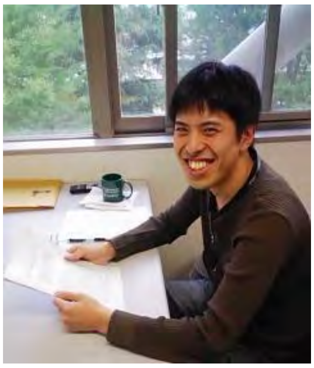
たし算・ひき算・かけ算による三重奏



高橋 亮
Ryo TAKAHASHI

講座・職名：数理構造講座・助教

略歴：'00 京都大学総合人間学部基礎科学科 卒業，'02 岡山大学大学院自然科学研究科博士前期課程 修了，'04 岡山大学大学院自然科学研究科博士後期課程 修了，'06 信州大学理学部数理・自然情報科学科 助手，'07 信州大学理学部数理・自然情報科学科 助教

専門分野：可換代数学

キーワード：ゴレンシュタイン環，コーエンマコーレー環，加群圏，導来圏

ホームページ：http://math.shinshu-u.ac.jp/~takahasi/

現在の研究テーマ：ゴレンシュタイン環上の加群の研究

環の性質を調べる方法は，大きく分けて二通りあります。一つはイデアル論的手法，もう一つは表現論的手法です。前者は「イデアル」という環の部分集合を使って環を内側から調べる方法で，いわば環に手術を施して体内の様子を見るような感じです。これに対し，後者は環を外側から調べる方法です。つまり，環が他の集合たちに与える影響を調べる方法（影響を与えられる集合はその環の上の「加群」と呼ばれる）で，いわば環を叩いたり蹴飛ばしたりしてそのリアクションを見る，という感じです。私は，主に後者の手法を用いて可換環を研究しています。

さて，ゴレンシュタイン環という，いろいろなかたちの対称性をもった美しい可換環があります。この環は，ただ美しいだけでなく，極めて重要な意味を持っている可換環です。実際，1994 年にワイルズによって証明されるまで実に 360 年の歳月を要したフェルマーの最終定理『3 以上の整数 n に対して $x^n + y^n = z^n$ をみたす 0 でない整数 x, y, z は存在しない』の証明においても，ある環が完全交差環というゴレンシュタイン環になっていることが重要な役割を果たしています。

私はこれまで，主に全反射加群と呼ばれる加群の研究を行ってきました。この加群は，ゴレンシュタイン環上では，コーエンマコーレー加群という加群に他なりません。コーエンマコーレー加群の研究は，次の【研究領域】で述べているように，1970 年代から世界各国の研究者によってさかんに行われてきました。これまでに，ゴレンシュタイン環上では任意の加群があるコーエンマコーレー加群によって近似できることがわかっています。また，有限コーエンマコーレー表現型のゴレンシュタイン環については，環の構造およびすべての直既約コーエンマコーレー加群の構造が完全に決定されています。まとめると，ゴレンシュタイン環を知ることは，その上のすべての全反射加群を知ることを意味し，有限コーエンマコーレー表現型のゴレンシュタイン環ではそれが可能である，ということです。

では，ゴレンシュタイン環ではなく一般の可換環ではどうか？与えられた可換環の上のすべての全反射加群を知ることで，その環のことがどれぐらいわかるのか？全反射加群は一般の可換環においてはどのような役割を果たすのか？私はそのような見地から全反射加群を研究し，一般の可換環が内に秘めている“ゴレンシュタイン性”を見つめています。そして現在までの成果として，直既約全反射加群が有限個しか存在しないような環はゴレンシュタイン環になるという結果を得ています。また，ゴレンシュタイン環上の近似性をもつ加群を完全に決定しました。ゴレンシュタイン環，あるいはより一般にコーエンマコーレー環上の加群たちがどのような顔をしているのか，またお互いにどのような関係にあるのか，今後も観察していくつもりです。

研究領域：コーエンマコーレー環の表現論

整数全体のなす集合は，たし算・ひき算・かけ算で閉じています。つまり，二つの整数のたし算・ひき算・かけ算はまた整数になります。このように，和と差と積で閉じている集合のことを「環」と言います。他にも，例えば実数全体のなす集合や，係数が有理数であるような一変数多項式全体のなす集合，整数を成分にもつ二次正方行列全体のなす集合も環です。

