

小標本の場合の連の数による検定について

荒瀬輝夫¹, 内田泰三², 古野正章²

¹信州大学農学部, ²九州産業大学建築都市工学部

On the Number of Runs Test for Small Sample Size

Teruo Arase, Taizo Uchida & Masaaki Furuno

¹Faculty of Agriculture, Shinshu University, ²Faculty of Architecture and Civil Engineering, Kyushu Sangyo University

Summary: This study aimed to investigate the number of runs test (i.e., the Wald–Wolfowitz runs test) for small sample sizes. The number of runs test is used to test the randomness of arrangements of two kinds of elements (e.g., a or b) based on the assumption of a normal distribution; as such, a large sample size is needed. The exact probability of the number of runs from small sample sizes (up to 20 of one element) was reported by Swed and Eisenhart (1943). We set the range of m (the number of a) from 2 to 10 and n (the number of b) to 50, and then calculated the number of arrangements of a and b to obtain the exact probability distribution. As a result, the number of arrangements could easily be calculated by dividing the location of I (the place where one or more number of b could enter) into two cases: in the a-line (e.g., aaIa) and outside the a-line (e.g., IaaaI). Based on the calculation, critical values for the number of runs test (exact test) were obtained. The distribution of the number of runs showed a relatively smooth bell shape within the range of $0.5m < n < 2m$, but became lopsided and bumpy beyond this range, which implied a deviation from the normal distribution. The exact test was applied to two cases of practical data with a small sample size: the presence or absence of a plant community in experimental revegetation plots, and the arrangement of flowers on the nodes of branches. In each case, the exact test was confirmed to be effective for the randomness of the arrangement although the power to detect significance was not so high. By contrast, the Wald–Wolfowitz runs test tended to underestimate the p -value (i.e., overestimate the significance) compared with the exact test when applied to the same data.

キーワード: 連の数による検定, 小標本, 正確法, 配列, ランダムさ

Key words: The number of runs test, Small sample size, Exact test, Arrangement, Randomness

1. はじめに

連 (run) とは, 同じタイプが続けて出現することであり, その区切りは全体の始点か終点, または異なるタイプが出る場合である (Upton and Cook 2010)。2 値のみからなる配列を考えると, 例えば「aabbbaabba」は「aa」「bbb」「aa」「bb」

「a」の 5 つの連で構成される。

2 値の配列の連に基づく統計的検定は, ノンパラメトリック統計の中でも歴史が古く (Mood 1940), 連の数による検定 (Wald–Wolfowitz runs test, 以下 WW 検定), 連の長さの検定 (Takashima 1955 ; 津田 1969), 配列の両端の連のみに着目す

る芳賀の検定と Kamat の検定（竹内 1975）などがある。これらのうち、WW 検定が最も知られているようである。

連の数による検定の本来の目的は、対応のない 2 つの標本が同一集団から得られたか否かの検定である（Wald and Wolfowitz 1940 ; Filler 1960 ; Siegel 1983, 斎藤 1992）。この検定では、2 つの標本の要素をそれぞれ a, b（「x, y」「1, 2」でもよい）として一緒にし、順位付けして並び替えることで、a と b の 2 値からなる配列を得る。その配列を構成する連の数を統計量として、配列がランダムであるか否かを判断する。2 つの標本が同一集団から得られた（配列がランダムである）という帰無仮説 H_0 が真のときには、a と b がよく混ざり合うことで交互に現れる配列となり、連の数が相対的に大きくなる。一方、 H_0 が真でないときには、配列の片側に a の、反対側に b の長い連ができるので、連の数が相対的に小さくなると予想される（Siegel 1983）。

連の数による検定は、配列のランダムさの検定にも適用され（Mood 1940）、現在では乱数の検定の 1 つとなっている（脇本 1970 ; Kupczynski 1977 ; 伏見 2023）。こちらは質的な名義尺度データでも適用可能で、例えば降雨と晴天のパターンへの適用例（鈴木ら 2024）がある。また、時系列の量的データにおいては、中央値より上か下か、あるいは隣り合う項どうしの差の符号（上昇か下降か）によって 2 値からなる配列ができるので（Lehman 2007）、為替相場の変動（Hashimoto *et al.* 2012）やランダムウォークの検定（Yoshioka 2009）にも適用されている。なお、データ間の系列相関の影響で、データが長い周期または短い周期で変動する場合があります（Yoshioka 2009）、連の数は前者では減り後者では増えるので、連の数が大きすぎるときも H_0 は棄却される。

2 値からなる配列の組合せと連の数については 19 世紀末から議論されていたとされ（Mood 1940）、連の数についての分布のモーメント（平均、分散）が数学的に導出されている。すなわち、a, b の数をそれぞれ m, n, 総計 $m+n$ を N とすると、連の数の分布について、

$$\text{平均} = 2mn / N + 1$$

$$\text{分散} = 2mn (mn - n) / (N^2 (N - 1))$$

となる。連の数の分布は、m, n がともに充分大きい場合に正規分布に近似できるとされ、平均と

分散から標準正規分布 $N(0, 1)$ の Z-値を求めて検定を行うのが WW 検定である（Wald and Wolfowitz 1940）。この検定の有意性の判定のための簡便な数表は、 $m \neq n$ の場合それぞれ 8~20 の範囲、 $m=n$ の場合 10~100 の範囲について示されている（統計数値表編集委員会 1977）。なお、m, n が「充分大きい」ことについて、Swed and Eisenhart (1943) は 20 以上であると示唆しているが、10 以上とする見解（印東 1957 ; Burington and May 1975）もある。

m, n のいずれかが 10 以上にならないような小標本の場合、正規分布への近似は悪くなることが予想されるが、あえて通常の連の検定（正規分布近似に基づく WW 検定）を適用するとどうなるかは不詳である。また、正確法による（正確な確率に基づく）連の検定について、有意性の判定のための簡便な数表は、m, n がそれぞれ 2~20 までの範囲にかぎり、Swed and Eisenhart (1943) により示されている。n が 20 を超える場合、連の数ごとに組合せ数を求めて、それらをもとに確率を自分で計算しなければならない。

そこで本報では、m を 10 までの小標本とし、n を 50 までの範囲に拡大して、正確法による連の数の分布を求めることとした。これによって、連の数の分布の性質を確認するとともに、有意性の判定のための数表を作成することを試みた。併せて、実際のデータに適用して、WW 検定を適用した場合と比較した。

