*\mu|(E) = \|\mu\|(E)$$

$$\sum_{k=1}^{n} |x^*\mu(E_k)| \leq \sum_{k=1}^{n} |x^*\mu|(E_k) = |x^*\mu|(E)$$

よって．(右辺) $\leqq \|\mu\|(E)$ が示された．　#

逆向きの不等号を示す：$\pi = \{E_1, \cdots, E_n\}$ は E の有限可測分割で，$x^* \in X^*$ with $\|x^*\| \leq 1$ とする．

$$\sum_{k=1}^{n} |x^*\mu(E_k)| = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{sgn}(x^*\mu(E_k)) \cdot x^*\mu(E_k) \quad \alpha_k \text{ とおく}$$

$$= x^*\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{sgn}(x^*\mu(E_k))\mu(E_k)\right)$$

$$\leqq \left\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(E_k)\right\| \quad \|x\| = \sup_{\|x^*\|\leq 1} |x^*x|$$

ここで $\alpha_k = \mathrm{sgn}(x^*\mu(E_k))$ $(k=1,2,\cdots n)$ は．$|\alpha_k| \leqq 1$ を満たすので．上より．

$\sum_{k=1}^{n} |x^*\mu(E_k)| \leq$ (右辺)．よって $|x^*\mu|(E) \leq$ (右辺)．ゆえに $\|\mu\|(E) \leq$ (右辺)

(3) 単調増加性は明らか．よって可算劣加法性を示す：

$\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ は互いに素と仮定してよい（何故なら．一般の $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ に対しては

通常の方法：$F_1 = E_1$, $F_2 = E_2 - E_1$, $F_3 = E_3 - E_1 \cup E_2$, $\cdots$, $F_n = E_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} E_k$, $\cdots$

と置けば $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ は互いに素で $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ となる．よって

$$\|\mu\|\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \|\mu\|\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\mu\|(F_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\mu\|(E_n)$$

互いに素の場合の可算劣加法性　　$\|\mu\|$ の単調増加性

となるからである）

(※) $\left\|\sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_k\mu(E_n\cap F_k)\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{m}\left(\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\alpha_k\mu(E_n\cap F_k)\right)\right\| = \left\|\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{N}\alpha_k\mu(E_n\cap F_k)\right\|$

$= \left\|\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\mu(E_n\cap F_k)\right)\right\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\mu(E_n\cap F_k)\right\|$ ※

次に. $\pi = \{F_1, F_2, \cdots, F_m\} \subset \mathfrak{A}$ を $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ の有限可測分割, $|\alpha_k| \leq 1$ $(k=1,2,\cdots,m)$

とすると. 各 $n \geq 1$ に対して $\{E_n\cap F_1, \cdots, E_n\cap F_m\}$ は E_n の有限可測分割となる. よって

$$\left\|\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\mu(F_k)\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\mu(E\cap F_k)\right\|$$

$$= \left\|\sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_k\mu(E_n\cap F_k)\right\|$$

$$= \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\mu(E_n\cap F_k)\right\| \quad (※)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left\|\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\mu(E_n\cap F_k)\right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\|\mu\|(E_n)$$

となる. よって (2) で示したことから. $\|\mu\|(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\|\mu\|(E_n)$ が得られる □

半変動のもつ次の性質は非常に役立つ.

(1.11) 命題 (ベクトル測度の値域の有界性と半変動の有限性) $\mu : \mathfrak{A} \to X$ は

ベクトル測度で. $E \in \mathfrak{A}$ とする. このとき

$$\sup_{F\subset E}\|\mu(F)\| \leq \|\mu\|(E) \leq 2\cdot\sup_{F\subset E}\|\mu(F)\| < \infty$$

それゆえ. ベクトル測度の値域 $R(\mu) = \{\mu(E) : E \in \mathfrak{A}\}$ は X の有界集合で. その

半変動は常に有限な値をとる.

(証明) 値域が有界であること. $\forall x^* \in X^*$ に対して.

$$|x^*\mu(E)| \leq |x^*\mu|(E) \leq |x^*\mu|(\Omega) < \infty \quad \text{for } \forall E \in \mathfrak{A}$$

ゆえに $R(\mu)$ は X の弱有界集合となる. よって一様有界性定理により. $R(\mu)$ は X の

有界部分集合となる．よって

$$\sup_{F\subset E}\|\mu(F)\| \leq \sup_{F\in\mathfrak{A}}\|\mu(F)\| < \infty$$

となる．

<u>不等式の証明</u>：左側の不等式は明らか．よって右側の不等式を示す：

$\pi=\{E_1,E_2,\cdots,E_n\}$ を E の有限可測分割，$\|x^*\|\leq 1$ とする．このとき

$$J^+=\{k : 1\leq k\leq n,\ x^*\mu(E_k)\geq 0\},\quad J^-=\{k : 1\leq k\leq n,\ x^*\mu(E_k)<0\}$$

とおくと，

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}|x^*\mu(E_k)| &= \sum_{k\in J^+}x^*\mu(E_k) - \sum_{k\in J^-}x^*\mu(E_k)\\
&= x^*\Big(\sum_{k\in J^+}\mu(E_k)\Big) - x^*\Big(\sum_{k\in J^-}\mu(E_k)\Big)\\
&\leq \Big|x^*\Big(\sum_{k\in J^+}\mu(E_k)\Big)\Big| + \Big|x^*\Big(\sum_{k\in J^-}\mu(E_k)\Big)\Big|\\
&= \Big|x^*\mu\Big(\bigcup_{k\in J^+}E_k\Big)\Big| + \Big|x^*\mu\Big(\bigcup_{k\in J^-}E_k\Big)\Big| \qquad \|x\|=\sup_{\|x^*\|\leq 1}|x^*x|\\
&\leq \Big\|\mu\Big(\bigcup_{k\in J^+}E_k\Big)\Big\| + \Big\|\mu\Big(\bigcup_{k\in J^-}E_k\Big)\Big\| \qquad \bigcup_{k\in J^+}E_k,\ \bigcup_{k\in J^-}E_k\subset E\\
&\leq \sup_{F\subset E}\|\mu(F)\| + \sup_{F\subset E}\|\mu(F)\|\\
&= 2\sup_{F\subset E}\|\mu(F)\| \qquad \square
\end{aligned}
$$

(1.12) 注意. 命題1.11ではベクトル測度の値域は有界集合となることが述べられているが実際にはさらに強く、弱相対コンパクト集合となることが示される. 定理5.9を見よ.

この節の最後で半変動とベクトル測度の列的連続性について示しておく

(半変動の列的連続性)

(1.13) 命題 $\mu : \mathcal{A} \to X$ はベクトル測度とする. $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ は $E \in \mathcal{A}$ に収束する, i.e., $\liminf_{n\to\infty} E_n \left(\equiv \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k\right) = \limsup_{n\to\infty} E_n \left(\equiv \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) = E$ と仮定する. このとき $\lim_{n\to\infty} \|\mu\|(E_n) = \|\mu\|(E)$.

(証明) 第1段:「$E_n \downarrow \phi$ ならば $\lim_{n\to\infty}\|\mu\|(E_n) = 0$」を示す.

$E_n \downarrow \phi$ とする. $\exists \varepsilon > 0$; $\|\mu\|(E_n) > \varepsilon$ $(n=1,2,\cdots)$ と仮定して矛盾を導く (実際, このとき $\forall \varepsilon>0$, $\exists n_0$; $\|\mu\|(E_{n_0}) \leq \varepsilon$ となるので, $\{E_n\}$ の単調減少性により $n \geq n_0$ のとき $\|\mu\|(E_n) \leq \varepsilon$ となり $\lim_{n\to\infty}\|\mu\|(E_n) = 0$ となる).

主張1 自然数からなる狭義単調増加列 $n_1 < n_2 < \cdots$ と集合列 $\{F_k\} \subset \mathcal{A}$ with $F_k \subset E_{n_k} - E_{n_{k+1}}$ が存在して

$$\|\mu(F_k)\| > \frac{\varepsilon}{4} \quad (k=1,2,\cdots) \qquad (*)$$

∵) $n_1 = 1$ とする.

$\|\mu\|(E_{n_1}) = \|\mu\|(E_1) > \varepsilon$ なので $\exists x^* \in X^* (\|x^*\| \leq 1)$; $|x^*\mu|(E_{n_1}) > \varepsilon$

一方, $E_n \downarrow \phi$ なので $|x^*\mu|(E_n) \downarrow 0$

$\therefore \exists n_2 > n_1 ; |x^*\mu|(E_{n_2}) < \frac{\varepsilon}{2}$

命題1.11より,

$$2 \sup_{F \subset E_{n_1}-E_{n_2}} \|\mu(F)\| \geq \|\mu\|(E_{n_1}-E_{n_2}) \geq |x^*\mu|(E_{n_1}-E_{n_2})$$
$$= |x^*\mu|(E_{n_1}) - |x^*\mu|(E_{n_2}) > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\therefore \sup_{F \subset E_{n_1}-E_{n_2}} \|\mu(F)\| > \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\therefore \exists F_1 \subset E_{n_1}-E_{n_2} ; \|\mu(F_1)\| > \frac{\varepsilon}{4}$$

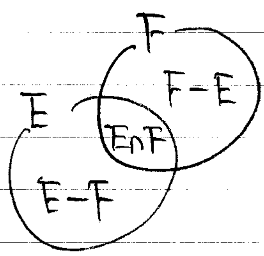
となる. 以上の操作を繰り返せばよい $\#$

(主張1)で構成された $\{F_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ は互いに素なので μ の可算加法性により,
$\sum_{k=1}^{\infty}\mu(F_k)$ は収束する. よって. $\mu(F_k) \to 0$. これは $(*)$ に反する. よって.(第1段)
の証明が完了した.

<u>第2段</u>: 一般の収束する $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ の場合

<u>主張2.</u>: $E, F \in \mathcal{A}$ に対して

$$\big| \|\mu\|(E) - \|\mu\|(F) \big| \leq \|\mu\|(E-F) + \|\mu\|(F-E)$$



$\because)$ $\|\mu\|(E) = \|\mu\|\big((E-F) \cup (E \cap F)\big)$

$$\leq \|\mu\|(E-F) + \|\mu\|(E \cap F)$$

$$\leq \|\mu\|(E-F) + \|\mu\|(F)$$

$\therefore \|\mu\|(E) - \|\mu\|(F) \leq \|\mu\|(E-F) \quad \cdots ①$

一方，$\|\mu\|(F) = \|\mu\|((F-E) \cup (E \cap F))$

$$\leq \|\mu\|(F-E) + \|\mu\|(E \cap F) \leq \|\mu\|(F-E) + \|\mu\|(E)$$

$\therefore \|\mu\|(F) - \|\mu\|(E) \leq \|\mu\|(F-E) \quad \cdots ②$

①，②より，$\left| \|\mu\|(E) - \|\mu\|(F) \right| \leq \max\{\|\mu\|(E-F), \|\mu\|(F-E)\}$

$$\leq \|\mu\|(E-F) + \|\mu\|(F-E) \quad \#$$

主張3. $E - E_n \subset \bigcup_{k=n}^{\infty}(E-E_k) \downarrow \phi$，$E_n - E \subset \bigcup_{k=n}^{\infty}(E_k - E) \downarrow \phi$

∵) "$\subset$" は明らか．また集合列 $\{\bigcup_{k=n}^{\infty}(E-E_k)\}$，$\{\bigcup_{k=n}^{\infty}(E_k - E)\}$ が単調減少であることも明らか．

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{\bigcup_{k=n}^{\infty}(E-E_k)\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{E \cap \left(\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k^c\right)\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{E \cap \left(\bigcap_{k=n}^{\infty}E_k\right)^c\right\}$$

$$= E \cap \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty}E_k\right)^c = E \cap \left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}E_k\right\}^c$$

$$= E \cap E^c = \phi$$

同様に

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{\bigcup_{k=n}^{\infty}(E_k - E)\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k\right) \cap E^c\right\} = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k\right) \cap E^c = E \cap E^c = \phi \quad \#$$

以上より，

$$\left| \|\mu\|(E) - \|\mu\|(E_n) \right| \leq \|\mu\|(E-E_n) + \|\mu\|(E_n - E)$$

$$\leq \|\mu\|\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}(E-E_k)\right) + \|\mu\|\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}(E_k - E)\right) \underset{(\text{連続})}{\longrightarrow} 0$$

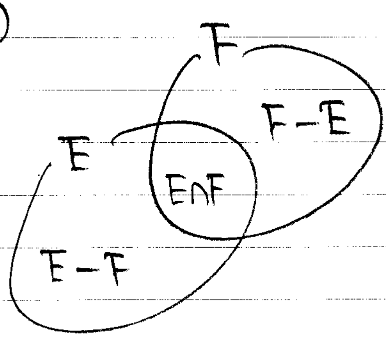
$\therefore \|\mu\|(E_n) \to \|\mu\|(E)$ □

(1.14) 命題.(ベクトル測度の列的連続性) $\mu : \mathcal{A} \to X$ はベクトル測度とする. $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ が $E \in \mathcal{A}$ に収束すれば $\mu(E_n) \to \mu(E)$.

