令和２年度　中学校教育研究会

数 学 科 学 習 指 導 案

助　言　者　　信　州　大　学　教　授　　茅野　公穂　先生
日　　　時　　令和２年 12 月 18 日（金）
授業学級　　３年Ｄ組（40 名）
授業会場　　３年Ａ組教室
小単元名　　「拡げて発見！？図形の性質」
授　業　者　　秋山　拓也

信州大学教育学部附属長野中学校　数学科
研究者　秋山　拓也　　宮本　常徳　　中村　俊介
岡村　直斗　　中村　　満

１　本質に迫る生徒の姿

数学的に考える生徒

２　テーマ

統合的・発展的に考察する力を高める指導の在り方

３　テーマ設定の理由

「拡げて考えよう！角の秘密」（令和元年 10 月・２年）では、図形の角の性質を明らかにする学習を構想した。そこでは、直線を増やしたり、頂点を動かしたりするなど、条件を変えた図形の角の性質を予想する活動を位置付けた。その中でＮ生は、測定を行ったり、動的数学ソフトで図形を動かしたりしながら、平行線と角の性質や三角形の角の性質を見いだしたり、論証を通して見いだした性質を明らかにしたりすることができた。さらに、凸型四角形の一つの頂点を動かすことによって派生してできた図形の角の和が 360°になるのかを調べた際には、「リボン形」だけ四つの角の和が 360°にならないことに違和感を覚え、「同じ図形から派生しているのだから、同じ性質になるはずだ。」と考えた。このように、頂点を動かしても基となる図形が同じであれば、同じ性質が存在するのではないかと考えたＮ生の姿を、本校数学科は、統合的な視点で発展的に考え始めた姿であると捉えた。このことから、図形の角の性質を明らかにする学習において、図形の構成要素の条件を拡張しながら図形の性質を予想する活動を位置付けることは、統合的・発展的に考察する力を高めることに有効であることが見えてきた。

また、「リボン形」の四つの角の和が 360゜になるかどうかを調べる活動において、教師が、凸型四角形の一つの頂点を動かすことから派生してできる「くさび形」、「スリッパ形」、「リボン形」に共通する一つの角に着目するように促すと、Ｎ生はそれぞれの図形の角の大きさを見比べた。その中で、「スリッパ形」では、角の大きさが正の数から０になることに気付き、「スリッパ形」からの変形である「リボン形」の一つの角の大きさを負の数と捉えればよいのではないかと類推することができた。そして「リボン形」の着目した角を負の大きさの角とみたＮ生は、全ての図形の四つの角の和は 360゜になると図形の性質を統合することができた。このＮ生の姿から、派生してできる図形の変化の様子を整理する活動を位置付けることで、統合的・発展的に考察する力をさらに高めることができるのではないかと考えた。

そこで、「拡げて発見！？図形の性質」において、図形と線分の比についての性質を明らかにする学習を構想する。そこでは、中点連結定理の仮定を変えた図形がもつ性質を予想する活動を位置付ける。そして、動的に変化する図形の構成要素の関係に着目して、図形と証明を見比べる活動を位置付ける。このような学習によって統合的・発展的に考察する力を高めることで、数学的に考える生徒の姿の具現に迫ることができるのではないかと考え、本テーマを設定した。

４　小単元名・学年　「拡げて発見！？図形の性質」（平行線と線分の比）・３年

５　小単元の目標　※【　】内は、学習指導要領との関連を指している

（1）知識及び技能

※本小単元を含む単元「図形と相似」の学習を通して総括的に扱うため、本小単元では設定しない。

（2）思考力、判断力、表現力等　【Ｂ（1）イ】

平行線と線分の比についての性質を見いだし、それらを確かめたり、性質を具体的な

場面で活用したりすることができる。

(3) 学びに向かう力、人間性等

平行線と線分の比の性質のよさを実感して粘り強く考え、学んだことを学習に生かそうとしたり、平行線と線分の比の性質を活用した問題解決の過程を振り返って評価・改善しようとしたりする。