2. 理論と方法

連の数を求める数式は組合せ数の複合で表され（Wald and Wolfowitz 1940 ; Mood 1940 ; Swed and Eisenhart 1943 ; Filler 1960 ; 竹内 1975 ; 寺本 1990 ; Lehman 2007）、表計算ソフトや桁数の多い電卓で計算可能であるが、n, m が大きくなると煩雑になることは否めない。そこで本報では、配列を場合分けして、組合せ数をより簡単に示すことにした。

2 値 a, b のうち、b の連が入りうる位置を I とする（個々の I には b が連続して何個入ってもよい）。このとき、I の位置を a の存在する範囲の内側と外側の 2 つに分け、それぞれ i 個、j 個あるとする。j = 0 の場合、I は a の存在する範囲の内側のみにあるので、配列の両端はそれぞれ a の連となる。一方、j = 1 の場合、配列の左端または右

表-1 m =5 のときの a, b の配列の組合せ数と連の数 (m : a の数, n : b の数, I : b が入る場所)

Table 1. Number of arrangements of a and b when m = 5 (m, n, and I denote the number of a, the number of b, and the place where one or more number of b can enter, respectively)

aの内側のIの数				0			1			2			3			4		
aとの組合せ数(A)				${}_m{}_iC_i$		${}_dC_0=1$	${}_dC_1=4$		${}_dC_2=6$		${}_dC_3=4$		${}_dC_4=1$					
組合せパターン				aaaaa			aaaala aaalaa aala ^{aa} alaaaa			aaalala alaaala alalaaa aalaala aalalaa alalaaa			aalalala alalalala alalalaa			alalalala		
外側のIの数				j		1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2		
外側のIの位置				片側		両側	なし	片側	両側	なし	片側	両側	なし	片側	両側			
Iの総数				i+j		1	2	1	2	3	2	3	4	3	4	5		
bの組合せ数(B)				${}_{n-1}C_{i+j-1}$		$2 \cdot {}_{n-1}C_0$	${}_{n-1}C_1$	${}_{n-1}C_0$	$2 \cdot {}_{n-1}C_1$	${}_{n-1}C_2$	${}_{n-1}C_1$	$2 \cdot {}_{n-1}C_2$	${}_{n-1}C_3$	${}_{n-1}C_2$	$2 \cdot {}_{n-1}C_3$	${}_{n-1}C_4$		
a, bの組合せ数 (A×B) 総計 n =				${}_{(m+n)}C_n$														
1				6	2	-	4	-	-	6	-	-	-	-	-	-		
2				21	2	1	4	8	-	12	12	-	4	-	-	-		
3				56	2	2	4	16	4	18	36	6	12	8	-	-		
4				126	2	3	4	24	12	24	72	24	24	32	4	-		
5				252	2	4	4	32	24	30	120	60	40	80	20	-		
6				462	2	5	4	40	40	36	180	120	60	160	60	-		
7				792	2	6	4	48	60	42	252	210	84	280	140	-		
8				1287	2	7	4	56	84	48	336	336	112	448	280	-		
9				2002	2	8	4	64	112	54	432	504	144	672	504	-		
10				3003	2	9	4	72	144	60	540	720	180	960	840	-		
11				4368	2	10	4	80	180	66	660	990	220	1320	1320	-		
12				6188	2	11	4	88	220	72	792	1320	264	1760	1980	-		
13				8568	2	12	4	96	264	78	936	1716	312	2288	2860	-		
14				11628	2	13	4	104	312	84	1092	2184	364	2912	4004	-		
15				15504	2	14	4	112	364	90	1260	2730	420	3640	5460	-		
16				20349	2	15	4	120	420	96	1440	3360	480	4480	7280	-		
17				26334	2	16	4	128	480	102	1632	4080	544	5440	9520	-		
18				33649	2	17	4	136	544	108	1836	4896	612	6528	12240	-		
19				42504	2	18	4	144	612	114	2052	5814	684	7752	15504	-		
20				53130	2	19	4	152	684	120	2280	6840	760	9120	19380	-		
21				65780	2	20	4	160	760	126	2520	7980	840	10640	23940	-		
22				80730	2	21	4	168	840	132	2772	9240	924	12320	29260	-		
23				98280	2	22	4	176	924	138	3036	10626	1012	14168	35420	-		
24				118755	2	23	4	184	1012	144	3312	12144	1104	16192	42504	-		
25				142506	2	24	4	192	1104	150	3600	13800	1200	18400	50600	-		
26				169911	2	25	4	200	1200	156	3900	15600	1300	20800	59800	-		
27				201376	2	26	4	208	1300	162	4212	17550	1404	23400	70200	-		
28				237336	2	27	4	216	1404	168	4536	19656	1512	26208	81900	-		
29				278256	2	28	4	224	1512	174	4872	21924	1624	29232	95004	-		
30				324632	2	29	4	232	1624	180	5220	24360	1740	32480	109620	-		
31				376992	2	30	4	240	1740	186	5580	26970	1860	35960	125860	-		
32				435897	2	31	4	248	1860	192	5952	29760	1984	39680	143840	-		
33				501942	2	32	4	256	1984	198	6336	32736	2112	43648	163680	-		
34				575757	2	33	4	264	2112	204	6732	35904	2244	47872	185504	-		
35				658008	2	34	4	272	2244	210	7140	39270	2380	52360	209440	-		
36				749398	2	35	4	280	2380	216	7560	42840	2520	57120	235620	-		
37				850668	2	36	4	288	2520	222	7992	46620	2664	62160	264180	-		
38				962598	2	37	4	296	2664	228	8436	50616	2812	67488	295260	-		
39				1086008	2	38	4	304	2812	234	8892	54834	2964	73112	329004	-		
40				1221759	2	39	4	312	2964	240	9360	59280	3120	79040	365560	-		
41				1370754	2	40	4	320	3120	246	9840	63960	3280	85280	405080	-		
42				1533939	2	41	4	328	3280	252	10332	68880	3444	91840	447720	-		
43				1712304	2	42	4	336	3444	258	10836	74046	3612	98728	493640	-		
44				1906884	2	43	4	344	3612	264	11352	79464	3784	105952	543004	-		
45				2118760	2	44	4	352	3784	270	11880	85140	3960	113520	595980	-		
46				2349060	2	45	4	360	3960	276	12420	91080	4140	121440	652740	-		
47				2598960	2	46	4	368	4140	282	12972	97290	4324	129720	713460	-		
48				2869685	2	47	4	376	4324	288	13536	103776	4512	138368	778320	-		
49				3162510	2	48	4	384	4512	294	14112	110544	4704	147392	847504	-		
50				3478761	2	49	4	392	4704	294	14112	110544	4704	147392	847504	-		
連の数				$2i+j+1$	2	3	3	4	5	5	6	7	7	8	9	9	10	11

