

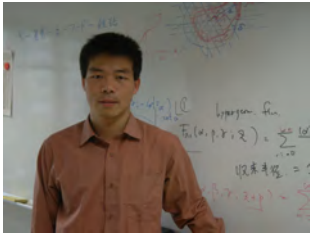
# 不確実な現象の解析

講座・職名：ファイバーナノテク国際若手研究者育成拠点・助教

略歴：'05 東京大学大学院数理科学研究科修士課程修了，'08 東京大学大学院数理科学研究科博士後期課程修了，'08 現職

専門分野：確率論

キーワード：確率微分方程式，確率偏微分方程式，伊藤解析，大偏差原理，確率不等式



しゃ びん  
謝 賓

BIN XIE

## 現在の研究テーマ：面白い確率微分方程式の研究

確率微分方程式の理論が偉大な数学者伊藤清によって創始されたものです。今までに、様々な分野において応用されています。

よく知られているのは Newton, Leibniz による微積分学に基づいて、決定論的力学法則に従う自由落下、惑星の運動といった自然現象の時間発展が常微分方程式により記述されることです。この場合に、ある時刻における物理系の状態（位置と速度など）が分かれば、常微分方程式を解くことによりすべての時刻における状態が完全に決定されます。これは「決定論的」現象と言います。

しかし、世の中にはこのような記述ができない自然現象や社会現象が数多く存在します。たとえば、株価の不規則な変動、交換台にかかってくる電話の回数、大地震や台風などの自然災害、出生死滅を繰り返す人類の個体数、煙突から出る煙の形の変化、桜の花弁が風に乗らばりながら地面に落ちてくる時の位置等々。このような不確実性を含む現象の代表的な例が Brown 運動です。

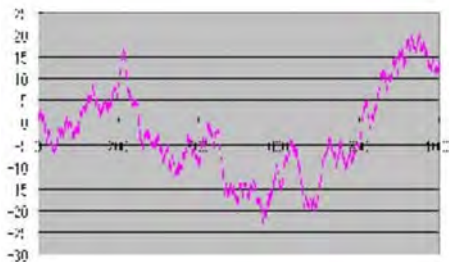


図 1: 1次元のブラウン運動の軌跡

Brown 運動については、まず、イギリスの植物学者 Brown(1773–1858) は 1828 年に花粉が水の浸透圧で破裂し水中に浮んだ微粒子を顕微鏡下で観察中以下のグラフのようなきわめて不規則なジグザグな運動をはじめに発見しました。



図 2: 微粒子のジグザグな運動

それから、約 80 年間たって、1905 年に物理学者 Einstein(1879–1955, ノーベル賞受賞者) により、熱運動する媒質の分子の不規則な衝突によって引き起こされる現象であるとして説明する理論が発表されました。その後、1923 年に、N. Wiener(1894–1964) はその現象を理想化し、数学的モデルを確率過程として導入しました。

このような運動の時間発展の一つの標本をとらえたとき、それは決定論的法則に基づく常微分方程式の

解の滑らかな軌道とは様相を異にします。このような不規則を表すジグザグな標本路の性質を記述するために、日本人数学者伊藤清は端的に言って、確率微分方程式の概念を導入してそれを解析する基本的手段を考え、不規則な系の微積分学を厳密な数学的理論として構築しました。



図 3: 伊藤清 (1915–), 2006 年 8 月 22 日第 1 回ガウス賞, 2003 年文化功労者, 1987 年ウルフ賞; 1978 年日本学士院賞 恩賜賞, ...

その業績はしばしば、Newton のそれと比べて語られ、20 世紀後半に大きく発展し、今では確率解析あるいは伊藤解析と呼ばれています。

ひとこと言えば、確率微分方程式とは、時間とともに偶然に変化する要因を伴った常微分方程式のことです。あるいは、ランダムな揺らぎ（ノイズや雑音とも呼ばれます）の加わった常微分方程式です。今は、確率微分方程式が自然科学の諸領域において極めて重要な役割を果たしています。実際、物理学、生物学あるいは工学では外部からの影響として加わる雑音をモデル化するために確率微分方程式が採用されています。さらに、自然科学のみではなく、金融理論をはじめとする経済学においてさえも、その有用性はよく知られています。というのは、たとえば株価変動曲線は Brown 運動の軌跡と実によくマッチするからです。

以下のグラフはある一年間のナスダック指数の推移のものです。

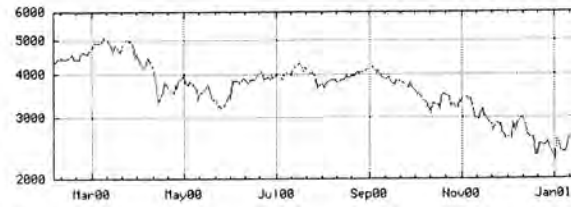


図 4

図 1 と比べると、非常に似ているでしょう。

最後に、1977 年のノーベル経済学賞の受賞者 Myron S. Scholes たち



図 5: マイロン・ショールズ (Myron S. Scholes, 1941–)

の業績に対する伊藤解析の巨大な貢献について話しましょう。伊藤清の業績に基づいて、1973 年に、当時の懸案であったヨーロッパ・コールオプション（満期日にのみ権利を行使できるオプション）のオプション・プレミアムを計算するために、Black と Scholes は確率解析と均衡議論を用いた論文を共同で発表しました。彼らが導入したモデルは Black-Scholes 方程式と呼ばれています。この理論値はすでに市場の均衡価格として得られていた価格に一致しました。1977 年に彼は Black-Scholes 方程式に関する業績によって、Merton とともにノーベル経済学賞を受賞しました (Black は 1995 年に逝去しました)。この方程式はファイナンスにおける数学的モデル化のもたらした大功績であり、オプションや他のデリバティブの取引において必要不可欠の道具となっています。