6　小単元の評価規準

思考・判断・表現	主体的に学習に取り組む態度
思①平行線と線分の比についての性質を見いだし、それらを確かめている。【Ｂ(1)イ】 ②平行線と線分の比についての性質を具体的な場面で活用している。【Ｂ(1)イ　本時】	態①平行線と線分の比の性質のよさを実感して粘り強く考え、学んだことを学習に生かそうとしている。 ②平行線と線分の比の性質を活用した問題解決の過程を振り返って評価・改善しようとしている。

※新学習指導要領の全面実施を見据え、本指導案では新しい三観点に基づいて示しているが、実際に記録に残す評価については、現行の四観点で行う。

7　「統合的・発展的に考察する力」を高めるための手だて

・図形と線分の比についての性質を明らかにする学習において、中点連結定理の仮定を変えた図形がもつ性質を予想する活動を位置付ける。(単元)

・予想した命題が正しいことを明らかにする学習において、動的に変化する図形の構成要素の関係に着目して、図形と証明を見比べる活動を位置付ける。(本時)

8　教材化

(1)　「Ｂ図形」において「統合的・発展的に考察する力」を高めるための３年間の構想

数学的に考える生徒

統合的・発展的に考察する力の高まり

３学年：図形の構成要素の関係に着目し、図形の概念や性質、関係を統合的・発展的に考察する力

拡げて発見！？ 図形の性質 ｜ 図形と線分の比についての性質を明らかにする学習 ← 中点連結定理の仮定を変えた図形がもつ性質を予想する活動を位置付ける。

【生徒の実態】
○統合的・発展的な視点で事象を捉え、解決の見通しをもつことができる。
●解決の過程に視点をあてた振り返りが十分でない。

２学年：図形の構成要素や構成の仕方に着目し、図形の概念や性質、関係を統合的・発展的に捉える力

拡げて考えよう！ 角の秘密 ｜ 多角形の角についての性質を明らかにする学習 ← 条件を変えた図形の角の性質を予想する活動を位置付ける。

１学年：図形の構成要素や構成の仕方に着目し、図形の性質や関係を直観的に捉え統合的に考察する力

つなげて考えよう！ 基本の作図 ｜ 作図の仕方を利用して、ある大きさの角を作図する学習 ← それぞれの作図方法を比較する活動を位置付ける。

図１　「Ｂ図形」において「統合的・発展的に考察する力」を高めるための３年間の構想図

※上記の図は、以下のような構成となっている。

学年：【テーマを具現するために至りたい各学年の段階】

【小単元名】 ｜ 【学習】 ← 【手だて】

(2)　小単元に寄せた教材化

① 図形と線分の比についての性質を明らかにする小単元の構想

本研究の中心となる小単元「平行線と線分の比」は、平行線と線分の比における性質を操作や観察を通して予想し、その予想を平行線と角の性質や相似な三角形の性質を基にした証明を用いて明らかにしていく学習である。ここでは、三角形の辺を等しい比で分けた点の場合、平行な線分がある場合、辺の中点同士を結ぶ場合などを、個別具体に分けて扱うのではなく、図形同士のつながりや拡張を意識した学習にすることが大切であると考える。そこで本校数学科では、「拡げて発見！？図形の性質」において、まず三角形の各辺の中点同士を結ぶという特別な場合（図２）から中点連結定理を明らかにする。そして中点連結定理の仮定を変えた図形がもつ性質を予想し、追究していく展開を構想する。そうすることで、平行線と線分の比の関係について理解するだけでなく、図形の条件を変えて発展的に考察しながら、図形がもつ性質や構成要素の関係などを統合的に考察することができると考える。