端に b の連がある。j =2 の場合, 両端に b の連があり, a はその間に挟まれる。

まず, a と内側の I との組合せについて, m 個の a の内側に I が入りうる (a を区切ることができる) 箇所は m-1 箇所ある。よって, m-1 箇所から i 箇所を選ぶ問題に置き換えられ,

$$a \text{ と内側の I の組合せ数 } = {}_{m-1}C_i \quad (\text{A})$$

となる。

このとき, 配列全体で I (b の連) が入る箇所は i+j 箇所となる。これは, n 個の b を i+j-1 箇所区切ることと等しく, n-1 箇所から i+j-1 箇所

を選ぶ問題に置き換えられ, 組合せ数は ${}_{n-1}C_{i+j-1}$ となる。ただし, j=1 の場合には, a の外側に b の連が位置するパターンとして左端と右端の 2 通りがあるので, I に入る b の連の組合せ数は,

$$j=0 \text{ または } 2 \text{ のとき } {}_{n-1}C_{i+j-1} \\ j=1 \text{ のとき } 2 \cdot {}_{n-1}C_{i+j-1} \quad (\text{B})$$

となる。よって, 任意の m, n, i, j における a, b の配列の組合せ数は, A×B で求められる。なお, a, b の配列の組合せの総数 (確率を求めるときの分母) は, ${}_{m+n}C_m$ である。

このとき, a, b の配列全体における連の数は,

a の内側の i 個の I (b の連) によって $i+1$ 個の a の連ができ、その外側に j 個の b の連が存在するので、

$$\text{連の数} = i + (i+1) + j = 2i + j + 1 \quad (\text{C})$$

となる。例として、 $m = 5$ の場合の組合せ数の計算結果を表-1 に示す。組合せ数を (C) 式の連の数で整理し、組合せの総数 ${}_{m+n}C_m$ で除することで、連の数ごとに出現する確率を求められる。さらに、分布の両端からの累積確率を求めれば、有意性の判定のための p 値が得られる。

本報では、 m を 2~10、 n を 50 までの範囲として、すべての m 、 n の組合せで連の数の確率分布を求め、有意性の判定のための数表を作成した。また、実際のデータとして、緑化試験地における群落の拡大 (荒瀬ら 2024) と植物の枝の節における着花パターン (福島 2025) を取り上げ、連の数による検定 (正確法) を適用し、WW 検定 (正規分布近似) による検定結果と比較した。

3. 結果と考察

3.1 連の数による検定の有意点

小標本の場合 (正確法) における連の数による検定の有意点を、巻末の附表として掲載した。

下側 (連の数が平均よりも少ないとき) が有意になる場合について、 $m = 2$ においても有意点は存在するが、ほとんどは連の数 2 である。 $m = 2$ で連の数 2 とは、a が連続して 1 つの連 (aa) となり、かつ配列全体の左端か右端に位置している場合に限られる。連の数 3 の場合 (配列全体の途

中に aa がある場合、または a が両端にあり b がその間に連続する場合)、 n が 39 以上にならないと有意にならないので、検出力はあまり高いといえる。一方、 m が 3 以上になると、a、b がそれぞれ複数の連に区切られても、 n が大きくなれば有意と判定されることが読み取れる。

それに対し、上側 (連の数が平均よりも多いとき) が有意となるのは、限られた範囲であり、むしろ n が大きくなると有意点は消失した。上側が有意になるのは、 $m = 2$ のとき皆無、 $m = 3$ のときには 1 箇所 ($n = 4$ で連の数 7 のとき) のみである。 m が 4 以上になると、 m が大きくなるほど上側が有意になる範囲は広がるが、概ね n が m よりやや小さい値から m の 2~3 倍程度までの範囲であることがうかがえる。これには、連の数に上限があることが関係していると推測される。連の数の最大値は、 m 個の a がすべて I で区切られ、さらに両端に I がある場合で、このとき連の数は $m + (m-1) + 2 = 2m + 1$ である (平均 $2mn/N + 1$ も、 $n \rightarrow \infty$ のとき $2m + 1$ になる)。よって、b の数 n が増大しても連の数がこの上限を超えることはなく、確率分布の上側のすそ引きがないことになる。

3.2 連の数の確率分布

連の数の確率分布が実際にどのような形であるかについて、例として $m = 5$ と $m = 10$ の場合を図-1 に示した。両者に共通する傾向として、概ね n が m の 0.5~2 倍の範囲では、比較的滑らかな釣鐘型の形状をしている。しかし、 n が m より極