(証明)

主張1. $E, F \in \mathcal{A}$ に対して.

$$\|\mu(E) - \mu(F)\| \leq \|\mu\|(E-F) + \|\mu\|(F-E)$$



$\because)$ $\mu(E) = \mu(E-F) + \mu(E \cap F)$

$\mu(F) = \mu(F-E) + \mu(E \cap F)$

$$\therefore \|\mu(E) - \mu(F)\| = \|\mu(E-F) - \mu(F-E)\|$$
$$\leq \|\mu(E-F)\| + \|\mu(F-E)\|$$
$$\leq \|\mu\|(E-F) + \|\mu\|(F-E) \quad ※$$

主張2 $E - E_n,\ E_n - E \to \phi$

$\because)$ $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} (E - E_k) = \phi$ は命題1.13の主張3の証明と同じ

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} (E - E_k) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} (E \cap E_k^c) = E \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k^c$$
$$= E \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \right)^c = E \cap E^c = \phi$$

$\therefore E - E_n \to \phi$

同様にして $E_n - E \to \phi$ ※

次に.

$$\|\mu(E_n)-\mu(E)\| \leqq \|\mu\|(E_n-E)+\|\mu\|(E-E_n)$$

で、命題1.13より. $\|\mu\|(E_n-E)$, $\|\mu\|(E-E_n) \to \|\mu\|(\phi)=0$ となる.

よって. $\mu(E_n)\to\mu(E)$ □

§2 ベクトル測度の可算加法性 (Orlicz–Pettisの定理)

この節ではベクトル測度の値の空間が無限次元であることにより生じる問題の一つとして、弱位相に関する可算加法性とノルム位相に関する可算加法性との間の関係を取り扱う.

(2.1) 記号

$(\Omega, \mathcal{A})$: 可測空間

X : 実Banach空間, X^* : Xの双対空間

(2.2) 定義. $\mu : \mathcal{A} \to X$ はベクトル値集合関数とする.

μが弱可算加法的 (weakly countably additive)

$\overset{\text{def.}}{\iff}$ 各$x^* \in X^*$に対して, $x^*\mu$が可算加法的, i.e., 互いに素な集合列 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ に対して, $x^*\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x^*\mu(E_n)$

$\iff$ μは. X上の弱位相$\sigma(X, X^*)$に関して可算加法的

一般に無限次元Banach空間上の弱位相はノルム位相よりも真に弱い!

例 H : Hilbert空間, $\{e_n\}$はCONS in Hとする. このとき. $e_n \to 0$ (弱収束)

ところが $\|e_n - 0\| = \|e_n\| = 1 \not\to 0$ ∴ $\{e_n\}$は0にノルム収束しない ※

それゆえ、弱可算加法性も可算加法性より真に弱い概念であることが想像されるが、実際は両概念は一致する。すなわち、次の定理が成り立つ：

(2.3)定理. $\mu : \mathcal{A} \to X$ は有限加法的とする. このとき

$$\mu \text{ は弱可算加法的} \iff \mu \text{ は可算加法的}$$

(証明) ($\Leftarrow$)は明らか

($\Rightarrow$) μは可算加法的でないとすると命題1.5より

$$\exists \varepsilon>0,\ \exists \{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A} \text{ with } E_n \downarrow \phi\ ;\ \|\mu(E_n)\| > \varepsilon \quad (n=1,2,\cdots)$$

とできる. このとき Hahn-Banachの定理により

$$\exists x_n^* \in X^* \text{ with } \|x_n^*\|=1\ ;\ x_n^*\mu(E_n) = \|\mu(E_n)\| > \varepsilon \quad (n=1,2,\cdots) \qquad (*)$$

とできる. そこで

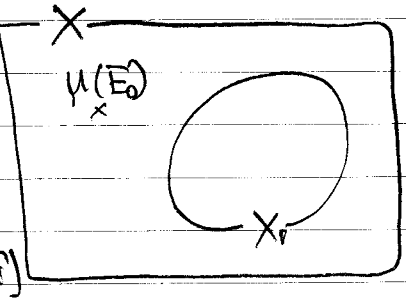
$\mathcal{A}_0 = a(\{E_n\})$: $\{E_n\}$によって生成される集合体

$\mathcal{A}_1 = \sigma(\{E_n\})$: $\{E_n\}$によって生成されるσ-集合体

とすると、$\mathcal{A}_0$は可算個の集合からなる (例えば [6, p.167] を見よ). よって

$$X_0 \equiv \overline{\text{linear}}\{\mu(E) : E \in \mathcal{A}_0\}$$

とおくと X_0 は X の可分な部分空間となる.



主張1 $\mu(E) \in X_0$ for all $E \in \mathcal{A}_1$

∵) $\exists E_0 \in \mathcal{A}_1$; $\mu(E_0) \notin X_0$ とすると Hahn-Banachの定理より

$\exists x_0^* \in X^*$; $x_0^*\mu(E_0) \neq 0$ かつ $x_0^*\mu(E) = 0$ for all $E \in \mathcal{A}_0$

とできる。ここで $x_0^*\mu$ は $\mathcal{A}_1$ 上で可算加法的なので $x_0^*\mu(E) = 0$ for all $E \in \mathcal{A}_1$

∵) 一般に、$\mu, \nu : \mathcal{A} \to X$ をベクトル測度、$\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ を集合体で $\sigma(\mathcal{A}_0) = \mathcal{A}$

とする。このとき $\mu = \nu$ on $\mathcal{A}_0$ ならば $\mu = \nu$ on $\mathcal{A}$

(略証) $\mathcal{B} \equiv \{E \in \mathcal{A} : \mu(E) = \nu(E)\}$ とおくと $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ で、$\mathcal{B}$ は

monotone class となる。よって Monotone class theorem により、$\mathcal{B} = \mathcal{A}$ となる ※

ところが、$E_0 \in \mathcal{A}_1$、それゆえ $x_0^*\mu(E_0) = 0$ となり $x_0^*\mu(E_0) \neq 0$ に反する ※

各 x_n^* の X_0 上への制限を u_n^* で表すと $u_n^* \in X_0^*$ で $\|u_n^*\| \leq 1$ となる。X_0 は

可分なので Banach-Alaoglue の定理により X_0^* の閉単位球は弱位相 $\sigma(X_0^*, X_0)$

に関してコンパクト距離付け可能となる。よって

$\exists \{u_{n_k}^*\}$: $\{u_n^*\}$ の部分列、$\exists u_0^* \in X_0^*$; $u_{n_k}^* x \to u_0^* x$ for all $x \in X_0$

となる。ゆえに、各 $E \in \mathcal{A}_1$ に対して $\lim_{k\to\infty} u_{n_k}^*\mu(E)$ は収束する。よって

Nikodym's Convergence Theorem により $\{u_{n_k}^*\mu\}_{k=1}^{\infty}$ は一様に可算加法的となる。

i.e., 任意の $\{F_m\} \subset \mathcal{A}_1$ with $F_m \downarrow \phi$ に対して

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{j\geq 1} u_{n_j}^*\mu(F_m) = 0.$$

ここで $\{E_{n_k}\} \subset \mathcal{A}_1$ で $E_{n_k} \downarrow \phi$ なので

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{j\geq 1} u_{n_j}^*\mu(E_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} \sup_{j\geq 1} x_{n_j}^*\mu(E_{n_k}) = 0$$

(各 $\mu(E_{n_k}) \in X_0$ なので)

$$\therefore \lim_{k\to\infty} x_{n_k}^* \mu(E_{n_k}) = 0$$

ところが(*)より $x_{n_k}^*\mu(E_{n_k}) > \varepsilon$ $(k=1,2,\cdots)$であり,矛盾する. ゆえに μ は可算加法的となる □

上で述べた定理は Banach 空間における級数に対して成り立つ有名な Orlicz-Pettis の定理の自明な帰結でもある. Orlicz-Pettis の定理の証明は例えば [4] の p.27 または p.85 を見よ. p.27 ではベクトル値関数の可測性に関する Pettis の可測性定理を用いての証明がある. 一方, p.85 では測度論的な証明がなされている.

<u>Orlicz-Pettis の定理.</u> $\{x_n\} \subset X$ とする. 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ が $\sigma(X, X^*)$ に関して部分級数収束 (subseries convergence), i.e., $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ の任意の部分級数が $\sigma(X, X^*)$ に関して収束すると仮定する. このとき, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ はノルムに関して部分級数収束する.

<u>Orlicz-Pettis の定理による定理 2.2 の証明:</u> $\mu: \mathcal{A} \to X$ は弱可算加法的とする. $\{E_n\} \subset \mathcal{A}$ は互いに素とする. このとき, $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$ の任意の部分級数は $\sigma(X, X^*)$ に関して収束する. ゆえに, Orlicz-Pettis の定理により $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$ はノルムに関して収束する. ここで再び μ の弱可算加法性により, $\forall x^* \in X^*$ に対して

$$x^*\left(\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)\right) \underset{\uparrow}{=} \sum_{n=1}^{\infty} x^*\mu(E_n) \underset{\uparrow}{=} x^*\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right) = x^*\left(\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\right)$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$がノルム収束

$x^*\mu$の可算加法性

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)$$

∴ μは可算加法的 □

NO. 20

§3 Control measureの存在性(Bartle-Dunford-Schwartzの定理)

この節ではベクトル測度の理論を深化させるのに必要不可欠なcontrol measureの存在性に関するBartle-Dunford-Schwartzの定理について述べる. この定理は実測度から成るBanach空間の部分集合の相対コンパクト性に関する深遠な結果の帰結として得られる. そこで, それらのすべてに証明を与えるのは時間的制約上不可能なので必要な結果だけを定義と共にまとめておく:

<u>(3.1) 記号</u>

$(\Omega, \mathcal{A})$: 可測空間

X: 実Banach空間, X^*: Xの双対空間

$ca(\mathcal{A})$: $\mathcal{A}$上で定義された可算加法的実数値集合関数(=<u>実測度</u>) λの全体から成るBanach空間 with $\|\lambda\| \equiv |\lambda|(\Omega)$.

$ca^+(\mathcal{A}) \equiv \{\lambda \in ca(\mathcal{A}) : \lambda \geq 0\}$

$ca(\mathcal{A}, X)$: ベクトル測度 $\mu : \mathcal{A} \to X$ の全体から成るノルム空間 with $\|\mu\| \equiv \|\mu\|(\Omega)$

<u>(3.2) 定義</u>(一様可算加法性, 一様λ-連続性, λ-連続性)

$\mathcal{M} \subset ca(\mathcal{A}, X)$, $\lambda \in ca^+(\mathcal{A})$ とする.

(i) <u>$\mathcal{M}$は一様に可算加法的(uniformly countably additive)</u>

$\overset{\Longleftrightarrow}{\text{def.}}$ $\forall \varepsilon>0$, $\forall \{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ with $E_n \downarrow \phi$, $\exists n_0$;

$n \geq n_0$ ならば $\|\mu(E_n)\| < \varepsilon$ for all $\mu \in \mathcal{V}$

(ii) $\mathcal{V}$ は一様に λ-連続 (uniformly λ-continuous)

$\overset{\Longleftrightarrow}{\text{def.}}$ $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$;

$E \in \mathcal{A}$ で $\lambda(E) < \delta$ ならば $\|\mu(E)\| < \varepsilon$ for all $\mu \in \mathcal{V}$

このとき、簡単に

$$\lim_{\lambda(E)\to 0} \mu(E) = 0 \quad \text{uniformly for } \mu \in \mathcal{V}$$

と表す。

(iii) $\mu \in ca(\mathcal{A}, X)$ とする。

μ が λ-連続 (λ-continuous)

$\overset{\Longleftrightarrow}{\text{def.}}$ $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$; $E \in \mathcal{A}$ で $\lambda(E) < \delta$ ならば $\|\mu(E)\| < \varepsilon$.

