研究教育の紹介

講座・職名：数理構造講座講座・教授

略歴：’72 静岡大学理学部数学科卒業，’75 北海道大学大学院理学研究科数学専攻修士課程修了，’80 同博士後期課程修了

専門分野：環論

キーワード：ネータ環，ゴレンスタイン環，微分多項式環

ホームページ：http://math.shinshu-u.ac.jp/~nishida/

西田　憲司（にしだ　けんじ）
Kenji NISHIDA

現在の研究テーマ：高校生に話したこと

１．フィボナッチ数列

ピサの人フィボナッチ（1170 頃－ 1240 頃）が考えた数列

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ \cdots$$

は $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ によって与えられ，$n-2$ 番目と $n-1$ 番目の和が n 番目になっている。フィボナッチはウサギの繁殖を数値化するためにこの数列を使った。

彼は次の 1),2),3) を仮定した。

1) ウサギは生まれて１ヶ月で親になる，
2) 親ウサギは１ヶ月ごとに１匹の子ウサギを産む，
3) ウサギは死なない

このとき各月のウサギの数はフィボナッチ数列で表される。ところでフィボナッチ数列は自然界の中でも観察され，また情報科学やゲームにも応用されている不思議な数列である。

親ウサギを $!\Omega$ で，子ウサギを $!\omega$ で表し，ウサギの繁殖とフィボナッチ数列を図に描いてみました。（長い耳と小さな目！です）

$$\begin{tikzcd}
n & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
a_n & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\
 & & & & !\omega \arrow[r] & !\Omega \\
 & & & & & !\omega \\
 & !\omega \arrow[r] & !\Omega \arrow[r] \arrow[dr] & !\Omega \arrow[r] \arrow[uur] & !\Omega \arrow[r] \arrow[ur] & !\Omega \\
 & & & !\omega \arrow[r] & !\Omega \arrow[r] \arrow[dr] & !\Omega \\
 & & & & & !\omega
\end{tikzcd}$$

このフィボナッチ数列に少し細工します。偶数を 0 に，奇数を 1 に置き換えます。すると

$$1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0 \cdots$$

という数列が現れます。3 つの数字 1,1,0 が繰り返されているので，周期 3 の数列といいます。周期が 10 万以上というように，非常に長い周期を持つ数列があります。このような数列はレーダー（RADAR: radio detection and ranging の略）– 空中または宇宙空間中にある対象物の位置を測定（決定）する電子装置 – に応用されます。応用の役に立つには周期は非常に長いことが要求されます。例えば、月面探査 (周期 10^6 程度)、金星探査 (10^9 程度)、人工衛星通信系 (10^{15}) 程度。

研究領域：数学 III の言葉と記号で言うと

以上のことの数学的基礎のために,「0 と 1 だけの世界」に和を入れて，加減乗除の世界を作ります。このとき，1，1×0，0×0, 1+0, 等は問題ないのですが, 1+1=2 は「0 と 1 だけの世界」からはみ出てしまいます。ではどうするか?答えは単純です。1+1=0，即ち，2=0 と約束すればよいのです。こうすれば 1+1 も 0 となって「0 と 1 だけの世界」にもどってきます。こうして「0 と 1 だけの世界」が数学の対象になったので次は,「係数が 0 と 1 だけの整式」が考えられます。

数学理論を使い,「係数が 0 と 1 だけの整式」の割り算により非常に長い周期を持つ数列をつくることができます。

高校生向けスーパーサイエンスハイスクールの場でこんな話をしています。

2. タイヤキの型のような

タイヤキの型に小麦粉の溶かしたのを入れ，餡をいれ，型を閉じて焼くとタイヤキができます。ところで餡の替わりに蛸のぶつ切りを入れるとなにができるでしょうか。鯛型のたこ焼き ?? ここで一つわかりました。タイヤキの型は急には（たこ焼き器に）変わらないことです。中に何か入れるとそれを別の何かに変えて出してくるのです。

$$\partial_x(u \oplus v) = \partial_x u \oplus v \times u \oplus \partial_x v$$

<u>最近使っている記号</u>

$$\mathrm{Ext}^i_\Lambda(C,C) = \mathrm{Ext}_{\Lambda^{op}}(C,C) = 0$$

$$(\mathrm{End}_\Lambda)^{op} = \Lambda$$

$$\mathrm{gr}^{\mathcal{F}} C \cong \mathrm{gr}^{\mathcal{F}'} C$$

$$3x\partial_x + 5y\partial_y + 7z\partial_z$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Ker} f_2^* & \longrightarrow & H^1(G^\bullet, \omega) & \to & 0 \\ \uparrow p_1^* & & \uparrow & & \\ (C_1, \omega) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, \omega) & \to & 0 \end{array}$$

関数の微分を「関数と微分」と書き，微分はタイヤキの型，関数は中に入れるものと対応させてみます。

$$\frac{d}{dx}f(x)$$

少し間を空けましょう。

$$\frac{d}{dx}\ f(x)$$

思い切って

$$\frac{d}{dx} \qquad f(x)$$

そして $\frac{d}{dx}$ を D とおきます。このタイヤキ型 D の中に，食材 e^x を入れ，焼きます,

$$D(e^x) = \frac{de^x}{dx} = e^x$$

別の食材 x^2 では

$$D(x^2) = \frac{dx^2}{dx} = 2x$$

が焼きあがるということになります。

この D を，整式を考えるときの x と同じように考えて，D についての整式，例えば，$3D^2 + D + 1$ を作ります。ついでに D と x の積，Dx, xD も考えます。こうして，D と x から足し算と掛け算の出来る世界が造られます。ここでは，$Dx - xD = 1$ という不思議な式が成立します。この不思議を解き明かそうと日々努力しているのが私の研究です。

$$\mathrm{Ext}_\Lambda(\Lambda \otimes_R \omega, \Lambda \otimes_R \omega) \cong \Lambda \otimes_R \mathrm{Ext}^i_R(\omega, \omega) = 0$$

$$S_{(\mathfrak{m})} = k(u)[[t^3, t^5, y^7]]$$

$$\dim_k \mathrm{Ext}^1_{S_{(\mathfrak{m})}}(k(u), S_{(\mathfrak{m})}) = 2$$

$$(3,5,7) = \{3,5,6,7,8,9,10,11,\cdots\}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \omega^n & \to & E & \to & C & \to & 0 \\ & & e_i \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & \omega & \to & E_i & \to & C & \to & 0 \end{array}$$