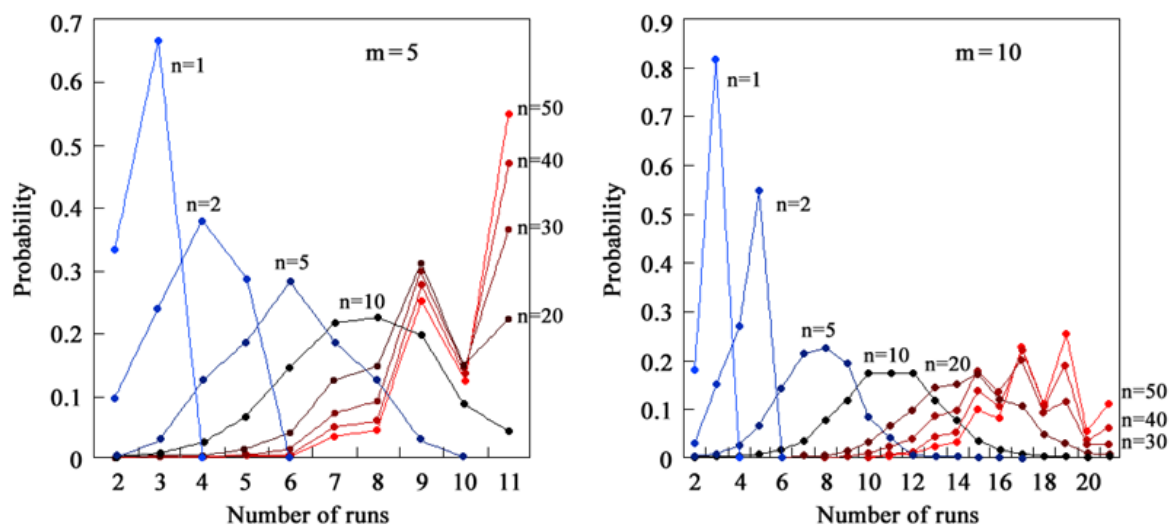


図-1 n を変化させたときの連の数の確率分布

Figure 1 Probability distribution of the number of runs at various n

端に小さいとき下側に著しく偏った分布に、 n が m の 2 倍を超えると上側に偏るだけでなく凸凹が生じることが読み取れる。

凸凹が生じる理由として、表 1 の組合せ数と連の数から、連の数が偶数になるのはある特定の i, j の組合せのみであるが、連の数が奇数になるのは複数の i, j の組合せで起こりうるということが関係していると考えられる。実際に、 $m=2\sim 4, 6\sim 9$ の場合についても同様の確率分布を求めて確認したところ、 n が概ね $2m$ を超えると、連の数が奇数のとき確率が大きく、隣り合う偶数のとき小さいという分布の凸凹が生じていた。よって、 n, m が充分大きいときに連の数が正規分布に近似できるというのは、必ずしも正確ではないようである。本報から、 n が $0.5m < n < 2m$ の範囲を超える場合、連の数の分布は正規分布からのずれが大きくなると示唆された。

3.3 実際のデータへの適用

(1) 緑化試験地における群落の拡大

信州大学農学部（長野県上伊那郡南箕輪村）の構内農場内の水辺ビオトープでは、造成時の表土の掘削で切土のり面が生じ、2005 年 6 月に陸生スゲ類の緑化試験地が設置された。周辺地域に普通に見られる陸生スゲ類から 5 種が植栽されたが（1 試験区のサイズ：幅 1.0 m×長さ 1.4 m、3 反復の乱塊法）、2009 年以降、これら 5 種は元々の植栽区から隣接する区に侵入するようになり、低木類の侵入と生長も顕著になった。その後、低木林化が進み、2023 年には 5 種のうちミヤマカンスゲ (*Carex multifolia* Ohwi var. *multifolia*) のみが優占群落を拡大し、他 4 種は試験地からほぼ消失した（荒瀬ら 2024）。

ミヤマカンスゲ優占群落の面積の年拡大速度などの解析は、荒瀬ら（2024）が報告している。ここでは、ミヤマカンスゲ優占群落の拡大を、よりシンプルに 2 値（各試験区におけるミヤマカンスゲの有無）に置き換え、連の数による検定を適用した。

図-2 に、ミヤマカンスゲ優占群落の分布（「有・無」の配列）と、連の数による検定の結果を示す。まず、正確法においては、2005 年に $p=0.363$ （連の数 7、分布の上側の確率）と有意性は認められず、乱塊法で試験区をランダムに割り付けているためこの判定は妥当といえる。その後、ミヤマカ

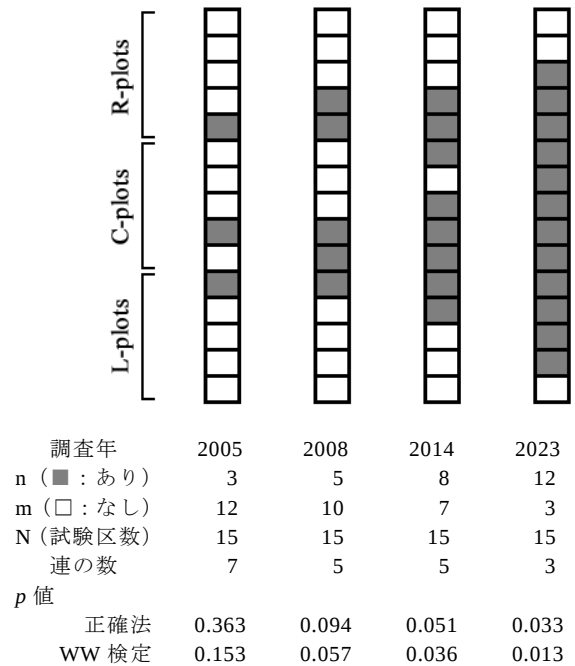


図-2 緑化試験地におけるミヤマカンスゲ優占群落の有無と、連の数による検定の適用例
各試験区のサイズは 1.0 × 1.5 m で、2005 年の■が当初のミヤマカンスゲ試験区である。

Figure 2 Arrangement of the presence or absence of a *Carex multifolia* community in experimental revegetation plots, and the application of the number of runs test. Each plot size is 1.0 m × 1.5 m, and ■ in 2005 indicates the plots where *C. multifolia* was planted.

ンスゲ群落の拡大により連がつながることで連の数が減り、 p 値（分布の下側の確率）は単調減少し、2023 年により有意と判定された ($p=0.033$)。検出力はあまり高いとはいえないものの、優占群落の拡大にともなう配列（優占群落の分布）がランダムでなくなる様子を捉えることができたと評価できる。

一方、WW 検定においては、 p 値は 2005 年の時点で $p=0.153$ と比較的小さく、2014 年には有意と判定された ($p=0.036$)。いずれの調査年においても、正確法より WW 検定において p 値が小さいという結果が得られた。

(2) マタタビの着花パターン

マタタビ (*Actinidia polygama* (Siebold et Zucc.) Planch. ex Maxim.) の正常果と虫食い果における成長過程の研究（福島 2025）では、開花から結

実の時期かけ、枝ごと採集して花と果実の植物形態学的な観察と計測が行われた。枝の節における花の着生位置も記録されており、ここでは4本の枝を例として、節における着花の有無の記録データをもとに、着花位置がランダムか否かにいて連の数による検定を適用した。

図-3に、枝の節における着花の有無の模式図と、「有・無」の配列に適用した連の数による検定の結果を示す。なお、実際には節間の長さは一定ではないが、図中では一定として示してある。1枝あたりの着花数(m)は2~5で、ある限られた範囲の節に(ランダムではなく)集中的に着花があるようにも見えるが、正確法では4つの枝とも有意性は検出されなかった。しかし、 p 値には大きな差があり、有意点に遠く及ばないもの(枝 Y-2b, $p = 0.454$)からごく近いもの(枝 Y-1b, $p = 0.054$, とともに分布の下側の確率)を評価できた。