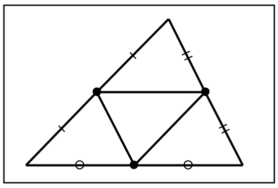


図２　各辺の中点同士を結んだ図の例

② 図形と線分の比についての性質を明らかにする学習において、中点連結定理の仮定を変えた図形がもつ性質を予想する活動を位置付ける

導入段階では、動的数学ソフト「GeoGebra」を用いて、三角形の各辺の中点同士を結んだ図形をつくり、いつでも成り立ちそうなことを予想する場面を設ける。生徒は、図形を自由に操作できる「GeoGebra」を活用して図形を観察し、予想を挙げるだろう（図３）。そして生徒は、２年次の学習経験を基に、その予想が正しいかどうかを証明を用いて調べていき、中点連結定理「△ABC の２辺 AB、AC の中点を、それぞれ P、Q とすると、PQ と BC は平行であり、PQ の長さは BC の長さの半分である。」を理解していくだろう。ここで教師は、さらにいえそうなことに視点をあてて考えるように促す。生徒は、中点を１：２の比に分ける点にしたらどうか、三角形を四角形にしたら何が成り立つのだろうかなど、これまでの図形の学習経験を基に、中点連結定理の仮定を変えて、発展的に考えるだろう。そこで教師は、仮定を変えた図形で成り立ちそうなことを「GeoGebra」を用いて予想する場面を設ける。生徒は、１：２に分けた点を結んだ線分も平行になる、四角形の中点同士を結んでできた四角形が平行四辺形になる（図４）など、図形を操作したり観察したりしながら、性質を予想していくだろう。また四角形の頂点を動かしていく中で、「くさび形」や「スリッパ形」、「リボン形」などができることに気付き、それらの図形でも同じことが成り立つのではないかと予想するだろう。そこで教師は、単元の学習問題「中点連結定理の仮定を変えた図形には、どのような性質があるのだろうか。」を設定する。

・中点同士を結んだ線分は、三角形の辺と平行になる。
・中点同士を結んだ線分の長さは、辺の長さの半分になる。
・中点同士を結んだ三角形は、外側の三角形と相似になる。

図３　生徒が挙げる予想の例

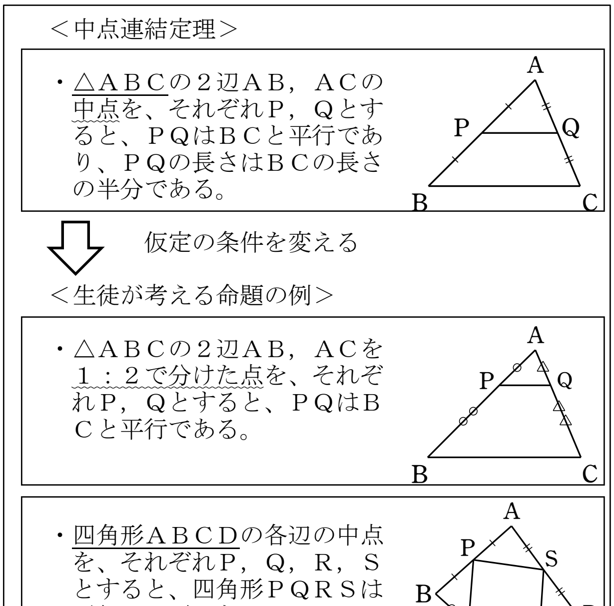


図４　中点を結んだ三角形から条件を変えた図形の例

展開段階の前半において生徒は、これまでに挙げた予想から、辺の長さをどのように分けると平行になるのかについて調べる。生徒は、三角形の辺を同じ比で分けたときに平行になるという命題を見いだし、三角形の相似を用いて命題が正しいことや、その命題の逆も正しいことを明らかにしながら、「平行線と線分の比」や「線分の比と平行線」の性質としてまとめていくだろう。

展開段階の後半において生徒は、四角形の中点を結んでできた四角形が平行四辺形になるという命題が正しいかを調べる。教師はまず、凸型四角形について予想が正しいかどうかを調べるように促す。生徒は、三角形のときの追究を基に、中点連結定理を用いれば証明できるのではないかと見通しをもって追究すると考える。本時はさらに「くさび形」や「スリッパ形」、「リボン形」でも同じことが成り立つのかを調べる。