このとき、簡単に

$$\lim_{\lambda(E)\to 0} \mu(E) = 0$$

と表す。

次の結果は、半距離空間 $(\mathcal{A}, d_\lambda)$、ただし

$$d_\lambda(E, F) \equiv \lambda(E \triangle F), \quad E, F \in \mathcal{A}$$

の完備性とBaireのカテゴリー定理を用いて示される。証明は [6, p.158] を見よ

[4, p.89] を見よ。定理3.3はベクトル測度に対して示されているが、その証明は実測度の場合と全く同様であることを注意しておく。

(3.3) 定理 (Vitali-Hahn-Saksの定理) $\lambda \in ca^{+}(\mathcal{A})$, $\{\mu_n\} \subset ca(\mathcal{A}, X)$ で各 μ_n は λ-連続とする。また各 $E \in \mathcal{A}$ に対して $\mu(E) = \lim_{n \to \infty} \mu_n(E)$ が存在すると仮定する。このとき $\{\mu_n\}$ は一様に λ-連続であり、μ は λ-連続かつ可算加法的となる。

次の定理はVitali-Hahn-Saksの定理とEberlein-$\check{S}$mulianの定理を用いて示される (証明は [6, pp.305-308] または [4; p.92] を見よ)

(3.4) 定理 ($ca(\mathcal{A})$の部分集合の相対弱コンパクト性判定条件)

$\mathcal{K} \subset ca(\mathcal{A})$ に対して以下の条件は同値:

(i) $\mathcal{K}$は相対弱コンパクト (= 相対弱点列コンパクト)

(ii) $\mathcal{K}$は有界かつ一様に可算加法的

(iii) $\mathcal{K}$は有界かつ $\exists \lambda \in ca^{+}(\mathcal{A})$; $\mathcal{K}$は一様に λ-連続

さらに、このとき λ は

$$\lambda(E) \leq \sup_{\sigma \in \mathcal{K}} |\sigma(E)|, \quad E \in \mathcal{A}$$

を満たすように選べる。

上で述べた相対弱コンパクト性判定条件を Radon-Nikodym の定理を用いて書き換えれば、L_1空間の部分集合の弱位相 $\sigma(L_1, L_\infty)$ に関する相対コンパクト性の判定条件として有名な Dunford-Pettis の定理が得られる。

<u>(3.5) 定理</u> (Dunford-Pettis の定理) $\lambda \in ca^+(\mathcal{A})$ で $\mathcal{K} \subset L_1(\lambda)$ とする。$\sigma_f(E) \equiv \int_E f d\lambda$, $f \in L_1(\lambda)$, $E \in \mathcal{A}$ とおく。このとき、次の条件は同値:

(i) $\mathcal{K}$ は相対弱コンパクト

(ii) $\mathcal{K}$ は有界かつ $\{\sigma_f : f \in \mathcal{K}\}$ は一様に可算加法的

(iii) $\mathcal{K}$ は有界かつ $\{\sigma_f : f \in \mathcal{K}\}$ は一様に λ-連続

さて、以上の準備のもとで、control measure の存在性に関する Bartle-Dunford-Schwartz の定理を述べる。

<u>(3.6) 定理</u> (Bartle-Dunford-Schwartz の定理) $\mu : \mathcal{A} \to X$ はベクトル測度とする。次の (i), (ii) を満たす $\lambda \in ca^+(\mathcal{A})$ が存在する:

(i) $\lambda(E) \leqq \|\mu(E)\|$ for all $E \in \mathcal{A}$

(ii) $\lim_{\lambda(E)\to 0} \|\mu\|(E) = 0$, i.e., $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$; $\lambda(E) < \delta$ ならば $\|\mu\|(E) < \varepsilon$.

(証明) $\mathcal{K} \equiv \{x^*\mu : \|x^*\| \leqq 1, x^* \in X^*\} \subset ca(\mathcal{A})$ とおく。

<u>主張1</u>: $\mathcal{K}$ は有界かつ一様に可算加法的

∵) $\forall \varepsilon>0$, $\forall \{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ with $E_n \downarrow \phi$ をとり固定. μ は可算加法的なので

命題1.5より,

$$\sup_{\|x^*\|\leq 1} |x^*\mu(E_n)| = \|\mu(E_n)\| \to 0$$

となる. よって, $\exists n_0$;

$n \geq n_0$ ならば $|x^*\mu(E_n)| < \varepsilon$ for all $x^* \in X^*$ with $\|x^*\| \leq 1$.

ゆえに, $\mathcal{K} \subset ca(\mathcal{A})$ は一様に可算加法的となる. 但し $\mathcal{K}$ の有界性は明らか $\#$

よって, 定理3.4より, $\exists \lambda \in ca^+(\mathcal{A})$;

(a) $\lambda(E) \leq \sup_{\|x^*\|\leq 1} |x^*\mu(E)|$, $E \in \mathcal{A}$

(b) $\mathcal{K} = \{x^*\mu : \|x^*\| \leq 1\}$ は一様に λ-連続

となる.

(a)より, (i)が得られる

一方, (b)より $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$;

$$\lambda(E) < \delta \text{ ならば } \|\mu(E)\| = \sup_{\|x^*\|\leq 1} |x^*\mu(E)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

となる. よって, $\forall F \in \mathcal{A}$ with $F \subset E$ に対して, $\lambda(F) < \delta$ なので $\|\mu(F)\| < \frac{\varepsilon}{2}$

ゆえに, 命題1.11により,

$$\|\mu\|(E) \leq 2 \cdot \sup_{F \subset E} \|\mu(F)\| \leq 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$$

となり, (ii)が得られた $\square$

(3.7) 定義. 定理3.6 の λ のことを μ の 制御測度 (control measure) という.

定理3.6 の証明の中の(主張1)と定理3.4 より次の系が得られる.

(3.8) 系. $\mu : \mathcal{A} \to X$ はベクトル測度とする. このとき, $\{x^*\mu : \|x^*\| \leq 1\}$ は $ca(\mathcal{A})$ の相対弱点列コンパクト集合である.

control measure の存在定理の応用として Nikodým's Convergence Theorem のベクトル測度への拡張を試みる.

(3.9) 定理. (Nikodým's Convergence Theorem) $\{\mu_n\} \subset ca(\mathcal{A}, X)$ で各 $E \in \mathcal{A}$ に対して $\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(E)$ が存在すると仮定する. このとき, μ はベクトル測度で $\{\mu_n\}$ は一様に可算加法的である.

(証明) 各 μ_n の control measures を λ_n とする.

$$\lambda(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\lambda_n(E)}{1+\lambda_n(\Omega)}, \quad E \in \mathcal{A}$$

と書くと $\lambda \in ca^+(\mathcal{A})$ で, 定理3.6 より 各 μ_n は λ-連続となる. よって, 定理3.3 (Vitali-Hahn-Saks の定理) により, μ は可算加法的, それ故ベクトル測度で $\{\mu_n\}$ は一様に λ-連続となる.

$\{E_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ は $E_m \downarrow \phi$ とする. このとき, $\lambda(E_m) \to 0$ となるので $\{\mu_n\}$ の

一様λ-連続性により、$\sup_{n\geq 1}\|\mu_n(E_m)\| \to 0$ $(as\ m\to\infty)$ となる。ゆえに、$\{\mu_n\}$ は一様に可算加法的となる。□

この§の最後で、control measure の存在性と密接に関連する Rybakov 測度に関する結果を紹介する。証明は、[3, p.268] を見よ。

<u>(3.10) 定理</u>（Rybakov 測度）$\mu: \Omega \to X$ はベクトル測度とする。このとき

$\exists x^* \in X^*$; $\mu \ll x^*\mu$, i.e., μ は $x^*\mu$-連続。

<u>(3.11) 注意</u>．定理3.10は Fréchet 空間に対しては一般に不成立である。

§4 その他の重要な定理

この§で紹介されている定理は、ベクトル測度のみならず実測度に対しても重要かつ有益なものである。しかし、その証明は実測度の場合と同様に示せるか、あるいは実測度の場合の結果から簡単に導けるものである。

次の定理の証明は例えば [3, p.10] を見よ。

<u>(4.1) 定理</u> (Pettis) $\mu : \mathcal{A} \to X$ はベクトル測度、$\lambda \in ca^+(\mathcal{A})$ とする。このとき、次の2つの条件は同値：

(i) $\lim_{\lambda(E) \to 0} \mu(E) = 0$, i.e., μ は λ-連続

(ii) $\mu \ll \lambda$, i.e., $E \in \mathcal{A}$ で $\lambda(E) = 0$ ならば $\mu(E) = 0$

次の定理は実測度に対する Nikodým Boundedness Theorem より簡単に導ける (例えば [3, p.14] を見よ)。

<u>(4.2) 定理</u> (Nikodým Boundedness Theorem) $\mathcal{M} \subset ca(\mathcal{A}, X)$ とする。各 $E \in \mathcal{A}$ に対して $\sup_{\mu \in \mathcal{M}} \|\mu(E)\| < \infty$ ならば $\mathcal{M}$ は <u>一様に有界</u> (uniformly bounded), i.e., $\sup_{\mu \in \mathcal{M}} \|\mu\|(\Omega) < \infty$

(証明) この定理の証明は実測度に対する Nikodým Boundedness Theorem から容易に導ける。実測度の族を

$$\mathcal{K} \equiv \{x^*\mu : \mu \in \mathcal{D},\ \|x^*\| \le 1,\ x^* \in X^*\}$$

とおく．このとき，仮定より，各$E \in \mathcal{A}$に対して

$$\sup_{\mu \in \mathcal{D}} \sup_{\|x^*\| \le 1} |x^*\mu(E)| < \infty$$

となる．よって実測度に対するNikodým Boundedness Theoremより，

$$\sup_{\mu \in \mathcal{D}} \sup_{\|x^*\| \le 1} |x^*\mu|(\Omega) < \infty$$

$$\|$$

$$\sup_{\mu \in \mathcal{D}} \|\mu\|(\Omega)$$

$\square$

この節の最後に実測度に対するCarathéodory－Hahnの拡張定理のベクトル測度への拡張について述べる．

(4.3) 定理．(Carathéodory－Hahn－Kluvánek Extension Theorem) $\mathcal{F}$はΩの部分集合から成る集合体，$\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{F})$，$\mu : \mathcal{F} \to X$は有限加法的なベクトル値集合関数とする．このとき，次の条件は同値：

(i) μは（一意的な）可算加法的な拡張$\overline{\mu} : \mathcal{A} \to X$をもつ．

(ii) $\exists \lambda \in ca^+(\mathcal{F})$; μはλ－連続 on $\mathcal{F}$, i.e., $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $E \in \mathcal{F}$で$\lambda(E) < \delta$ならば$\|\mu(E)\| < \varepsilon$.

(iii) μは$\mathcal{F}$上で強加法的，i.e.，｛任意の互いに素な集合列$\{E_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{F}$

に対して $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$ は X のノルムに関して収束.

(iii) $\mu(\mathcal{F}) \equiv \{\mu(E) : E \in \mathcal{F}\}$ は X の相対弱コンパクト集合.

さらに このとき, $\overline{\mu}(\mathcal{F}) \subset \overline{\mu(\mathcal{F})}$

(証明) (i)⇒(ii): 定理3.6 (Bartle-Dunford-Schwartz の定理) より明らか.

(ii)⇒(i): 実測度に対する Carathéodory-Hahn の拡張定理 (例えば [6, p.136]) により, λ の $\mathcal{A}$ 上への拡張を $\overline{\lambda}$ で表す. $\mathcal{A}$ 上に

$$\rho(E, F) \equiv \overline{\lambda}(E \triangle F), \quad E, F \in \mathcal{A}$$

によって半距離 ρ を導入すると,

① $\mathcal{F}$ は ρ に関して $\mathcal{A}$ の中で稠密

② $\mu : (\mathcal{F}, \rho) \to X$ は, ρ に関して一様連続

を示すことができる. よって ①② より, μ の一様連続な拡張 $\overline{\mu} : (\mathcal{A}, \rho) \to X$ が存在する. この $\overline{\mu}$ が有限加法的かつ $\overline{\lambda}$-連続となることが示される. ゆえに, $\overline{\mu}$ は $\mathcal{A}$ 上で可算加法的となる.

一意性: μ の拡張が2つあったとして, それらを μ_1, μ_2 とする. このとき, $\forall x^* \in X^*$ に対して, $x^*\mu_1 = x^*\mu_2 = x^*\mu$ on $\mathcal{F}$ となる. Carathéodory-Hahn の拡張定理の一意性により, $x^*\mu_1 = x^*\mu_2$ on $\mathcal{A}$ となる. ここで, $x^* \in X^*$ は任意なので $\mu_1 = \mu_2$ on $\mathcal{A}$. ゆえに一意性が示された □

§5 Bartle-Dunford-Schwartz-Lewis 積分

この§では ベクトル測度の理論展開に際して重要な道具の一つであるスカラー値関数のベクトル測度による積分（Bartle-Dunford-Schwartz-Lewis 積分）について詳細に述べる．この積分理論の展開に際しては，すでに第3章で述べたベクトル測度に対する control measure が重要な役割を果たす．

(5.0) 記号.

$(\Omega, \mathcal{A})$: 可測空間

X : 実 Banach 空間， X^* : X の双対空間

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$: 実数直線 $\mathbb{R}$ の Borel 集合から成る σ-集合体

(5.1) 定義（零集合，almost everywhere，可測性）$\mu: \mathcal{A} \to X$ はベクトル測度とする

(i) $E \in \mathcal{A}$ が μ-零集合 (μ-null set) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $|\mu|(E) = 0$

(ii) $P(\omega)$ を $\omega \in \Omega$ に関するある性質とする．

$\exists N \in \mathcal{A}$: μ-零集合；

$$\Omega - N \subset \{\omega \in \Omega : P(\omega) \text{ が成立する}\}$$

となるとき，性質 $P(\omega)$ は μ-ほとんどいたる所 (μ-almost everywhere) で成り立つといい，"$P(\omega)$, μ-a.e. $\omega \in \Omega$" とかく．

(iii) $f: \Omega \to \mathbb{R}$ は関数とする.

f が <u>$\mathcal{A}$-可測</u> ($\mathcal{A}$-measurable)

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$

<u>(5.2) 定義</u> (単関数に対する積分の定義) $\mu: \mathcal{A} \to X$ をベクトル測度とする.