一方、WW 検定では、枝 Y-2b のみ有意点に遠く($p = 0.306$)、他の3つの枝では有意(枝 Y-5a と枝 Y-1b, $p < 0.05$)ないし有意点にごく近い(枝 Y-1a, $p = 0.051$)と判定された。いずれの枝においても、正確法より WW 検定において p 値が小さいという結果が得られた。

(1) (2) の適用例とも、WW 検定は正確法(正確な確率)に比べて p 値を過小評価、すなわち有意性を過大評価していることがうかがえる。その原因として、連の数の分布の上下への偏りや凸凹(図-1)といった正規分布からのずれが影響していると推測される。よって、小標本の場合に WW 検定を適用すると有意性の判定が甘くなる傾向にあり、望ましくないといえる。

連の数による検定(一般的な WW 検定)は、あらゆる種類(分布の中央値、ばらつき、歪度など)の差を扱えるものの(Siegel 1983)、特定の対立仮説に特化した検定に比べて検出力が劣り(Mann-Whitney の U 検定との比較: Siegel (1983); Kolmogorov-Smirnov 検定との比較: Magel and Wibowo (1997) など)、単にランダムか否かの検定であり予測には使えないこともあって、ノンパラメトリック統計の手法として紹介されていない専門書もある。しかし、周期的変動の有無によらず適用できる利点も指摘されており(印東 1957)、本報において確率の簡便な算出法と小標本の場合の有意点の数表が示されたことで、適用の機会がより広がると期待される。

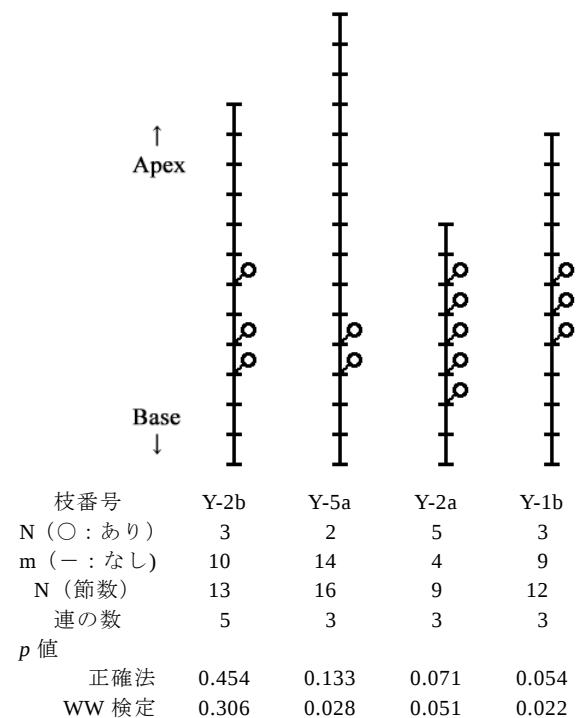


図-3 マタタビの当年枝の節における着花の有無と、連の数による検定の適用例

Figure 3 Arrangement of the presence or absence of flowers on the nodes of the *Actinidia polygama* branch and the application of the number of runs test.

とくに、本報での(1)(2)の適用例や、Filler (1960) が例示した植物の病気の伝染(健全な植物と罹病した植物)と気象の持続傾向(乾燥月と湿潤月)のように、2値の配列そのものに意味がある(検定のために生成した便宜上の配列ではない)場合には、検出力はあまり高くないものの、意味的に連の検定は有効であろう。

4. 結論

本報では、2値 a, b の配列のランダムさについての連の数による検定を取り上げ、a の数 m を 10 までの小標本とし、b の数 n を 50 までの範囲として、配列の組合せ数をもとにして正確な確率分布を求めた。得られた結果は以下のとおりである。1) b の入る位置 I を a の配列の内側と外側とに分けることで、より簡便に a, b の配列の組合せ数と連の数を求めることができた。これに基づき、連の数による検定(正確法)の数表が得られた。2) 連の数の分布は、n が概ね $0.5m \sim 2m$ の範囲では比較的滑らかな釣鐘型であったが、その範囲を超えると著しい偏りや凸凹が生じることが判明

し、正規分布からのずれが大きくなることが示唆された。

3) 実際の小標本データとして、緑化試験地における群落の拡大と、植物の枝の節における着花パターンを 2 値の配列として、正確法を適用した。検出力はあまり高くなかったものの、配列のランダムさの検定として有効であることが確かめられた。一方、同じ小標本データに WW 検定（正規分布近似）を適用した場合、正確法と比べて p 値を過小評価（有意性を過大評価）する傾向が見られた。