このように、中点連結定理の仮定を変えた図形がもつ性質を予想する活動を繰り返し位置付けていく。そうすることで、小単元を振り返ったときに、中点連結定理という特別な場合の性質から、平行線と線分の比についての性質という、より一般的な場合の性質へと、つながりをもって図形の性質を捉えられると考える。そして、このような生徒の姿を、統合的・発展的に考察している姿であると考える。

(3)　**本時に寄せた教材化**

予想した命題が正しいことを明らかにする学習において、動的に変化する図形の構成要素の関係に着目して、図形と証明を見比べる活動を位置付ける

教師は、前時に証明した「凸型四角形で、各辺の中点同士を結んだ四角形は、平行四辺形になる。」の振り返りで生徒が記入した「『くさび形』、『スリッパ形』、『リボン形』でも同じことが成り立つのか。」という疑問を取り上げる。生徒は、前時の追究を基に、中点連結定理を用いれば証明ができるのではないかと見通しをもつだろう。そこで教師は、学習課題「中点連結定理を基に、証明ができるか確かめよう。」を据え、まず「くさび形」から追究することを確認する。

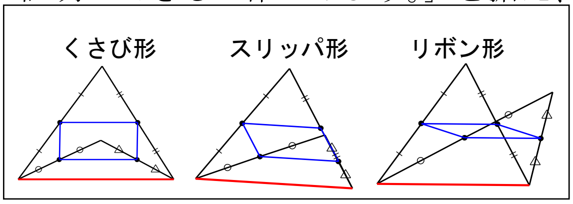
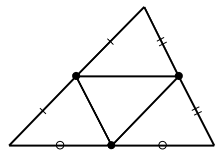
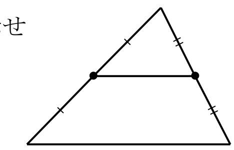
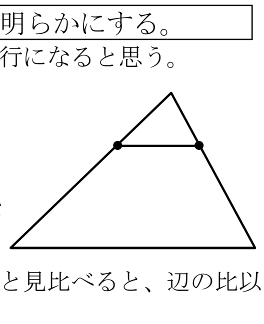


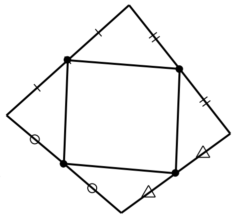
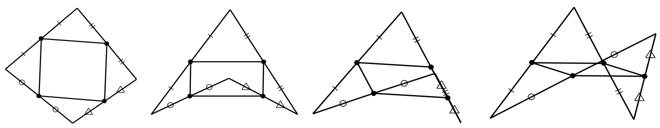
図５　対角線となる補助線（赤線）をかき入れた図

追究の過程で生徒は、中点連結定理を用いるために、対角線となる補助線を図にかき入れるだろう（図５赤線）。前時の証明にも中点連結定理を用いているため、その証明を参考にする生徒がいると考える。そして、「くさび形」の証明が前時の証明と同じ記述であることに気付く生徒がいるだろう。教師は、そのような気付きを全体に広げ、自分の証明でも記述が同じなのかを確かめるように促す。証明が同じことを確かめた生徒たちは、「スリッパ形」や「リボン形」でも同じ証明になるのではないかと調べ、なぜ証明が同じ記述になるのか疑問を感じるだろう。そこで教師は、それぞれの図形と証明を見比べるように促す。生徒は、どの図形においても、中点連結定理を用いるための対角線が変わらないことや、証明に用いる三角形が常に同じであることなどを見いだしていくだろう。そして、「三角形」という条件を「四角形」に変えた一連の追究を振り返ることで生徒は、証明を基にこれらの図形を捉え直し、形が異なる四つの図形であっても、同じ対角線を一辺とする二つの三角形を組み合わせた図形とみることができるため、同じ性質が成り立つと統合的に考察していくだろう。

以上のように、図形と線分の比についての性質を明らかにする学習において、中点連結定理の仮定を変えた図形がもつ性質を予想する活動を位置付けたり、動的に変化する図形の構成要素の関係に着目して、図形と証明を見比べる活動を位置付けたりすることで、生徒は「統合的・発展的に考察する力」を高めることができると考える。