$f: \Omega \to \mathbb{R}$ は $\mathcal{A}$-可測な <u>単関数</u> (simple function), i.e.,

$$f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_k},\ n \in \mathbb{N},\ \{E_k\}_{k=1}^{n} \text{ は } \Omega \text{ の有限可測分割},\ \alpha_k \in \mathbb{R}$$

とする. このとき関数 f の集合 $E \in \mathcal{A}$ 上での <u>積分</u> (integral) を

$$\int_E f\,d\mu \equiv \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(E \cap E_k)$$

で定義する. 集合関数

$$E \in \mathcal{A} \longmapsto \int_E f\,d\mu \in X$$

のことを $f\mu$ とかき, f の μ に関する <u>不定積分</u> (indefinite integral) といい,

$\mu(f) \equiv f\mu(\Omega)$ のことを <u>定積分</u> (definite integral) という.

<u>(5.3) 命題</u> (単関数の積分の性質) $\mu: \mathcal{A} \to X$ はベクトル測度,

$f, g: \Omega \to \mathbb{R}$ は $\mathcal{A}$-可測単関数, α, β は実数, $E \in \mathcal{A}$ とする.

(1) f の E 上での積分 $\int_E f\,d\mu$ は well-defined, i.e., 積分の値は f を単関数として表現する仕方によらずに一意的に定まる.

(2) 積分は f に関して線形, i.e.

$$\int_E (\alpha f+\beta g)\,d\mu = \alpha\int_E f\,d\mu + \beta\int_E g\,d\mu$$

(3) 不定積分 $f\mu : \mathcal{A}\to X$ は可算加法的

(4) $$\left\|\int_E f\,d\mu\right\| \leq \sup_{\omega\in E}|f(\omega)|\cdot\|\mu\|(E)$$

(証明) (1)−(3) は通常の Lebesgue 積分の場合と同様にして示せる.

(4) $M \equiv \sup_{\omega\in E}|f(\omega)| < \infty$ とおく. $f=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \chi_{E_k}$ とする.

$$\left\|\int_E f\,d\mu\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\mu(E\cap E_k)\right\| = M\left\|\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\alpha_k}{M}\right)\mu(E\cap E_k)\right\| = (*)$$

ここで $\left|\frac{\alpha_k}{M}\right| \leq 1\ (k=1,2,\cdots,n)$ かつ $\{E\cap E_k\}_{k=1}^{n}$ は E の有限可測分割なので

命題 1.10 (2) により $(*) \leq M\cdot\|\mu\|(E)$ □

<u>(5.4) 定義</u> (可積分関数) $\mu:\mathcal{A}\to X$ はベクトル測度, $f:\Omega\to\mathbb{R}$ は $\mathcal{A}$−可測関数とする.

f が <u>μ−可積分</u> (μ−integrable) $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 次の2つの条件を満たす $\mathcal{A}$−可測単関数列 $\{f_n\}$ が存在する:

(i) $f_n(\omega)\to f(\omega)$ μ−a.e. $\omega\in\Omega$,

(ii) 各 $E\in\mathcal{A}$ に対して $\left\{\int_E f_n\,d\mu\right\}_{n=1}^{\infty}$ は X でノルム収束する

このとき，(ii) の極限のことを f の μ に関する E 上での**積分** (integral) といい，$\int_E f d\mu$ で表す，i.e.,

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu.$$

また，前と同様に集合関数 $f\mu : E \in \mathcal{A} \mapsto \int_E f d\mu \in X$ のことを f の μ に関する不定積分 (indefinite integral)，$\mu(f) \equiv f\mu(\Omega)$ のことを f の μ に関する定積分 (definite integral) という．さらに，f が (i) の条件を満たすとき f は μ-可測 (μ-measurable) という．

(5.5) 命題 (積分の性質) $\mu : \mathcal{A} \to X$ はベクトル測度，$f : \Omega \to \mathbb{R}$ は $\mathcal{A}$-可測関数，$E \in \mathcal{A}$ とする．

(1) f が μ-可積分ならば，f の μ に関する E 上での積分 $\int_E f d\mu$ は well-defined である，i.e., f を単関数列 $\{f_n\}$ の μ-a.e. での極限として表す仕方によらない．

(2) μ-可積分関数からなる空間は線形空間で，写像

$$f \mapsto \int_E f d\mu$$

は線形である．

(3) f が μ-本質的に有界 (μ-essentially bounded)，i.e.,

$$\mu\text{-}\operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} |f(\omega)| \equiv \inf\{\sup\{|f(\omega)| : \omega \in \Omega - N\},\ N \text{は} \mu\text{-零集合}\} < \infty$$

← μ-本質的上限 (μ-essential supremum)

ならば f は μ-可積分で

$$\left\| \int_E f d\mu \right\| \leq \mu\text{-}\operatorname*{ess\,sup}_{\omega \in E} |f(\omega)| \cdot \|\mu\|(E)$$

(4) f が μ-可積分ならば不定積分 $f\mu$ は $\mathcal{A}$ 上で可算加法的

(5) f が μ-可積分ならば $\displaystyle\lim_{\|\mu\|(E)\to 0} \int_E f d\mu = 0$.

(6) $T : X \to Y$ を有界線形作用素とする。このとき

$$T\mu : \mathcal{A} \to Y \text{ defined by } (T\mu)(E) \equiv T(\mu(E)),\ E \in \mathcal{A}$$

は、ベクトル測度となる。さらに、任意の μ-可積分関数 f に対して、f は $T\mu$-可積分で

$$T\left\{\int_E f d\mu\right\} = \int_E f d(T\mu)$$

が成り立つ。

(証明) (1) : $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ は定義5.4の (i), (ii) を満たす $\mathcal{A}$-可測な単関数列とする。このとき、各 $E \in \mathcal{A}$ に対して $\left\{\int_E f_n d\mu\right\}$ と $\left\{\int_E g_n d\mu\right\}$ が同じ極限に収束することを示せばよい。そこで

$$h_n(\omega) \equiv \begin{cases} f_n(\omega) - g_n(\omega) & \text{if } \{f_n(\omega)\} \text{ と } \{g_n(\omega)\} \text{ が共に } f(\omega) \text{ に収束する } \omega \in \Omega \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおくと、以下の ①–④ が成り立つ。

① $\{h_n\}$は $\mathcal{A}$-可測単関数列で $h_n(\omega) \to 0$ for all $\omega \in \Omega$.

② 各$E \in \mathcal{A}$に対して $\int_E h_n d\mu = \int_E f_n d\mu - \int_E g_n d\mu$ $(n \geq 1)$

③ 各$E \in \mathcal{A}$に対して $\left\{\int_E h_n d\mu\right\}$は$X$でノルム収束する。

④ 各$E \in \mathcal{A}$に対して $\left\|\int_E h_n d\mu\right\| \to 0$

∵) ①は定義より明らか。

②: $\Omega_1 \equiv \{f_n(\omega)\}$と$\{g_n(\omega)\}$が共に$f(\omega)$に収束する$\omega \in \Omega$の全体,

$\Omega_2 = \Omega - \Omega_1$と置くと. $\|\mu\|(\Omega_2) = 0$. ここで $h_n = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{E_k}$とすると.

$$\int_E h_n d\mu = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mu(E \cap E_k) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \left(E \cap (\Omega_1 \cup \Omega_2) \cap E_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mu\left((E \cap \Omega_1) \cap E_k\right) + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mu\left((E \cap \Omega_2) \cap E_k\right) = (*)$$

ところが

$$\|\mu((E \cap \Omega_2) \cap E_k)\| \leq \|\mu\|((E \cap \Omega_2) \cap E_k) \leq \|\mu\|(\Omega_2) = 0$$

なので

$$(*) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu\left((E \cap \Omega_1) \cap E_k\right)$$

$$= \int_{E \cap \Omega_1} h_n d\mu = \int_{E \cap \Omega_1} f_n d\mu - \int_{E \cap \Omega_1} g_n d\mu$$

上と同じ理由で

$$\int_{E\cap\Omega_1} f_n d\mu = \int_E f_n d\mu, \quad \int_{E\cap\Omega_1} g_n d\mu = \int_E g_n d\mu$$

となる. よって.

$$\int_E h_n d\mu = \int_E f_n d\mu - \int_E g_n d\mu.$$

③: 仮定より. $\left\{\int_E f_n d\mu\right\}$ と $\left\{\int_E g_n d\mu\right\}$ は共に X でノルム収束するので

(同じ極限かどうかは現時点ではわからない). $\left\{\int_E h_n d\mu\right\}$ も X で

ノルム収束する.

④: これは. control measure, Vitali-Hahn-Saksの定理, Egorovの定理を用いて

示される. λ を μ に対する control measure とする. 各 h_n は $\mathcal{A}$-可測な

単関数なので. 命題5.3 (4) より. 各 $n=1,2,\cdots$ に対して.

$$\lim_{\lambda(E)\to 0}\int_E h_n d\mu = 0 \qquad (*)$$

となる. よって. ③と(*)より. 不定積分の列 $\{h_n\mu\}$ は Vitali-Hahn-Saks

の定理(定理3.3)の仮定の条件を満たすので. (*)の収束は n に関して

一様である. それゆえ. $\forall\varepsilon>0, \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0;$

$$E\in\mathcal{A} \text{ で } \lambda(E)<\delta \text{ ならば } \sup_{n\geq 1}\left\|\int_E h_n d\mu\right\| < \varepsilon \qquad (**)$$

となる. 次に Egorov の定理により. 上の $\delta>0$ に対して.

∵) $\lim_{\lambda(E)\to 0}\|\mu\|(E)=0$ なので $\left\|\int_E h_n d\mu\right\| \leq \sup_{\omega\in E}|h_n(\omega)|\cdot\|\mu\|(E)\to 0$ $(\infty>\lambda(E)\to 0)$ #

$\exists A \in \mathcal{A}$ with $\lambda(A) < \delta$;

$$h_n(\omega) \longrightarrow 0 \text{ uniformly on } \omega \in \Omega - A$$

となる。これゆえ、上のδ、これゆえεだけに依存して $\exists n_0 \equiv n_0(\varepsilon)$;

$$n \geq n_0 \text{ ならば } \sup_{\omega \in \Omega - A} |h_n(\omega)| < \varepsilon$$

とできる。そこで $\forall E \in \mathcal{A}$ を固定。このとき、$n \geq n_0$ ならば

$$\left\| \int_E h_n d\mu \right\| = \left\| \int_{E-A} h_n d\mu + \int_{E\cap A} h_n d\mu \right\|$$

$$\leqq \left\| \int_{E-A} h_n d\mu \right\| + \left\| \int_{E\cap A} h_n d\mu \right\|$$

$\lambda(E\cap A) < \delta$ なので (*)より $\sup_{n\geq 1} \left\| \int_{E\cap A} h_n d\mu \right\| < \varepsilon$

$$\leqq \sup_{\omega \in E-A} |h_n(\omega)| \cdot \|\mu\|(E-A) + \varepsilon$$

$$\leqq \varepsilon \cdot \|\mu\|(\Omega) + \varepsilon$$

となる。以上より

$$\lim_{n\to\infty} \int_E h_n d\mu = 0 \text{ uniformly for } E \in \mathcal{A}$$

これゆえ、⊕が示された ※

仮定より、$\int_E f_n d\mu \to x$, $\int_E g_n d\mu \to y$ なので、②と④より

$$\|x - y\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \int_E f_n d\mu - \int_E g_n d\mu \right\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \int_E h_n d\mu \right\| = 0$$

$\therefore x = y$

ゆえに，$\left\{\int_E f_n d\mu\right\}$ と $\left\{\int_E g_n d\mu\right\}$ は同じ極限に収束することが示された．よって積分は well-defined である．

(2), (3), (5), (6) の証明は省略．

(4)：μ の control measure を $\lambda \in ca^+(\mathcal{A})$ とすると，$\lim_{\lambda(E)\to 0} \|\mu\|(E) = 0$

積分の定義より，$(f\mu)(E) = \lim_{n\to\infty} (f_n\mu)(E)$ for all $E \in \mathcal{A}$ である．

ここで，各 $f_n\mu$ は単関数 f_n の不定積分なので，命題5.3 (4) の不等式と $\lim_{\lambda(E)\to 0} \|\mu\|(E) = 0$ より $\lim_{\lambda(E)\to 0} (f_n\mu)(E) = 0$ が得られる．すなわち，各 $f_n\mu$ は λ-連続となる．ゆえに Vitali-Hahn-Saks の定理（定理3.3）により，$f\mu$ は可算加法的となる □

(5.6) 定理　$f_n, f : \Omega \to \mathbb{R}$ は $\mathcal{A}$-可測，f_n は μ-可積分で $f_n \to f$ μ-a.e. とする．このとき

$$\lim_{\|\mu\|(E)\to 0} \int_E f_n d\mu = 0 \quad \text{uniformly for } n = 1, 2, \cdots$$

ならば f は μ-可積分で

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \quad \text{for all } E \in \mathcal{A}$$

証明のために次の技術的な補題を準備する

(5.7) 補題 $\lambda \in ca^+(\mathcal{A})$ とする。$\{g_n\}$ は $\mathcal{A}$-可測単関数列, f は $\mathcal{A}$-可測関数で $g_n \to f$ in λ-measure, i.e. $\forall \varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \lambda\left(\{\omega\in\Omega : |g_n(\omega)-f(\omega)| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