【引用文献】

- 1) 荒瀬輝夫・吉澤優理・内田泰三・古野正章（2024）切土のり面の低木林化にともなう陸生スゲ属植物相の変化．日本緑化工学会誌，50 (2) : 220-226
- 2) Burington, R.S. and May, D.C. (林知己夫・脇本和昌監訳) (1975) 確率・統計ハンドブック．森北出版，東京．pp. 197-198, 249-252
- 3) Filler, W. (1960) An introduction to probability and its applications (Volume I, Modern Asia Edition). Charles E. Tuttle Company, Inc., Tokyo. pp. 40-41, 60, 180
- 4) 福島綾乃（2025）マタタビの正常果と虫えい果における成長過程の比較．令和 6 年度 信州大学農学部専攻研究論文．45 pp.
- 5) 伏見正則（2023）乱数．筑摩書房，東京．pp. 160-196
- 6) Hashimoto, Y., Ito, T., Ohnishi, T., Takayasu, M., Takayasu, H., Watanabe, T. (2012) Random walk or a run: market microstructure analysis of the foreign exchange rate movements based on conditional probability. Quantative Finance, 12 (6): 893-905
- 7) 印東太郎（1957）確率および統計．コロナ社，東京．pp. 293-305
- 8) Kupczyski, M. (1977) On some important statistical tests. La Rivista del Nuovo Cimento, 7 (2): 215-228.
- 9) Magel, R.C. and Wibowo, S.H. (1997) Comparing the powers of the Wald-Wolfowitz and Kolmogorov-Smirnov tests. Biometrical Journal, 39 (6): 665-675
- 10) Mood, A.M. (1940) The distribution theory of runs. The Annals of Mathematical Statistics, 11 (4): 367-392
- 11) Lehman, E.L. (鍋谷清治・刈屋武昭・三浦良造訳) (2007) ノンパラメトリックス—順位にもとづく統計的方法—．森北出版，東京．pp. 339-341
- 12) 斎藤孝一（1992）意思決定のためのノンパラメトリック検定—2 組の独立な標本の場合—．経営研究，5 (2) : 391-406
- 13) Siegel, S. (藤本 熙監訳) (1983) ノンパラメトリック統計学—行動科学のために—．マグローヒルブック，東京．pp. 142-151
- 14) 鈴木健介・齋藤 仁・松山 洋（2024）春（3 月第一週）の阿蘇地方では降水が生じやすくなっているのか？—阿蘇の風物詩「野焼き」に注目して—．地学雑誌，133 (2) : 129-141
- 15) Swed, F.S. and Eisenhart, C. (1943) Tables for testing randomness of grouping in a sequence of alternatives. The Annals of Mathematical Statistics, 14 (1): 66-87
- 16) Takashima, M. (1955) Tables for testing randomness by means of length of runs. Bulletin of Mathematical Statistics, 6 (1/2): 17-23
- 17) 竹内 啓（1975）確率分布と統計解析．日本規格協会，東京．pp. 249-268
- 18) 寺本 英（1990）ランダムな現象の数学．吉岡書店，京都．pp. 55-59
- 19) 統計数値表編集委員会編（1977）簡約統計数値表．日本規格協会，東京．pp. 82-83
- 20) 津田孝夫（1969）モンテカルロ法とシミュレーション—電子計算機の確率論的応用—．培風館，東京．pp. 17-24
- 21) Yoshioka, S. (2009) An essay on random walk process: features and testing. KEIEI TO KEIZAI, 89 (3): 243-260
- 22) Upton, G. and Cook, I. (白旗慎吾監訳，内田雅之・熊谷悦生・黒木 学・阪本雄二・坂本 亘・白旗慎吾訳) (2010) 統計学辞典．共立出版，東京．pp. 443-445
- 23) 脇本和昌（林知己夫監修）（1970）初等情報処理講座 5 乱数の知識．森北出版，東京．pp. 36-60
- 24) Wald, A. and Wolfowitz, J. (1940) On a test whether two samples are from the same population. The Annals of Mathematical Statistics, 11 (2): 147-162

（原稿受付 2025.3.13）

附表-1a. 連の数による検定の有意点 (正確法, $m=2\sim4$)
Appendix 1a. Critical values for the number of runs test (exact test, $m = 2-4$)

m	n	下側 Lower tail					上側 Upper tail				
		p	.005	.01	.025	.05	p	.05	.025	.01	.005
2	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
11	11	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	13	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	15	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	16	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	17	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	18	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	19	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
21	21	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	22	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	23	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	24	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	25	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	26	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	27	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	28	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	29	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	30	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
31	31	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	32	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	33	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	34	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	35	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	36	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	37	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	38	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	39	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	40	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
41	41	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	42	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	43	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	44	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	45	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	46	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	47	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	48	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	49	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	50	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

附表-1b. 連の数による検定の有意点 (正確法, m=5~7)

Appendix 1b. Critical values for the number of runs test (exact test, m = 5-7)