9　小単元展開　図形と線分の比についての性質を明らかにする学習 全９時間 本時は第８時

段階	◆学習 教師の指導・支援	予想される生徒の反応	評価の観点	時間
導入	◆中点連結定理を明らかにする。		思①〈観察・ワークシート〉 態①〈観察・ワークシート〉	4
	・動的数学ソフト（GeoGebra）を用いて、三角形の各辺の中点同士を結び、三角形の頂点を自由に動かす場を設ける。 ・自由に動かした図形からいつでも成り立ちそうなことなどをまとめる場を設ける。	ア　三角形の頂点を動かすと、それに合わせて中点同士を結んだ線分も動いていく。 イ　中点同士を結んだ線分は必ず三角形の辺と平行になっていると思う。長さは必ず平行な三角形の辺の長さの半分になっている。 ウ　中点同士を結んでできた三角形や、その外側にある三角形は、元の三角形と相似になっていると思う。 		
	・**学習問題「予想した命題はいつでも成り立つのだろうか。」**を設定する。	エ　いつでも成り立つことを示すためには証明、いつでも成り立つとは限らないことを示すためには反例を示せばよい。 オ　二つの三角形の相似を証明することで、予想が正しいことを示すことができた。 		
	・**学習問題「中点連結定理の逆はいつでも成り立つだろうか。」**を設定する。 ・中点連結定理についてまとめ、それを基にどのようなことが成り立ちそうか振り返るように促す。	カ　逆もいつでも成り立つと思う。証明を使って示せばよい。 キ　平行線と角の性質を用いて二つの三角形の相似を証明したことで、逆もいつでも成り立つことを示すことができた。 ク　三角形の中点を結ぶだけで、いろいろな性質が分かるなんて驚いた。これからの証明の幅が広がると思った。 ケ　証明することで、性質が明らかになるので、証明は大事だと思った。 コ　三角形ではなくて四角形の中点を結んだらどのような性質があるのか疑問に思った。中点ではなくて、他の比の点を結んだらどのようなことが成り立つのかも知りたい。		
	・前時のコのような反応から**学習問題「中点連結定理の仮定を変えると、どのようなことが成り立つだろうか。」**を設定し、スのような見通しを基に追究を進めることを確認する。 ・セやソのような反応から**小単元の学習問題「中点連結定理の仮定を変えた図形には、どのような性質があるのだろうか。」**を設定する。	サ　仮定の「三角形」を「四角形」に変えると、同じことが成り立つのかな。 シ　中点は辺を１：１に分ける点だから、仮定の「中点」を「１：２に分ける点」にしたらどうかな。 ス　実際に仮定を変えた図形をつくって動かしてみれば成り立ちそうなことが分かるかもしれない。 セ　四角形の中点同士を結ぶと、内側にできる四角形が平行四辺形になりそうだ。頂点を動かすと、「くさび形」や「スリッパ形」や「リボン形」ができた。このときも内側にできる四角形は平行四辺形になりそうだ。 ソ　「１：２に分ける点」を結んでも、底辺と平行になりそう。長さにも何か関係があるかもしれない。「１：３に分ける点」などにしても同じことが成り立つのか知りたい。		
	◆「中点」を「$a : b$ に分ける点」に変え、平行線と線分の比について明らかにする。		思①〈観察・ワークシート〉	2
	・前時のソのような反応から、**学習問題「辺をどのように分けると底辺と平行になるのだろうか。」**を設定する。 ・証明を確認し、線分の比と平行線の性質をまとめるよう促す。	タ　辺を同じ比になるように分けると、平行になると思う。 チ　二つの三角形が相似であることを証明できれば示すことができそうだ。 ツ　二つの三角形が相似であることを証明できたから、比が等しいときに平行になることが分かった。  テ　中点連結定理の平行であることの証明と見比べると、辺の比以外の部分は全く同じだ。 ト　中点連結定理のときも、逆がいつでも成り立つか調べたから、今回も逆を調べる必要があるのではないか。		