環の中でも，積が交換可能になっているものを「可換環」と言います。上で述べた環の例では，整数を成分にもつ二次正方行列全体のなす集合は可換環ではありません。一般に二つの行列の積は，かける順番を逆転させると異なるものになるためです。それ以外のものはすべて可換環です。私の専門分野である可換代数学は，可換環論とも呼ばれるように，可換環を研究する分野です。

1950 年代，アウスランダー，ブックスバーム，リース，ノースコット，セールらの手によって，位相幾何学から誕生したホモロジー代数の理論が可換代数学に導入されました。この恩恵により，可換代数学は急速な発展を遂げました。『正則局所環の局所化はまた正則局所環になる』というセールの定理は，それまで長い間正しいと予想されながらも証明されることのなかった定理ですが，このホモロジー代数の導入によってついに証明されました。

コーエンマコーレー環は，現代の可換代数学において中心的な役割を果たしている重要な可換環です。現在可換代数学に関わるほぼすべての研究者が取り扱う環であると言っても過言ではなく，【現在の研究テーマ】に登場したゴレンシュタイン環もコーエンマコーレー環の一例です。コーエンマコーレー環は，もともとは純性定理と呼ばれるイデアルの高さに関するある特別な性質を持つ環として定義された可換環で，イデアル論的な研究の対象でした。しかし，上で述べたホモロジー代数の可換代数学への導入によって，この環は，クルル次元と呼ばれるイデアル論的な値が深度と呼ばれるホモロジー代数的な値と等しくなるような環であることがわかりました。すなわち，コーエンマコーレー環はホモロジー代数的な研究の対象でもあることが判明したわけです。このことにより，コーエンマコーレー環の理論は飛躍的に進展しました。不変式論や代数幾何学のみならず代数的組合せ論との関わりも強く，現在まで国内外の多くの研究者によって広く深い研究がなされてきています。

さて，コーエンマコーレー環の表現論は，アルティン環と呼ばれる環の上の加群を調べる“ アルティン環の表現論 ”という理論の自然な高次元化として，1970 年代に誕生しました。アルティン環上の加群がコーエンマコーレー環上のコーエンマコーレー加群と呼ばれる加群に相当し，アルティン環上で成り立つ多くの結果の類似物がコーエンマコーレー環上でも成り立ちます。例えば，アウスランダーライテン列という加群列およびそれを元にして作られるアウスランダーライテンクイバーというグラフはアルティン環の表現論において重要な役割を果たすものですが，同様のものがコーエンマコーレー環上においても構成されています（アウスランダー・ライテン，1987 年）。また，アルティン環の表現論の主定理の一つであるブラウアー・スロールの第一定理と類似する結果がコーエンマコーレー環上で成り立ちます（吉野雄二，1987 年）。

一方，コーエンマコーレー環の表現論独自の結果もあります。例えば，コーエンマコーレー環上では任意の加群があるコーエンマコーレー加群によって近似されることがわかっています（アウスランダー・ブッフバイツ，1989 年）。これは，コーエンマコーレー環上ではコーエンマコーレー加群さえわかれば任意の加群が理解できる，ということを意味しています。そして，有限コーエンマコーレー表現型のゴレンシュタイン環，すなわちコーエンマコーレー加群が有限個しか存在しないようなゴレンシュタイン環は単純特異点と呼ばれる幾何学的な環になることが知られていて，その環およびその環上のすべてのコーエンマコーレー加群の構造が完全に決定されています（ブッフバイツ・グルーエル・クネーラー・シュライヤー，1987 年）。また，有限コーエンマコーレー表現型のコーエンマコーレー環は必ず孤立特異点である（アウスランダー，1986 年）という結果もあります。このように，コーエンマコーレー環の表現論は，アルティン環の表現論には無かった幾何学的な意味も持ち合わせています。最近では，ライテン，伊山修，吉野雄二らをはじめとする研究者の貢献により，コーエンマコーレー環の表現論は新たな展開を見せ始めています。