m	n	下側 Lower tail					上側 Upper tail				
		p	.005	.01	.025	.05	.05	.025	.01	.005	
5	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
	3	-	-	-	2	-	-	-	-	-	
	4	-	-	2	2	9	9	9	-	-	
	5	-	2	2	3	9	10	10	-	-	
	6	2	2	3	3	10	10	11	11	-	
	7	2	2	3	3	10	11	11	-	-	
	8	2	2	3	3	11	11	-	-	-	
	9	2	3	3	4	11	-	-	-	-	
	10	3	3	3	4	11	-	-	-	-	
	11	3	3	4	4	-	-	-	-	-	
	12	3	3	4	4	-	-	-	-	-	
	13	3	3	4	4	-	-	-	-	-	
	14	3	3	4	5	-	-	-	-	-	
	15	3	4	4	5	-	-	-	-	-	
	16	3	4	4	5	-	-	-	-	-	
	17	3	4	4	5	-	-	-	-	-	
	18	4	4	5	5	-	-	-	-	-	
	19	4	4	5	5	-	-	-	-	-	
	20	4	4	5	5	-	-	-	-	-	
5	21	4	4	5	5	-	-	-	-	-	
	22	4	4	5	6	-	-	-	-	-	
	23	4	4	5	6	-	-	-	-	-	
	24	4	4	5	6	-	-	-	-	-	
	25	4	4	5	6	-	-	-	-	-	
	26	4	4	5	6	-	-	-	-	-	
	27	4	5	5	6	-	-	-	-	-	
	28	4	5	5	6	-	-	-	-	-	
	29	4	5	6	6	-	-	-	-	-	
	30	4	5	6	6	-	-	-	-	-	
5	31	4	5	6	6	-	-	-	-	-	
	32	4	5	6	6	-	-	-	-	-	
	33	5	5	6	6	-	-	-	-	-	
	34	5	5	6	6	-	-	-	-	-	
	35	5	5	6	6	-	-	-	-	-	
	36	5	5	6	6	-	-	-	-	-	
	37	5	5	6	6	-	-	-	-	-	
	38	5	5	6	6	-	-	-	-	-	
	39	5	5	6	6	-	-	-	-	-	
	40	5	5	6	6	-	-	-	-	-	
5	41	5	6	6	6	-	-	-	-	-	
	42	5	6	6	6	-	-	-	-	-	
	43	5	6	6	6	-	-	-	-	-	
	44	5	6	6	7	-	-	-	-	-	
	45	5	6	6	7	-	-	-	-	-	
	46	5	6	6	7	-	-	-	-	-	
	47	5	6	6	7	-	-	-	-	-	
	48	5	6	6	7	-	-	-	-	-	
	49	5	6	6	7	-	-	-	-	-	
	50	5	6	6	7	-	-	-	-	-	
6	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
	3	-	-	-	2	2	2	2	-	-	
	4	-	2	2	2	3	3	9	9	-	
	5	2	2	2	3	3	10	10	11	11	
	6	2	2	2	3	3	11	11	12	12	
	7	2	3	3	3	4	11	12	12	13	
	8	2	3	3	3	4	12	12	13	13	
	9	3	3	3	4	4	12	13	13	-	
	10	3	3	3	4	5	12	13	-	-	
	11	3	4	4	4	5	13	13	-	-	
	12	3	4	4	5	5	13	13	-	-	
	13	3	4	5	5	5	13	-	-	-	
	14	4	4	5	5	5	13	-	-	-	
	15	4	4	5	6	-	-	-	-	-	
	16	4	4	5	6	-	-	-	-	-	
	17	4	5	5	6	-	-	-	-	-	
	18	4	5	5	6	-	-	-	-	-	
	19	4	5	6	6	-	-	-	-	-	
	20	4	5	6	6	-	-	-	-	-	
6	21	5	5	5	6	6	-	-	-	-	
	22	5	5	6	6	6	-	-	-	-	
	23	5	5	6	6	6	-	-	-	-	
	24	5	5	6	7	7	-	-	-	-	
	25	5	5	6	7	7	-	-	-	-	
	26	5	5	6	7	7	-	-	-	-	
	27	5	6	6	7	7	-	-	-	-	
	28	5	6	6	7	7	-	-	-	-	
	29	5	6	6	7	7	-	-	-	-	
	30	5	6	6	7	7	-	-	-	-	
6	31	6	6	6	7	7	-	-	-	-	
	32	6	6	6	7	7	-	-	-	-	
	33	6	6	6	7	7	-	-	-	-	
	34	6	6	6	7	8	-	-	-	-	
	35	6	6	6	7	8	-	-	-	-	
	36	6	6	6	7	8	-	-	-	-	
	37	6	6	6	7	8	-	-	-	-	
	38	6	6	6	7	8	-	-	-	-	
	39	6	6	6	7	8	-	-	-	-	
	40	6	6	6	7	8	-	-	-	-	
6	41	6	6	6	7	8	-	-	-	-	
	42	6	6	6	7	8	-	-	-	-	
	43	6	6	6	7	8	-	-	-	-	
	44	6	6	6	7	8	-	-	-	-	
	45	6	6	6	7	8	-	-	-	-	
	46	6	6	6	7	8	-	-	-	-	
	47	6	6	6	7	8	-	-	-	-	
	48	6	6	6	7	8	-	-	-	-	
	49	6	6	6	7	8	-	-	-	-	
	50	6	6	6	7	8	-	-	-	-	
7	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
	3	-	-	-	2	2	-	-	-	-	
	4	-	2	2	2	3	3	9	-	-	
	5	2	2	2	3	3	10	11	11	-	
	6	2	2	3	3	3	4	11	12	12	
	7	2	3	3	3	4	11	12	13	13	
	8	3	3	3	4	4	12	13	13	14	
	9	3	3	4	4	5	13	14	14	15	
	10	3	4	4	5	5	13	14	15	15	
	11	4	4	4	5	5	14	14	15	15	
	12	4	4	5	5	6	14	14	15	-	
	13	4	5	5	6	6	14	15	-	-	
	14	4	5	5	6	6	14	15	-	-	
	15	4	5	6	6	6	15	15	-	-	
	16	5	5	6	6	6	15	-	-	-	
	17	5	5	6	7	7	15	-	-	-	
	18	5	5	6	7	7	15	-	-	-	
	19	5	6	6	7	7	15	-	-	-	
	20	5	6	6	7	7	-	-	-	-	
7	21	5	6	6	7	7	-	-	-	-	
	22	5	6	7	7	7	-	-	-	-	
	23	6	6	7	7	8	-	-	-	-	
	24	6	6	7	8	8	-	-	-	-	
	25	6	6	7	8	8	-	-	-	-	
	26	6	6	7	8	8	-	-	-	-	
	27	6	6	7	8	8	-	-	-	-	
	28	6	6	7	8	8	-	-	-	-	
	29	6	7	7	8	8	-	-	-	-	
	30	6	7	8	8	8	-	-	-	-	
7	31	6	7	8	8	8	-	-	-	-	
	32	6	7	8	8	8	-	-	-	-	
	33	6	7	8	8	8	-	-	-	-	
	34	7	7	8	8	8	-	-	-	-	
	35	7	7	8	8	8	-	-	-	-	
	36	7	7	8	8	9	-	-	-	-	
	37	7	7	8	8	9	-	-	-	-	
	38	7	7	8	8	9	-	-	-	-	
	39	7	7	8	8	9	-	-	-	-	
	40	7	8	8	8	9	-	-	-	-	
7	41	7	8	8	8	9	-	-	-	-	
	42	7	8	8	8	9	-	-	-	-	
	43	7	8	8	9	9	-	-	-	-	
	44	7	8	8	9	9	-	-	-	-	
	45	7	8	8	9	9	-	-	-	-	
	46	7	8	8	9	9	-	-	-	-	
	47	7	8	8	9	9	-	-	-	-	
	48	8	8	9	10	10	-	-	-	-	
	49	8	8	9	10	10	-	-	-	-	
	50	8	8	9	10	10	-	-	-	-	

附表-1c. 連の数による検定の有意点 (正確法, $m=8\sim 10$)

Appendix 1c. Critical values for the number of runs test (exact test, $m=8-10$)