	・前時のトのような反応から、**学習問題「前時明らかにしたことの逆はいつでも成り立つのだろうか。」**を設定する。	ナ　逆も、平行線と角の性質を使えば証明できそうだ。 ニ　平行線と角の性質を用いて二つの三角形の相似が証明できたから、逆もいつでも成り立つことを示すことができた。 ヌ　「中点」を「$a:b$ に分ける点」に変えたら、どのような性質が成り立つかが分かった。「三角形」を「四角形」に変えたときにはどのような性質が成り立つか、自分たちが予想したことを調べてみたい。			
展	◆「三角形」を「四角形」に変え、予想した命題が正しいことを明らかにする。				
	・前時のヌのような反応から、**学習問題「凸型四角形の各辺の中点を結んだ図形は、いつでも平行四辺形になるのだろうか。」**を設定する。 ・追究を振り返り、さらにいえそうなことに視点をあてて考えるように促す。	ネ　頂点をどのように動かしても平行四辺形に見えた。中点を結んでいるから、中点連結定理を使えば証明できるのではないか。 ノ　補助線として凸型四角形の対角線をかけば、中点連結定理が使える形になる。 ハ　向かい合う辺が、対角線と平行で長さも半分であるので、平行四辺形になる条件を満たしているから、いつでも平行四辺形になることが証明できた。  ヒ　「くさび形」や「スリッパ形」や「リボン形」でも平行四辺形になることを証明できるだろうか。			
開	・前時のヒのような反応から、**学習問題『「くさび形」でも、中点を結んでできた四角形はいつでも平行四辺形になるのだろうか。』**を設定し、フのような反応から**学習課題「中点連結定理を基に、証明ができるか調べよう。」**を据える。	フ　凸型四角形のときのように、中点連結定理を使えば証明できると思う。  凸型四角形　くさび形　スリッパ形　リボン形 ヘ　凸型四角形の証明のときのように、補助線として対角線をかけば、中点連結定理が使える形になる。	5分	思②〈観察・ワークシート〉	2（本時は第2時　太枠部分）
	・個人追究や全体追究をする場を設ける。	ホ　凸型四角形のときの証明とまったく同じ記述になっている。「スリッパ形」や「リボン形」でも同じかもしれない。 マ　本当だ。どの図形でも同じ記述で証明できる。どうしてだろう。	25分		
	・ホやマのような生徒の発言から、動的に変化する図形と証明を見比べる場を設ける。	ミ　証明するときに用いている三角形が、どの図形でも同じになっているから証明の記述が同じになる。 ム　証明を見返すと、どの図形も同じ対角線を共有している二つの三角形を組み合わせた図形とみることができるので、四角形の辺が必ず平行で長さも等しくなる。	10分		
	・追究を振り返り、まとめるよう促す。	メ　形が違っていても、基になっている凸型四角形の頂点を動かしてできた図形だから、もっている性質は同じで、それを示すための証明の記述も同じになる。	10分		
終末	◆小単元で追究した図形の性質をまとめ、自分の取り組みと学んだことを明らかにする。				
	・小単元の学習を振り返る場を設ける。 ・明らかにしてきた性質について感じたことや、明らかにしてきた過程について大事だと思ったことなどをまとめるよう促す。	モ　図形が変わったときに、今まで成り立っていたことが今回も成り立つのかと考えていくことが大事だと思った。また、証明するときに、基となる証明が参考になることが分かった。 ヤ　図形と証明を見比べると、異なる形の中に共通する部分があることが分かり、図形の特徴がより見やすくなった。 ユ　中点を結ぶという特別な場合から、辺の比が等しい点を結ぶ場合に変わったり、三角形から四角形に変わったり、四角形でも形が変わったりして、いろいろな図形がつながりをもちながら変わっていった。そこに共通して成り立つことがあった。中点連結定理を基に、性質が拡がっていくように感じた。		態②〈観察・ワークシート〉	1