であるとする。このとき次の2つの条件を満たす $\mathcal{A}$-可測単関数列 $\{f_n\}$ が存在する:

(i) $f_n \to f$ in λ-measure

(ii) $|f_n(\omega)| \leq 2|f(\omega)|$ for all $\omega \in \Omega$ and all $n = 1, 2, \cdots$

(証明) まず初めに次の主張が成り立つことを示す:

主張1 $\exists \{g_{n_k}\}$, $\exists \varepsilon_k \to 0$, $\exists E_k \in \mathcal{A}$ with $\lambda(E_k) \to 0$;

$$|g_{n_k}(\omega) - f(\omega)| < \varepsilon_k \quad \text{if } \omega \notin E_k.$$

∵) $g_n \to f$ in λ-measure なので, $\forall \varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \lambda\left(\{\omega\in\Omega : |g_n(\omega)-f(\omega)| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

それゆえ, 自然数から成る~~狭義~~単調増加列 $n_1 < n_2 < \cdots$ が存在して

$$\lambda\left(\{\omega\in\Omega : |g_{n_k}(\omega)-f(\omega)| \geq \frac{1}{k}\}\right) < \frac{1}{k}$$

とできる。ここで $\varepsilon_k = 1/k$, $E_k = \{\omega\in\Omega : |g_{n_k}(\omega)-f(\omega)| \geq \frac{1}{k}\}$ と置けばよい $/\!\!/$

$$f_k(\omega) \equiv \begin{cases} g_{n_k}(\omega) & \text{if } \omega \notin E_k \text{ かつ } |g_{n_k}(\omega)| > 2\varepsilon_k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と置くと、各 f_k は $\mathcal{A}$-可測な単関数である。これは、(i), (ii) を満たす。

(i) (i.e. $f_k \to f$ in λ-measure) の証明：

- $\omega \notin E_k$ かつ $|g_{n_k}(\omega)| > 2\varepsilon_k$ の場合

$$|f_k(\omega) - f(\omega)| = |g_{n_k}(\omega) - f(\omega)| < \varepsilon_k$$

- $\omega \notin E_k$ かつ $|g_{n_k}(\omega)| \leq 2\varepsilon_k$ の場合

$$|f(\omega)| \leq |f(\omega) - g_{n_k}(\omega)| + |g_{n_k}(\omega)| < \varepsilon_k + 2\varepsilon_k = 3\varepsilon_k$$

$$\therefore |\underset{0}{f_k(\omega)} - f(\omega)| = |f(\omega)| < 3\varepsilon_k$$

以上、2つの場合分けから、

$$\omega \notin E_k \text{ ならば } |f_k(\omega) - f(\omega)| < 3\varepsilon_k$$

$$\therefore \{\omega \in \Omega : |f_k(\omega) - f(\omega)| \geq 3\varepsilon_k\} \subset E_k$$

$$\therefore \lim_{k\to\infty} \lambda(\{\omega \in \Omega : |f_k(\omega) - f(\omega)| \geq 3\varepsilon_k\}) = 0 \quad (\leftarrow \lambda(E_k) \to 0)$$

ここで $\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0$ を固定：$\varepsilon_k \to 0$ なので $\exists k_0$; $k \geq k_0$ ならば

$$3\varepsilon_k < \varepsilon \text{ かつ } \lambda(\{\omega \in \Omega : |f_k(\omega) - f(\omega)| \geq 3\varepsilon_k\}) < \delta$$

$$\therefore \lambda(\{\omega \in \Omega : |f_k(\omega) - f(\omega)| > \varepsilon\}) < \delta$$

とできる。ゆえに、$f_k \to f$ in λ-measure #

(ii) (i.e. $|f_k(\omega)| \leq 2|f(\omega)|$ for $\forall \omega \in \Omega$, $\forall k = 1, 2, \cdots$) の証明：

- $\omega \notin E_k$ または $|g_{n_k}(\omega)| \leq 2\varepsilon_k$ の場合

$$f_k(\omega) = 0 \quad \therefore |f_k(\omega)| = 0 \leq 2|f(\omega)|$$

• $\omega \notin E_k$ かつ $|g_{n_k}(\omega)| > 2\varepsilon_k$ の場合.

$$|f(\omega)| \geq |g_{n_k}(\omega)| - |g_{n_k}(\omega) - f(\omega)|$$

$$> |g_{n_k}(\omega)| - \varepsilon_k > |g_{n_k}(\omega)| - \frac{|g_{n_k}(\omega)|}{2}$$

$$= \frac{|g_{n_k}(\omega)|}{2} = \frac{|f_k(\omega)|}{2}.$$

$$\therefore |f_k(\omega)| \leq 2|f(\omega)| \qquad \#$$

以上で補題の証明が完了した □

<u>定理5.6の証明:</u>

$k \in \mathbb{N}$ を固定: 仮定より.

$\exists \delta_k > 0$; $E \in \mathcal{A}$ かつ $\|\mu\|(E) < \delta_k$ ならば

$$\left\| \int_E f_n \, d\mu \right\| < \frac{1}{2^k} \quad (n = 1, 2, \cdots) \qquad (1)$$

$$\therefore \int_E |f_n| \, d|x^*\mu| < \frac{4}{2^k} \quad (n = 1, 2, \cdots, \|x^*\| \leq 1) \qquad (2)$$

$\because$)

$$\int_E |f_n| \, d|x^*\mu| \underset{\uparrow}{=} |f_n(x^*\mu)|(E) \leq 2 \sup_{F \subset E} |f_n(x^*\mu)(F)|.$$

Radon-Nikodymの定理を見よ

$$= 2 \sup_{F \subset E} \left| \int_F f_n \, d(x^*\mu) \right| \leq 2 \sup_{F \subset E} \left\| \int_F f_n \, d\mu \right\| \leq \frac{2}{2^k} < \frac{4}{2^k} \qquad \#$$

λをμのcontrol measureとする。また一般性を失うことなく$\delta_k \leq 1/2^k$と仮定する

このとき $\lim_{\lambda(E)\to 0} \|\mu\|(E) = 0$ なので

$\exists \eta_k > 0$; $E \in \mathcal{A}$ かつ $\lambda(E) < \eta_k$ ならば $\|\mu\|(E) < \delta_k$

とできる。このとき、次の①-③が成り立つ：

① 各$E \in \mathcal{A}$に対して、$\{\int_E f_n d\mu\}$は収束する

② fはμ-可積分

③ 各$E \in \mathcal{A}$に対して、$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$

①の証明：$f_n \to f$ μ-a.e. なので $f_n \to f$ λ-a.e. よって、Egorovの定理により

$\exists A \in \mathcal{A}$ with $\lambda(A) < \eta_k$; $f_n(\omega) \to f(\omega)$ uniformly for $\omega \in \Omega - A$

それゆえ、$\exists N_k \in \mathbb{N}$; $m, n \geqq N_k$ ならば

$$|f_n(\omega) - f_m(\omega)| < \frac{1}{2^k} \quad \text{for all } \omega \in \Omega - A \tag{3}$$

とできる。

$E \in \mathcal{A}$を固定：$m, n \geqq N_k$とすると (1), (2), (3)より

$$\left\| \int_E (f_n - f_m) d\mu \right\| \leqq \left\| \int_{E-A} (f_n - f_m) d\mu \right\| + \left\| \int_{E\cap A} f_n d\mu \right\| + \left\| \int_{E\cap A} f_m d\mu \right\|$$

$$\leqq \frac{1}{2^k}\|\mu\|(E-A) + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} \leqq \frac{1}{2^k}(\|\mu\|(S) + 2) \tag{4}$$

ここで $k\in\mathbb{N}$ は任意なので $\left\{\int_E f_n d\mu\right\}$ は X の中の Cauchy 列となる．よって収束する． ※

• まず初めに f は μ-可測となることを示す

②の証明：各 f_k は μ-可積分なので $\mathcal{A}$-可測単実関数列の λ-a.e. での極限として表される．それゆえ補題5.7及び Egorov の定理により（部分列をとれば）

$\exists g_k$：$\mathcal{A}$-可測単実関数，$\exists A_k\in\mathcal{A}$ with $\lambda(A_k)<\eta_k$；

$$|f_k(\omega)-g_k(\omega)|<\frac{1}{2^k}\quad \text{for all } \omega\in\Omega-A_k \tag{5}$$

$$|g_k(\omega)|\leqq 2|f_k(\omega)|\quad \text{for all } \omega\in\Omega \tag{6}$$

とできる

理由：f_k に λ-a.e. で収束する $\mathcal{A}$-可測単実関数列を $\{f_k^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ とすると，$f_k^{(i)}\to f_k$ in λ-measure となる．よって補題5.7より $\exists\{g_k^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$：$\mathcal{A}$-可測単実関数列；

(i) $g_k^{(i)}\to f_k$ in λ-measure

(ii) $|g_k^{(i)}(\omega)|\leqq 2|f_k(\omega)|$ for all $\omega\in\Omega$

(i)より $\{g_k^{(i)}\}$ の部分列 $\{g_k^{(i_j)}\}_{j=1}^{\infty}$ を選んで $g_k^{(i_j)}\to f_k$ λ-a.e. とできる．ゆえに Egorov の定理より，$\exists j_0$，$\exists A_0\in\mathcal{A}$ with $\lambda(A_0)<\eta_k$；

$$|f_k(\omega)-g_k^{(i_{j_0})}(\omega)|<\frac{1}{2^k}\quad \text{for all } \omega\in\Omega-A_0$$

とできる．そこで $g_k\equiv g_k^{(i_{j_0})}$，$A_k=A_0$ と置けばよい ※

そこで

$$B_k \equiv \bigcup_{i=k}^{\infty} A_i \quad (k=1,2,\cdots), \quad B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$$

と置くと. $\|\mu\|(B)=0$

$\because)$ $\|\mu\|(B_k) \leqq \sum_{i=k}^{\infty} \|\mu\|(A_i) \leqq \sum_{i=k}^{\infty} \delta_i \leqq \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{k-1}}$

$\lambda(A_i) < \eta_i$ なので $\|\mu\|(A_i) < \delta_i$

ここで $B_k \downarrow B$ なので. $\|\mu\|(\cdot)$ の単調列的連続性(命題1.13)により.

$\|\mu\|(B) = \lim_{k\to\infty} \|\mu\|(B_k) \leqq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 0$ ※

よって. $\omega \in \Omega - B$ とする.

$\exists K(\omega) \in \mathbb{N}$; $\omega \in \Omega - B_k = \Omega - \bigcup_{i=k}^{\infty} A_i$ for all $k \geqq K(\omega)$

それゆえ. (5)より.

$$|f_k(\omega) - g_k(\omega)| < \frac{1}{2^k} \quad \text{for all } k \geqq K(\omega)$$

ここで f_k は f に λ-a.e. で収束するので上式より. g_k は f に λ-a.e. で収束することがわかる. よって. $g_k \to f$ μ-a.e.

- 次に. 各 $E \in \mathcal{A}$ に対して. $\left\{\int_E g_k d\mu\right\}$ が X で収束することを示す.

$$\left\|\int_E (f_k - g_k) d\mu\right\| \leqq \left\|\int_{E-A_k} (f_k - g_k) d\mu\right\| + \left\|\int_{E\cap A_k} f_k d\mu\right\| + \left\|\int_{E\cap A_k} g_k d\mu\right\|$$

(右辺の第1項) $\leq \frac{1}{2^k} \|\mu\|(\Omega)$ by (5)

(右辺の第2項) $\leq \frac{1}{2^k}$ by (1) ∵) $\lambda(A_k) < \eta_k$ なので $\|\mu\|(E \cap A_k) < \delta_k$

(右辺の第3項) $= \sup_{\|x^*\| \leq 1} \left| \int_{E \cap A_k} g_k \, d(x^*\mu) \right| \leq \sup_{\|x^*\| \leq 1} \int_{E \cap A_k} |g_k| \, d|x^*\mu|$

$$\leq 2 \sup_{\|x^*\| \leq 1} \int_{E \cap A_k} |f_k| \, d|x^*\mu| \quad \text{by (6)}$$

$\leq 2 \cdot \frac{4}{2^k} = \frac{8}{2^k}$ by (2) ∵) $\lambda(A_k) < \eta_k$ なので $\|\mu\|(E \cap A_k) < \delta_k$

$$\therefore \left\| \int_E (f_k - g_k) \, d\mu \right\| \leq \frac{1}{2^k} \left(\|\mu\|(\Omega) + 9 \right) \qquad (7)$$

よって. $\forall \varepsilon > 0$, $\forall E \in \mathcal{A}$ を固定: $\frac{1}{2^{k_0}} < \varepsilon$ となる $k_0 \in \mathbb{N}$ を選ぶ. (4)と(7)より. $n, m \geq \max(k_0, N_{k_0})$ とすると.

$$\left\| \int_E (g_n - g_m) \, d\mu \right\| \leq \left\| \int_E (g_n - f_n) \, d\mu \right\| + \left\| \int_E (f_n - f_m) \, d\mu \right\| + \left\| \int_E (f_m - g_m) \, d\mu \right\|$$

$$\leq \frac{1}{2^n} \left(\|\mu\|(\Omega) + 9 \right) + \frac{1}{2^{k_0}} \left(\|\mu\|(\Omega) + 2 \right) + \frac{1}{2^m} \left(\|\mu\|(\Omega) + 9 \right)$$

$$\leq \frac{2}{2^{k_0}} \left(\|\mu\|(\Omega) + 9 \right) + \frac{1}{2^{k_0}} \left(\|\mu\|(\Omega) + 2 \right)$$

$$< 2\varepsilon\left(\|\mu\|(\Omega)+9\right)+\varepsilon\left(\|\mu\|(\Omega)+2\right)=\varepsilon\left(3\|\mu\|(\Omega)+20\right)$$

ゆえに $\left\{\int_E f_n d\mu\right\}$ は X の中の Cauchy 列となるので収束する.