m	n	下側 Lower tail					上側 Upper tail				
		p	.005	.01	.025	.05	.05	.025	.01	.005	
8	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
	2	-	-	-	2	-	-	-	-	-	
	3	-	-	2	2	-	-	-	-	-	
	4	2	2	3	3	-	-	-	-	-	
	5	2	2	3	3	-	11	11	-	-	
	6	3	3	3	4	12	12	13	13	-	
	7	3	3	4	4	13	13	14	14	-	
	8	3	4	4	5	13	14	14	15	-	
	9	3	4	5	5	14	14	15	15	-	
	10	4	4	5	6	14	15	15	16	-	
9	11	4	5	5	6	15	15	16	16	-	
	12	4	5	6	6	15	16	16	17	-	
	13	5	5	6	6	15	16	17	17	-	
	14	5	5	6	7	16	16	17	17	-	
	15	5	5	6	7	16	16	17	-	-	
	16	5	6	6	7	16	17	17	-	-	
	17	5	6	7	7	16	17	-	-	-	
	18	6	6	7	8	16	17	-	-	-	
	19	6	6	7	8	16	17	-	-	-	
	20	6	6	7	8	17	17	-	-	-	
10	21	6	7	7	8	17	-	-	-	-	
	22	6	7	8	8	17	-	-	-	-	
	23	6	7	8	8	17	-	-	-	-	
	24	6	7	8	8	17	-	-	-	-	
	25	7	7	8	9	-	-	-	-	-	
	26	7	7	8	9	-	-	-	-	-	
	27	7	7	8	9	-	-	-	-	-	
	28	7	8	8	9	-	-	-	-	-	
	29	7	8	8	9	-	-	-	-	-	
	30	7	8	8	9	-	-	-	-	-	
11	31	7	8	9	9	-	-	-	-	-	
	32	7	8	9	9	-	-	-	-	-	
	33	7	8	9	10	-	-	-	-	-	
	34	8	8	9	10	-	-	-	-	-	
	35	8	8	9	10	-	-	-	-	-	
	36	8	8	9	10	-	-	-	-	-	
	37	8	8	9	10	-	-	-	-	-	
	38	8	8	9	10	-	-	-	-	-	
	39	8	8	9	10	-	-	-	-	-	
	40	8	8	9	10	-	-	-	-	-	
12	41	8	8	10	10	-	-	-	-	-	
	42	8	9	10	10	-	-	-	-	-	
	43	8	9	10	10	-	-	-	-	-	
	44	8	9	10	10	-	-	-	-	-	
	45	8	9	10	10	-	-	-	-	-	
	46	8	9	10	10	-	-	-	-	-	
	47	8	9	10	10	-	-	-	-	-	
	48	8	9	10	10	-	-	-	-	-	
	49	8	9	10	10	-	-	-	-	-	
	50	8	9	10	10	-	-	-	-	-	
9	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
	3	-	-	2	2	-	-	-	-	-	
	4	2	2	3	3	-	-	-	-	-	
	5	2	3	3	3	-	-	-	-	-	
	6	3	3	3	4	12	12	13	13	-	
	7	3	4	4	5	13	13	14	14	-	
	8	3	4	5	5	13	14	14	15	-	
	9	4	4	5	6	14	14	15	16	-	
	10	4	5	5	6	14	15	16	17	-	
10	11	5	5	6	6	15	15	16	17	-	
	12	5	5	6	7	16	16	17	18	-	
	13	5	6	6	7	16	17	18	18	-	
	14	5	6	7	7	17	17	18	18	-	
	15	6	6	7	8	17	18	18	19	-	
	16	6	6	7	8	17	18	18	19	-	
	17	6	7	7	8	17	18	19	19	-	
	18	6	7	8	8	18	18	19	19	-	
	19	6	7	8	8	18	18	19	-	-	
	20	7	7	8	9	18	18	19	-	-	
11	21	7	7	8	9	18	19	-	-	-	
	22	7	8	8	9	18	19	-	-	-	
	23	7	8	8	9	18	19	-	-	-	
	24	7	8	9	9	18	19	-	-	-	
	25	7	8	9	10	19	19	-	-	-	
	26	7	8	9	10	19	-	-	-	-	
	27	8	8	9	10	19	-	-	-	-	
	28	8	8	9	10	19	-	-	-	-	
	29	8	8	9	10	19	-	-	-	-	
	30	8	8	9	10	19	-	-	-	-	
12	31	8	9	10	10	-	-	-	-	-	
	32	8	9	10	10	-	-	-	-	-	
	33	8	9	10	11	-	-	-	-	-	
	34	8	9	10	11	-	-	-	-	-	
	35	8	9	10	11	-	-	-	-	-	
	36	9	9	10	11	-	-	-	-	-	
	37	9	9	10	11	-	-	-	-	-	
	38	9	9	10	11	-	-	-	-	-	
	39	9	10	10	11	-	-	-	-	-	
	40	9	10	10	11	-	-	-	-	-	
13	41	9	10	10	11	-	-	-	-	-	
	42	9	10	10	11	-	-	-	-	-	
	43	9	10	11	11	-	-	-	-	-	
	44	9	10	11	12	-	-	-	-	-	
	45	9	10	11	12	-	-	-	-	-	
	46	9	10	11	12	-	-	-	-	-	
	47	10	10	11	12	-	-	-	-	-	
	48	10	10	11	12	-	-	-	-	-	
	49	10	10	11	12	-	-	-	-	-	
	50	10	10	11	12	-	-	-	-	-	
14	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
	3	-	-	2	2	-	-	-	-	-	
	4	2	2	3	3	-	-	-	-	-	
	5	2	3	3	3	-	-	-	-	-	
	6	3	3	3	4	12	12	13	13	-	
	7	3	4	4	5	13	13	14	14	-	
	8	3	4	5	5	13	14	14	15	-	
	9	4	4	5	6	14	14	15	16	-	
	10	4	5	5	6	14	15	16	17	-	
15	11	5	5	6	6	15	15	16	17	-	
	12	5	6	6	7	16	16	17	18	-	
	13	5	6	7	7	16	17	18	18	-	
	14	6	6	7	8	17	17	18	18	-	
	15	6	7	7	8	17	18	18	19	-	
	16	6	7	8	8	17	18	18	19	-	
	17	6	7	8	9	18	18	19	19	-	
	18	7	7	8	9	18	19	19	20	-	
	19	7	8	8	9	19	19	20	20	-	
	20	7	8	9	9	19	19	20	21	-	
16	21	8	8	9	10	19	19	20	21	-	
	22	8	8	9	10	20	20	21	-	-	
	23	8	8	9	10	20	20	21	-	-	
	24	8	8	9	10	20	20	21	-	-	
	25	8	9	10	10	20	20	21	-	-	
	26	8	9	10	10	20	21	-	-	-	
	27	8	9	10	11	20	21	-	-	-	
	28	8	9	10	11	20	21	-	-	-	
	29	9	9	10	11	20	21	-	-	-	
	30	9	9	10	11	20	21	-	-	-	
17	31	9	10	10	11	21	-	-	-	-	
	32	9	10	10	11	21	-	-	-	-	
	33	9	10	11	12	21	-	-	-	-	
	34	9	10	11	12	21	-	-	-	-	
	35	9	10	11	12	21	-	-	-	-	
	36	10	10	11	12	21	-	-	-	-	
	37	10	10	11	12	21	-	-	-	-	
	38	10	10	11	12	-	-	-	-	-	
	39	10	10	11	12	-	-	-	-	-	
	40	10	10	11	12	-	-	-	-	-	
18	41	10	10	12	12	-	-	-	-	-	
	42	10	11	12	12	-	-	-	-	-	
	43	10	11	12	12	-	-	-	-	-	
	44	10	11	12	12	-	-	-	-	-	
	45	10	11	12	13	-	-	-	-	-	
	46	10	11	12	13	-	-	-	-	-	
	47	10	11	12	13	-	-	-	-	-	
	48	10	11	12	13	-	-	-	-	-	
	49	11	11	12	13	-	-	-	-	-	
	50	11	11	12	13	-	-	-	-	-	