以上より, f は μ-可積分となる ＃

③の証明: $h_n = f - f_n$ と置くと h_n は μ-可積分で ①で示したことから

$\left\{\int_E h_n d\mu\right\}$ は X の中で収束する.

さらに, 命題5.5(5)より, 各 $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\lim_{\|\mu\|(E)\to 0}\int_E h_n d\mu = 0\ ;\ \text{それゆえ}\ \lim_{\lambda(E)\to 0}\int_E h_n d\mu = 0$$

が成り立つ. よって, 命題5.5(1)の証明と全く同様にして,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\int_E h_n d\mu\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\|\int_E f_n d\mu - \int_E f d\mu\right\| = 0$$

が示せる. 以上で定理5.6の証明が完了した □

(5.8) 定理 (Dominated Convergence Theorem) $f_n, f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ は $\mathcal{A}$-可測関数で, f_n, g は μ-可積分, $f_n \to f$ μ-a.e. かつ $|f_n| \leq g$ μ-a.e. とする. このとき f は μ-可積分で, 各 $E\in\mathcal{A}$ に対して

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu$$

(証明) 前定理より

$$\lim_{\|\mu\|(E)\to 0} \int_E f_n d\mu = 0 \quad \text{uniformly for } n=1,2,\cdots$$

となることを示せばよい.

仮定より g は μ-可積分なので 命題5.5 (5) より. $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$;

$E\in\mathcal{A}$ で $\|\mu\|(E)<\delta$ ならば $\left\|\int_E g\,d\mu\right\|<\varepsilon$ となる. それゆえ.

$$\int_E g\,d|x^*\mu| \leqq 2\varepsilon \quad \text{for all } \|x^*\|\leqq 1$$

∵) $\|x^*\|\leqq 1$ とすると.

$$\int_E g\,d|x^*\mu| = |g(x^*\mu)|(E) \leqq 2\sup_{F\subset E}|g(x^*\mu)(F)|$$

$$= 2\sup_{F\subset E}\left|\int_F g\,dx^*\mu\right| \leqq 2\sup_{F\subset E}\left\|\int_F g\,d\mu\right\| \leqq 2\varepsilon$$

$F\subset E$ なので $\|\mu\|(F)<\delta$ ※

よって. $\|\mu\|(E)<\delta$ とすると. すべての $n=1,2,\cdots$ に対して.

$$\left\|\int_E f_n d\mu\right\| \leqq \sup_{\|x^*\|\leqq 1}\int_E |f_n|\,d|x^*\mu| \leqq \sup_{\|x^*\|\leqq 1}\int_E g\,d|x^*\mu| \leqq 2\varepsilon$$

ゆえに. $\lim_{\|\mu\|(E)\to 0}\int_E f_n d\mu = 0$ uniformly for $n=1,2,\cdots$ が示された □

命題1.11では ベクトル測度の値域は 有界集合となることを示したが、実際にはさらに強く、相対弱コンパクト集合となることがわかる。

(5.9) 定理 (ベクトル測度の値域) $\mu: \mathcal{A} \to X$ はベクトル測度とする。このとき、$R(\mu) \equiv \{\mu(E) : E \in \mathcal{A}\}$ は X の相対弱コンパクト集合となる。

(証明) λ を μ の control measure とする。

$$Tf = \int_\Omega f d\mu, \quad f \in L_\infty(\Omega, \lambda)$$

(f が λ-本質的に有界ならば μ-本質的に有界となるので、命題5.5(3)より f は μ-可積分となり、右辺の積分は存在する)

と書くと、$T: L_\infty(\lambda) \to X$ は有界線形作用素となる。このとき、各 $x^* \in X^*$ に対して

$$x^* Tf = \int_\Omega f d x^*\mu = \int_\Omega f \cdot \frac{dx^*\mu}{d\lambda} d\lambda, \quad f \in L_\infty(\lambda) \qquad (*)$$

が成り立つ。ここで

$$g_{x^*} \equiv \frac{dx^*\mu}{d\lambda} \in L_1(\lambda)$$

は、$x^*\mu$ の λ に関する Radon-Nikodym 微分である。このとき、次の①,②が成り立つ:

① $T: L_\infty(\lambda) \to X$ は $\sigma(L_\infty, L_1)$ と $\sigma(X, X^*)$ に関して連続

② $R(\mu) \subset \{T(f) : f \in L_\infty(\lambda), \|f\|_\infty \leq 1\}$

①の証明: $f_\alpha \to f$ in $\sigma(L_\infty, L_1)$ とする。このとき、$\forall x^* \in X^*$ に対して (*) より

$$x^* T f_\alpha = \int_\Omega \underset{\in L_\infty}{f_\alpha} \underset{\in L_1}{g_{x^*}} d\lambda \to \int_\Omega f \cdot g_{x^*} d\lambda = x^* T f$$

$\therefore T f_\alpha \to T f$ in $\sigma(X, X^*)$ ※

②の証明: $\forall E \in \mathcal{A}$ に対して、$\chi_E \in L_\infty(\lambda)$ で $\|\chi_E\|_\infty \leq 1$.

$\therefore \mu(E) = T(\chi_E) \in \{T(f) : f \in L_\infty(\lambda), \|f\|_\infty \leq 1\}$ ※

よって、Banach-Alaoglue の定理により、$\{f \in L_\infty(\lambda), \|f\|_\infty \leq 1\}$ は $\sigma(L_\infty, L_1)$ に関してコンパクトなので、①より、$\{T(f) : f \in L_\infty(\lambda), \|f\|_\infty \leq 1\}$ は $\sigma(X, X^*)$ に関してコンパクトとなる。ゆえに②により、$R(\mu)$ は $\sigma(X, X^*)$ に関して相対コンパクトとなる □

§6 ベクトル測度の正則性

この§では位相空間上のベクトル測度に対して種々の正則性を導入する。

そして、それらの正則性は対応する実測度の正則性で判定できることを示す。

(6.1) 記号.

S : Hausdorff空間

$\mathcal{B}(S)$: SのBorel集合から成るσ-集合体, i.e., Sのopen setsをすべて含む最小のσ-集合体

$\mathcal{G}$: Sの開集合全体, $\mathcal{F}$ = Sの閉集合全体, $\mathcal{K}$ = Sのコンパクト集合全体

X : 実Banach空間, X^* : Xの双対空間

(6.2) 定義 (種々の正則性) $\mu : \mathcal{B}(S) \to X$ はベクトル測度とする.

(i) μ は正則 (regular) $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0$, $\forall E \in \mathcal{B}(S)$ に対して

$$\exists F \in \mathcal{F} \text{ with } F \subset E ;\ \|\mu\|(E-F) < \varepsilon$$

(ii) μ は Radon $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0$, $\forall E \in \mathcal{B}(S)$ に対して

$$\exists K \in \mathcal{K} \text{ with } K \subset E ;\ \|\mu\|(E-K) < \varepsilon$$

(iii) μ は τ-正則 (τ-smooth)

$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 任意の単調増大net $\{G_\alpha\} \subset \mathcal{G}$ with $\bigcup_\alpha G_\alpha = G$ に対して

$$\lim_\alpha \|\mu\|(G - G_\alpha) = 0$$

(6.3) 命題 $\mu : \mathcal{B}(\mathfrak{S}) \to X$ はベクトル測度とする

(i) μ が正則 $\Leftrightarrow$ $\forall x^* \in X^*$ に対して $x^*\mu$ が正則, i.e., $\forall \varepsilon > 0$, $\forall E \in \mathcal{B}(\mathfrak{S})$

に対して $\exists F \in \mathcal{F}$ with $F \subset E$; $|x^*\mu|(E-F) < \varepsilon$

(ii) μ が Radon $\Leftrightarrow$ $\forall x^* \in X^*$ に対して $x^*\mu$ が Radon, i.e., $\forall \varepsilon > 0$, $\forall E \in \mathcal{B}(\mathfrak{S})$

に対して $\exists K \in \mathcal{K}$ with $K \subset E$; $|x^*\mu|(E-K) < \varepsilon$

(iii) μ が τ-正則 $\Leftrightarrow$ $\forall x^* \in X^*$ に対して $x^*\mu$ が τ-正則, i.e., 任意の単調増大 net $\{G_\alpha\} \subset \mathcal{G}$ with $G = \bigcup_\alpha G_\alpha$ に対して

$$\lim_\alpha |x^*\mu|(G - G_\alpha) = 0.$$

(証明) (ii)について: ($\Rightarrow$) $\forall \varepsilon > 0$, $\forall E \in \mathcal{B}(\mathfrak{S})$, $\forall x^* \in X^*$ を固定: このとき

$\exists K \in \mathcal{K}$ with $K \subset E$; $\|\mu\|(E-K) < \varepsilon / (\|x^*\|+1)$ とできる. よって.

$$|x^*\mu|(E-K) \underset{\uparrow}{\leq} \|x^*\| \cdot \|\mu\|(E-K) < \|x^*\| \left(\frac{\varepsilon}{\|x^*\|+1} \right) < \varepsilon$$

$$\left(\because \leq \|x^*\| \cdot \left| \frac{x^*}{\|x^*\|}\mu \right|(E-K) \leq \|x^*\| \cdot \sup_{\|z^*\| \leq 1} |z^*\mu|(E-K) \right)$$

ゆえに, $x^*\mu$ は Radon.

($\Leftarrow$) 系3.7 より. $M \equiv \{x^*\mu : \|x^*\| \leq 1\}$ は $ca(\mathcal{B}(\mathfrak{S}))$ の相対弱点列コンパクト集合である. X^* の閉単位球を B_{X^*} で表す:

主張. $\forall \varepsilon > 0$ に対して $\exists \{x_1^*, \ldots, x_n^*\} \subset B_{X^*}$, $\exists \delta > 0$;

$|x_i^*\mu|(E)<\delta\ (i=1,2,\cdots,n)$ ならば $|x^*\mu(E)|<\varepsilon$ for all $x^*\in B_{X^*}$

∵) 成立しないとすると.

$$(*)\begin{cases}\exists\varepsilon>0,\ \forall \text{有限集合}\{x_1^*,\cdots,x_n^*\}\subset B_{X^*},\ \forall\delta>0,\ \exists E\in\beta(S),\ \exists x^*\in B_{X^*};\\ \quad |x_i^*\mu|(E)<\delta\ (i=1,2,\cdots,n) \text{ かつ } |x^*\mu(E)|\geqq\varepsilon\end{cases}$$

$\forall x_1^*\in B_{X^*}$ を固定: $\delta=\frac{1}{2}$ とおくと. $(*)$より

$\exists E_1\in\beta(S),\ \exists x_2^*\in B_{X^*};\ |x_1^*\mu|(E_1)<\frac{1}{2}$ かつ $|x_2^*\mu(E_1)|\geqq\varepsilon$.

次に. $\{x_1^*,x_2^*\}$ と $\delta=\frac{1}{2^2}$ に対して. $(*)$より

$\exists E_2\in\beta(S),\ \exists x_3^*\in B_{X^*};$

$$|x_1^*\mu|(E_2)<\frac{1}{2^2},\ |x_2^*\mu|(E_2)<\frac{1}{2^2} \text{ かつ } |x_3^*\mu(E_2)|\geqq\varepsilon.$$

この操作を繰り返せば

$\exists\{x_n^*\}\subset B_{X^*},\ \exists\{E_n\}\subset\beta(S);$

$$|x_i^*\mu|(E_n)<\frac{1}{2^n}\ (i=1,2,\cdots,n) \text{ かつ } |x_{n+1}^*\mu(E_n)|\geqq\varepsilon$$

とできる.

さて. $\{x_n^*\mu\}$ は M の点列で, 仮定より. M は相対弱点列コンパクトなので.

$\{x_n^*\mu\}$ は弱収束する部分列をもつ. 記号を簡単にするために. $\{x_n^*\mu\}$

自身が弱収束すると仮定する:

$$\lambda_0\equiv\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}|x_j^*\mu|$$

NO.

とおくと、$\lambda_0 \in ca^+(\beta(S))$ で、各 $x_n^*\mu$ は λ_0-連続となる。また、$\{x_n^*\mu\}$ は Banach 空間 $ca(\beta(S))$ で弱収束するから、各 $E \in \beta(S)$ に対して $\lim_{n\to\infty}(x_n^*\mu)(E)$ が存在する。

∵) $E \in \beta(S)$ を固定：

$$\Phi_E(\lambda) \equiv \lambda(E), \quad \lambda \in ca(\beta(S))$$

と置くと、$\Phi_E : ca(\beta(S)) \to \mathbb{R}$ は linear で

$$|\Phi_E(\lambda)| = |\lambda(E)| \leq |\lambda|(S) = \|\lambda\|, \quad \lambda \in ca(\beta(S))$$

なので有界。よって、$\Phi_E \in (ca(\beta(S)))^*$。ゆえに $\{x_n^*\mu\}$ が弱収束することから、$\lim_{n\to\infty}\Phi_E(x_n^*\mu) = \lim_{n\to\infty}(x_n^*\mu)(E)$ は存在する #

以上より、Vitali-Hahn-Saks の定理により

$$\lim_{\lambda_0(E)\to 0} x_n^*\mu(E) = 0 \text{ uniformly for } n = 1, 2, \cdots$$

ここで

$$\lambda_0(E_n) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}|x_j^*\mu|(E_n) < \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2^j}\cdot\frac{1}{2^n} + \sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{\|\mu\|(S)}{2^j}$$

$$< \frac{1}{2^n}\underbrace{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}}_{=1} + \|\mu\|(S)\underbrace{\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^j}}_{=\frac{1}{2^n}}$$

$$= \frac{1 + \|\mu\|(S)}{2^n}$$

なので. $\nu_0(E_n) \to 0$ as $n \to \infty$. それゆえ.

$$\lim_{n\to\infty} x_m^* \mu(E_n) = 0 \quad \text{uniformly for } m=1,2,\cdots$$

ところが, これは. $|x_{n+1}^* \mu(E_n)| \geq \varepsilon > 0$ $(n=1,2,\cdots)$ に反する #

($\Leftarrow$)の証明を続ける: $\forall \varepsilon>0$ を固定: $\{x_1^*, \cdots, x_n^*\} \subset B_{X^*}$, $\delta>0$ は (主張) と同じものとする. $\forall E \in \mathcal{B}(S)$ を固定. 仮定より, 各 $x_i^*\mu$ $(i=1,2,\cdots,n)$ は Radon なので

$$\exists K \in \mathcal{K} \text{ with } K \subset E;\ \max_{1\leq i\leq n} |x_i^*\mu|(E-K) < \delta$$

とできる. よって $A \in \mathcal{B}(S)$ with $A \subset E-K$ に対して $\max_{1\leq i\leq n} |x_i^*\mu|(A) < \delta$ となる. よって (主張) より

$$|x^*\mu(A)| < \varepsilon \quad \text{for all } x^* \in B_{X^*}.$$

よって.
$$|x^*\mu|(E-K) \leq 2\cdot \sup_{A\subset E-K} |x^*\mu(A)| \leq 2\varepsilon \quad \text{for all } x^* \in B_{X^*}$$

$$\therefore \|\mu\|(E-K) = \sup_{\|x^*\|\leq 1} |x^*\mu|(E-K) \leq 2\varepsilon$$

ゆえに. μ は Radon となる.

(iii). ($\Rightarrow$) は (ii) と同様にして示せる.

($\Leftarrow$) $\forall \varepsilon>0$, $\forall \{G_\alpha\} \subset \mathcal{G}$ with $G_\alpha \uparrow G$ を固定: $\{x_1^*, \cdots, x_n^*\} \subset B_{X^*}$ と

$\delta>0$ は(主張)と同じとする。仮定より 各 $x_i^*\mu$ $(i=1,2,\cdots,n)$ は τ-正則なので．

$|x_i^*\mu|(G-G_\alpha)\to 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$. よって．

$\exists\alpha_0$; $\alpha\geqq\alpha_0$ ならば $\max\limits_{1\leqq i\leqq n}|x_i^*\mu|(G-G_\alpha)<\delta$

とできる．ゆえに．$A\in\mathcal{B}(S)$ with $A\subset G-G_\alpha$ に対して．$\max\limits_{1\leqq i\leqq n}|x_i^*\mu|(A)<\delta$.

となる．よって．(主張)より．

$$|x^*\mu(A)|<\varepsilon \quad \text{for all } x^*\in B_{X^*}.$$

ゆえに．$\alpha\geqq\alpha_0$ ならば

$$|x^*\mu|(G-G_\alpha)\leqq 2\sup_{A\subset G-G_\alpha}|x^*\mu(A)|\leqq 2\varepsilon \quad \text{for all } x^*\in B_{X^*}.$$

$$\therefore \|\mu\|(G-G_\alpha)\leqq 2\varepsilon$$

となる よって $\lim\limits_{\alpha}\|\mu\|(G-G_\alpha)=0$ が示された □

<u>(6.4) 注意</u>. 上の命題により、ベクトル測度の種々の正則性に関しては正値，有限測度の場合と同じ結果が成り立つことがわかる．

NO. 60

coop Filing Leaf 7mm×35

§7 弱コンパクト作用素の表現 (Riesz–Kakutaniの定理の拡張)

この最後の§では、ベクトル測度の理論の作用素論への重要な貢献の一つであるBartle–Dunford–Schwartzによる弱コンパクト作用素の表現定理を紹介する。この定理はコンパクト空間S上の連続関数全体からなるBanach空間$C(S)$上の有界線形汎関数の表現定理として有名なRiesz–Kakutaniの定理の拡張であり、弱コンパクト作用素$T: C(S) \to X$が、Banach空間Xに値をとるベクトル測度で表現されることを主張している。この定理により、その性質が調べにくかった弱コンパクト作用素の解明が飛躍的に進展した。

(7.1) 記号.

S: コンパクトHausdorff空間, $\mathcal{B}(S)$: SのBorel集合からなるσ-集合体

$C(S)$: S上で定義された実数値連続関数全体の作るBanach空間 with $\|f\|_\infty \equiv \sup_{s \in S} |f(s)|$

$rca(S)$: $\mathcal{B}(S)$上で定義された正則な実測度全体の作るBanach空間 with $\|\lambda\| \equiv |\lambda|(S)$

X: 実Banach空間, X^*: Xの双対空間, X^{**}: Xの第2次双対空間

Y: 〃, Y^*: Yの 〃, Y^{**}: Y 〃

(7.2) 復習. $T: X \to Y$ を有界線形作用素とする. B_X は Xの閉単位球とする.

(1) Tの双対作用素 (dual operator) $T^*: Y^* \to X^*$ は

$$\langle x, T^* y^* \rangle = \langle Tx, y^* \rangle, \quad x \in X, \ y^* \in Y^*$$

を満たす有界線形作用素として定義され、$\|T^*\| = \|T\|$ を満たす。さらに、$T^*: Y^* \to X^*$ は弱*位相 $\sigma(Y^*, Y)$, $\sigma(X^*, X)$ に関して連続である。

(2) T の<u>第2次双対作用素</u> (second dual operator) $T^{**}: X^{**} \to Y^{**}$ は、

$$\langle y^*, T^{**} x^{**} \rangle = \langle T^* y^*, x^{**} \rangle, \quad x^{**} \in X^{**}, \ y^* \in Y^*$$

を満たす有界線形作用素として定義され、$\|T^{**}\| = \|T\|$ を満たす。さらに、$T^{**}: X^{**} \to Y^{**}$ は弱*位相 $\sigma(X^{**}, X^*)$, $\sigma(Y^{**}, Y^*)$ に関して連続である。また、T^{**} は T の拡張になっている、i.e.,

$$T^{**}(\varkappa(x)) = Tx, \quad x \in X$$

ただし、$\varkappa: X \to X^{**}$ は自然な埋め込みである。

(3) T は<u>弱コンパクト</u> (weakly compact) $\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $T(B_X)$ の弱位相 $\sigma(Y, Y^*)$ に関する閉包が $\sigma(Y, Y^*)$-compact である。

〈弱コンパクト作用素の性質〉

(i) T が弱コンパクト $\Leftrightarrow$ T は有界集合を相対弱点列コンパクト集合（＝相対弱コンパクト集合）に移す。

(ii) T が弱コンパクト $\Leftrightarrow$ $T^{**} X^{**} \subset \varkappa(Y)$

(iii) (Gantmacher) T が弱コンパクト $\Leftrightarrow$ T^* が弱コンパクト

(4) T がコンパクト (compact) $\overset{\Leftrightarrow}{\text{def.}}$ $T(B_X)$ のノルム位相に関する閉包が Y の
ノルム位相に関するコンパクト集合.

〈コンパクト作用素の性質〉

(iv) (Schauder) T がコンパクト $\Leftrightarrow$ T^* がコンパクト

以上で述べた事実の証明は例えば [6, pp. 482–487] を見よ.

(7.3) 定理 (Bartle–Dunford–Schwartz の表現定理) $T : C(S) \to X$
は弱コンパクト作用素とする. このとき, 以下の (a)–(d) を満たすベクトル測度
$\mu : \mathcal{B}(S) \to X$ がただ1つ存在する:

(a) 各 $x^* \in X^*$ に対して $x^*\mu \in rca(S)$, それゆえ, μ は Radon

(b) $Tf = \int_S f d\mu$ for all $f \in C(S)$

(c) $\|T\| = \|\mu\|(S)$

(d) $T^*x^* = x^*\mu$ for all $x^* \in X^*$

逆に, $\mu : \mathcal{B}(S) \to X$ が (a) を満たすベクトル測度とすると, (b) によって定義される
作用素 $T : C(S) \to X$ は弱コンパクトで (c) と (d) を満たす.

(証明) 復習 7.2 (ii) により,

$$T^{**} C(S)^{**} \subset \kappa(X)$$

ただし、$\kappa : X \to X^{**}$ は自然な埋め込みである。

(第1段) ベクトル値集合関数 μ の構成：

各 $E \in \beta(S)$ に対して写像 $\phi_E : C(S)^* \to \mathbb{R}$ を

$$\phi_E(\lambda) \equiv \lambda(E), \quad \lambda \in rca(S) = C(S)^*$$

と定義すると、$\phi_E \in C(S)^{**}$

∵) $\|\lambda_n - \lambda\| \to 0$ とする。

$$|\phi_E(\lambda_n) - \phi_E(\lambda)| = |\lambda_n(E) - \lambda(E)| \leq \|\lambda_n - \lambda\| \to 0$$

$\therefore \phi_E(\lambda_n) \to \phi_E(\lambda)$。

それと、ϕ_E は明らかに線形 $\therefore \phi_E \in C(S)^{**}$ ※

そこで、X 値集合関数 $\mu : \beta(S) \to X$ を

$$\mu(E) \equiv \kappa^{-1}(T^{**}(\phi_E)), \quad E \in \beta(S)$$

と定義する。

(第2段) μ は (a)-(d) を満たす。

• μ の可算加法性と (a) & (d)： $x^* \in X^*$ を固定。$T^* x^* \in C(S)^* = rca(S)$

なので Riesz の表現定理により、

$$\exists \lambda_{x^*} \in rca(S) ; \quad T^* x^* = \lambda_{x^*} \qquad (1)$$

とできる。それゆえ、$\forall E \in \beta(S)$ に対して、

$$
\begin{aligned}
\lambda_{x^*}(E) = \phi_E(\lambda_{x^*}) = \phi_E(T^* x^*) &= \langle \underset{C(S)^*}{T^* x^*}, \underset{C(S)^{**}}{\phi_E} \rangle \\
&= \langle x^*, T^{**}\phi_E \rangle \qquad T^{**}\phi_E \in \varkappa(X) \\
&= \langle x^*, \varkappa(\varkappa^{-1}(T^{**}\phi_E)) \rangle \qquad \varkappa \text{の定義} \\
&= \langle \varkappa^{-1}(T^{**}\phi_E), x^* \rangle \\
&= \langle \mu(E), x^* \rangle = x^*\mu(E)
\end{aligned}
$$

よって.
$$x^*\mu = \lambda_{x^*} \tag{2}$$

ここで $\lambda_{x^*} \in rca(S)$ なので $x^*\mu \in rca(S)$. これは任意の $x^* \in X^*$ に対して成り立つので. 定理2.3により. μ はノルムに関して可算加法的 (i.e. ベクトル測度) であり. (1), (2) より. (a) と (d) を満たす.

(b): 各 $f \in C(S)$ は有界かつ $\beta(S)$-可測なので. 命題5.5(3)により. f は μ-可積分で. (b) の等式の右辺の積分は存在する. さらに. $\forall x^* \in X^*$. $\forall f \in C(S)$ に対して.

$$
\begin{aligned}
x^*(Tf) = \langle Tf, x^* \rangle = \langle f, T^*x^* \rangle &\underset{(d)}{=} \langle f, x^*\mu \rangle \\
&= \int_S f\, dx^*\mu = x^*\left(\int_S f\, d\mu\right)
\end{aligned}
$$

となる. 上式は. 任意の $x^* \in X^*$ に対して成り立つので

$$Tf = \int_S f\, d\mu$$

となる. よって (b) が成り立つ.

(c): $\|T\| = \sup_{\|f\|_\infty \le 1} \|Tf\| = \sup_{\|f\|_\infty \le 1} \sup_{\|x^*\| \le 1} |x^*(Tf)| = \sup_{\|x^*\| \le 1} \sup_{\|f\|_\infty \le 1} \left| \int_S f \, dx^*\mu \right|$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ C(S)^* = rca(S) \\ \text{等距離同型}}}{=} \sup_{\|x^*\| \le 1} |x^*\mu|(S) = \|\mu\|(S)$$

(第3段) 逆の証明: $\mu : \mathcal{B}(S) \to X$ は (a) を満たすベクトル測度とする.

このとき (b) で定義される作用素 $T : C(S) \to X$ が有界線形となることは命題5.5(3)

より明らか. よって, T が弱コンパクトで (c) & (d) を満たすことを示す.

(c): (第2段) の (c) の証明と全く同じ.

(d): $x^* \in X^*$ を固定: 各 $f \in C(S)$ に対して

$$\langle f, T^*x^* \rangle = \langle Tf, x^* \rangle = \int_S f \, dx^*\mu = \langle f, x^*\mu \rangle$$

よって. $T^*x^* = x^*\mu$ となる. ゆえに (d) が成り立つ.

Tが弱コンパクトであること: B_{X^*} を X^* の閉単位球とする.

(d)より. $T^*x^* = x^*\mu$ for $^\forall x^* \in X^*$ なので

$$T^*(B_{X^*}) = \{x^*\mu : \|x^*\| \le 1\} \subset rca(S)$$

となる. 系3.7 より. $\{x^*\mu : \|x^*\| \le 1\}$ は $rca(S)$ の相対弱(点列)コンパクト集合

となるので. $T^* : X^* \to C(S)^*$ は弱コンパクトとなる. ゆえに 復習7.2 (iii) より

$T: C(S) \to X$ は弱コンパクトとなる．

一意性は(a)より明らか．以上ですべての証明が完了した $\square$

(7.4) 定義．前定理のベクトル測度 μ のことを．Tを表現するベクトル測度という

(7.5) 定理　$T: C(S) \to X$ は有界線形作用素とする．このとき．次の2つの条件は同値：

(1) T は compact

(2) T を表現するベクトル測度 μ の値域は X の相対コンパクト集合．

(証明) (1)⇒(2)：T を compact とする．T は weakly compact でもあるので $T^{**}C(S)^{**} \subset \varkappa(X)$ で，定理7.3の証明の第1段より

$$\mu(E) = \varkappa^{-1}(T^{**}\phi_E), \quad E \in \mathcal{B}(S)$$

で与えられる．ここで $\{\phi_E : E \in \mathcal{B}(S)\}$ は $C(S)^{**}$ の有界集合である．

$\because$) $|\phi_E(\lambda)| = |\lambda(E)| \leq |\lambda|(S)$ for all $\lambda \in C(S)^* = rca(S)$

$\therefore \|\phi_E\| \leq 1 \quad \therefore \{\phi_E : E \in \mathcal{B}(S)\}$ は有界集合 ※

T は compact なので復習7.2 (iv)より，$T^{**}: C(S)^{**} \to X^{**}$ も compact である．

ゆえに μ の値域

$$\{\mu(E) : E \in \mathcal{B}(S)\} = \varkappa^{-1}(\{T^{**}\phi_E : E \in \mathcal{B}(S)\})$$

有界集合 $\{\phi_E : E \in \mathcal{B}(S)\}$ の T^{**} による像なので $\varkappa(X)$ の相対部分集合

は X の相対コンパクト集合となる．

(2) ⇒ (1)：

(第1段) 集合 $K \equiv \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(E_k) : n \in \mathbb{N},\ |\alpha_k| \leq 1\ (k=1,2,\cdots,n) \atop \{E_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathcal{B}(S) \text{ は互いに素} \right\}$

は X の全有界集合となることを示せば十分である。

∵) B を $C(S)$ の閉単位球とし、

$$B_0 \equiv \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_k} : n \in \mathbb{N},\ |\alpha_k| \leq 1\ (k=1,2,\cdots,n) \atop \{E_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathcal{B}(S) \text{ は互いに素} \right\}$$

と置くと、$\overline{B_0} \supset B$

∵) $\forall \varepsilon > 0$, $\forall f \in B$ をとり固定：このとき、$\|f\|_\infty \leq 1$ で f は $\mathcal{B}(S)$-可測なので

$\mathcal{B}(S)$-可測単関数 $f_\varepsilon = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_k}$ が存在して $\|f - f_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon$ とできる。

ここで $f_\varepsilon \in B_0$ である。ゆえに $f \in \overline{B_0}$ となり、$\overline{B_0} \supset B$ が示された #

よって μ を T を表現するベクトル測度とし、$\hat{T}f = \int_S f d\mu$、f は S 上の有界Borel可測関数とすると、

$\hat{T}$ は有界線形作用素で $\hat{T}f = Tf$ for all $f \in C(S)$ となる。よって $T(B) \subset \hat{T}(\overline{B_0}) \subset \overline{\hat{T}(B_0)}$。

ここで $\hat{T}(B_0) = K$ なので $T(B) \subset \overline{K}$ となる。よって K が全有界となることが示されれば

$\overline{K}$ は compact。それゆえ $T(B)$ は X の相対コンパクト集合となり、作用素 T の

コンパクト性が成り立つ。

(第2段) K の全有界性の証明：

$M \equiv \|\mu\|(S) < \infty$ とおく。$\forall \varepsilon > 0$ を固定：閉区間 $[-1, 1]$ を幅 $\frac{\varepsilon}{2M}$ よりも小さく

そのような分割を $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p$ とすると.

$\beta_1\ \beta_2\ \cdots\cdots\ \beta_p$; -1, 0, 1

$\forall |\alpha| \leqq 1$ に対して, $\exists \beta_k = \beta(\alpha)$; $\displaystyle |\beta(\alpha) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2M}$

とできる. また. μ の値域 $\{\mu(E) : E \in \mathcal{B}(S)\}$ の相対コンパクト性 (= 全有界性) により

$\exists \{F_1, \cdots, F_q\} \subset \mathcal{B}(S)$;

$\forall E \in \mathcal{B}(S)$ に対して, $\exists F_j = F(E)$; $\displaystyle \|\mu(F(E)) - \mu(E)\| < \frac{\varepsilon}{2p}$

とできる. ここで

$$D \equiv \left\{ \sum_{k=1}^{p} \beta_k \mu(F_{j_k}) : 1 \leqq j_k \leqq q \right\}$$

とおくと. D は有限集合である. このとき. 半変動の性質 (命題1.10 (ii)) より

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(E_k) - \sum_{k=1}^{n} \beta(\alpha_k) \mu(E_k) \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \beta(\alpha_k)) \mu(E_k) \right\|$$

$$= \frac{\varepsilon}{2M} \left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{2M}{\varepsilon} (\alpha_k - \beta(\alpha_k)) \mu(E_k) \right\|$$

$$\leqq \frac{\varepsilon}{2M} \|\mu\| \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k \right)$$

$\because$) $\displaystyle \left| \frac{2M}{\varepsilon} (\alpha_k - \beta(\alpha_k)) \right| \leqq \frac{2M}{\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = 1 \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$ #

$$\leqq \frac{\varepsilon}{2M} \cdot \|\mu\|(S) = \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M = \frac{\varepsilon}{2}$$

一方. $\displaystyle \sum_{k=1}^{n} \beta(\alpha_k) \mu(E_k)$ は $\displaystyle \sum_{k=1}^{p} \beta_k \mu(E'_k)$ ($\{E'_k\}$ は互いに素) と表せるので

$$\left\| \sum_{k=1}^{p} \beta_k \mu(E'_k) - \sum_{k=1}^{p} \beta_k \mu(F(E'_k)) \right\|$$

$$= \left\| \sum_{k=1}^{p} \beta_k \{ \mu(E'_k) - \mu(F(E'_k)) \} \right\|$$

例えば

$\beta(\alpha_1) = \beta(\alpha_2) = \beta_3$, $\beta(\alpha_3) = \beta_1$ ならば

$$\sum_{k=1}^{3} \beta(\alpha_k) \mu(E_k) = \beta_3 \mu(E_1) + \beta_3 \mu(E_2) + \beta_1 \mu(E_3)$$

$$= \beta_1 \mu(E_3) + \beta_2 \mu(\phi) + \beta_3 \mu(E_1 \cup E_2) + \beta_4 \mu(\phi) + \cdots + \beta_p \mu(\phi)$$

$$= \beta_1 \mu(E'_1) + \beta_2 \mu(E'_2) + \beta_3 \mu(E'_3) + \beta_4 \mu(E'_4) + \cdots + \beta_p \mu(E'_p)$$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \beta(\alpha_k) \mu(E_k) - \sum_{k=1}^{p} \beta_k \mu(F(E'_k)) \right\| =$$

$$\leq \sum_{k=1}^{p} \underset{\leq 1}{|\beta_k|} \underbrace{\|\mu(E_k') - \mu(F(E_k'))\|}_{< \frac{\varepsilon}{2p}} < p \cdot \frac{\varepsilon}{2p} = \frac{\varepsilon}{2}$$

以上より

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(E_k) - \sum_{k=1}^{p} \beta_k \mu(F(E_k')) \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となる。ここで $\sum_{k=1}^{p} \beta_k \mu(F(E_k')) \in D$ なので、上式より、D は K の ε-net となる。

ゆえに K は全有界となる。

以上より、定理7.5の証明が完了した □

(7.6) 定理 (Grothendieck and Bartle-Dunford-Schwartz) $T : C(S) \to X$ は弱コンパクト作用素とする。$\{f_n\} \subset C(S)$ を弱位相 $\sigma(C(S), C(S)^*)$ に関する Cauchy 列とすると、$\{Tf_n\}$ は X のノルム収束列となる。それゆえ、T は $C(S)$ の弱コンパクト集合を X のコンパクト集合に移す。

(証明) T を表現するベクトル測度を $\mu : \mathcal{B}(S) \to X$ とする, i.e.

$$Tf = \int_S f \, d\mu, \quad f \in C(S)$$

$\{f_n\} \subset C(S)$ は弱 Cauchy 列とする。このとき、次の①、②が成り立つ。

① $\sup_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty < \infty$

② $\exists f_0 : \mathcal{B}(S)$-可測関数; $f_n(s) \to f_0(s)$ for all $s \in S$.

∵) ①について: $\{f_n\}$ は弱Cauchy列なので、弱位相 $\sigma(C(S), C(S)^*)$ に関して

有界となる。よって、一様有界性定理より、$\sup_{n\geq 1}\|f_n\|_\infty < \infty$.

②について: 各 $s \in S$ に対して、Dirac測度 $\delta_s \in rca(S) = C(S)^*$. よって、仮定より

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 ; m, n \geq n_0$ ならば

$$|f_n(s) - f_m(s)| = \left|\int_S f_n d\delta_s - \int_S f_m d\delta_s\right| < \varepsilon$$

ゆえに、各 $s \in S$ に対して $\{f_n(s)\}$ は実数のCauchy列。よって、極限関数 f_0 が存在して、

$$f_n(s) \to f_0(s) \text{ for all } s \in S$$

となる。ここで各 f_n は $\mathcal{B}(S)$-可測なので、f_0 も $\mathcal{B}(S)$-可測となる ∦

ゆえに、Dominated convergence theorem (定理5.8) より、

$$T(f_n) = \int_S f_n d\mu \to \int_S f_0 d\mu \in X$$

よって、$\{T(f_n)\}$ は、X のノルム収束列となる。

後半の主張の証明: $M \subset C(S)$ を弱コンパクト集合とする。$T(M)$ の中から

任意に点列 $\{T(f_n)\}$ をとる。Eberlein–Šmulian の定理より、M は弱点列コンパクト

なので、$\{f_n\} \subset M$ は M の要素 f_0 に弱収束する部分列 $\{f_{n_k}\}$ をもつ。よって、

定理7.6の証明と同様にして、$T(f_{n_k}) \to T(f_0)$ (X のノルムで) が示せる。

ゆえに、$\{T(f_n)\}$ は、$T(M)$ の要素にノルム収束する部分列 $\{T(f_{n_k})\}$ をもつので、

$T(M)$ は、X のコンパクト集合となる □

最後に、有界線形作用素 $T: C(S) \to X$ が核型となるための条件を紹介して
この講義を終えることとする。

<u>(7.7) 定義</u> $T: X \to Y$ は有界線形作用素とする。

T が<u>核型</u>(nuclear) $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists \{x_n^*\} \subset X^*$, $\exists \{y_n\} \subset Y$ with $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^*\| \cdot \|y_n\| < \infty$;

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)\, y_n, \quad x \in X \qquad (*)$$

さらに、T の<u>核型ノルム</u>を、次のように定義する

$$\|T\|_{nuc} \equiv \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^*\| \cdot \|y_n\| \right\},$$

ただし inf は、T を $(*)$ のように表す $\{x_n^*\}$, $\{y_n\}$ を動かしたときの下限である。

<u>(7.8) 定理</u> $T: C(S) \to X$ を有界線形作用素とする。このとき、次の2つの条件は同値:

(1) T は核型.

(2) T を表現するベクトル測度 μ は、有界変動で、全変動 $|\mu|$ に関する Radon-Nikodym 微分 $g = d\mu/d|\mu|$ は Bochner 可積分となる。

このとき、

$$\|T\|_{nuc} = |\mu|(S) = \int_S |g|\, d|\mu|$$