

自然界の対称性と群論の関わりを見てみよう



にのみや やすし
二宮 晏

YASUSHI NINOMIYA

講座・職名：数理構造講座・教授

略歴：'69 岡山大学理学部数学科卒業，'71 岡山大学大学院理学研究科修士課程修了，'74 北海道大学大学院理学研究科博士課程単位取得退学，'74 岡山大学理学部副手，'75 信州大学教養部講師，'81 信州大学教養部助教授，'93 信州大学教養部教授，'95 信州大学理学部教授
'82 理学博士（北海道大学）

専門分野：代数学

キーワード：群論，環論

ホームページ：<http://math.shinshu-u.ac.jp/~ninomiya/ninomiya-j.html>

現在の研究テーマ：有限群の構造論および表現論

代数学の基礎となるのが“代数系”とよばれるもので、それは“群”，“環”，“体”からなっています。これらは、「演算」をもった集合のことです。大雑把にいうと、群とはかけ算と割り算ができる集合です。例えば、 $i = \sqrt{-1}$ とするとき、4 個の元（要素）からなる集合 $X = \{1, -1, i, -i\}$ を考えましょう。X のいかなる 2 元の積もまた X の元です。また $1, -1, i, -i$ それぞれの逆元（逆要素）は $1, -1, -i, i$ です。それゆえ X は群となっています。一方、環とは足し算，引き算，かけ算ができる集合です。また、四則演算がすべてできる集合を体といいます。例えば整数からなる集合は環となります。有理数からなる集合は体となります。これらの環とか体はいずれも無限集合ですが、有限集合で環とか体をなすものの存在が知られています。こうした“代数系”が代数学の基本であり、また数学全体においても重要な役割を果たしているのです。群 G から体 F 上の n 次正則行列のなす群 $GL(n, F)$ への写像（対応） f で積を保存するもの、すなわち、 $g, h \in G$ に対して $f(gh) = f(g)f(h)$ を満たすものを G の行列表現といいます。ここで G の元の F の元による“形式的な”一次結合のなす集合を FG とします、すなわち、 $FG = \{\sum_{g \in G} r_g g \mid r_g \in F\}$ とおきます。ここで FG の元の和と積を自然に

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} r_g g + \sum_{g \in G} s_g g &= \sum_{g \in G} (r_g + s_g) g \\ \left(\sum_{g \in G} r_g g \right) \left(\sum_{h \in G} r_h h \right) &= \sum_{g, h \in G} r_g r_h gh \end{aligned}$$

と定義すると FG は環になります。これを群 G の体 F 上の群多元環といいます。

上で述べた群の行列表現を考えることと群多元環 FG の構造およびその加群を考えることは同じことであることが言えます。私が関心をもって取り組んでいる研究テーマは、群多元環の環論的な構造と群 G の構造の関係を解明することです。



Abel

自然界には対称性をもつものがたくさん存在します。私たち人間をはじめ、草花や虫、雪の結晶などいろいろなものが対称形であり、自然界は、たくさんの対称性であふれています。

群論とは、対称性を研究する分野ということもできます。美術における対称性とは、主に鏡像による左右対称のことですが、数学でいうところの対称性とは、“ある変換を行ったときに、変換後も状態が変わらないこと”と言えます。こうした変換は結合法則をみたし、恒等変換や逆変換が存在します。これを群といいます。ここで一般的な群の定義についてを説明しましょう。集合 G に演算が定義されていて、以下を満たすとき、 G を群と言います。

- ・ 結合法則を満たす。
- ・ 単位元 $1_G \in G$ が存在する。
- ・ $g \in G$ に対して、逆元 $g^{-1} \in G$ が存在する。

群を具体的に構成しましょう。正三角形 ABC を反時計回りに 120° 回転させる操作を σ とします。このとき σ によって頂点 A は頂点 B へ、頂点 B は頂点 C へ、頂点 C は頂点 A へ移動し、三角形の形は変わりません。 σ の操作を 3 回続けて行くと、もとの三角形に戻ります。このことから σ^3 は恒等変換 e と等しいことがわかります。次に頂点 A から下ろした垂線を軸として、 180° 回転させる操作を τ とします。 τ を 2 回続けて行くと、もとの三角形に戻り、このことから $\tau^2 = e$ となることがわかります。この 2 つの変換を繰り返すと、異なる変換は

$$G = \{e, \sigma, \sigma^2, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \}$$

の 6 個であることが確かめられ、これが上述の群の定義を満たしていることが確かめられ、それゆえ G は群であると言えます。

このような群について、歴史的背景を見てみましょう。群は中世より始まった代数方程式の解の研究という問題から生じた考えだと言われています。実数を係数とする方程式

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

を代数方程式といいます。 $n = 2$ のとき、 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

で与えられます。このように、代数方程式の解の公式が、その係数から $\pm, \times, \div, \sqrt{\quad}$ などの操作を有限回ほどこして得られるかということが問題でした。

4 次以下の方程式については、その根の公式が求まることは古くから知られていましたが、5 次以上の方程式については、19 世紀にいたるまで長い間の懸案でした。アーベル (Abel) (1802–1829) とガロア (Galois) (1811–1832) はこれが不可能であることを独立に証明しましたが、群が最初にあらわれたのはガロアが決闘の前夜その友人に書き残した遺書の中であったと言われます。ガロアは代数方程式に、解の間の置換群を導入し、代数方程式の問題を群論の問題に帰着させることによって上の証明に成功しました。ガロアの理論そのものが他の数学者によく理解されるまでにはさらに 30 年ほどの歳月が必要だったと言われていています。その考え方が理解されてからというもの、対称性という考え方を通して数学の研究そのものが大きく変わっていったと言われています。



Galois

数学は 2000 年以上の歴史を有し、今なお進化・発展しています。この壮大な文化遺産を継承・発展させるには、これを読んでいる皆さんのような“若い”頭脳が必要です。最近、フェルマーの最終定理が解決されたとか、ポアンカレ予想が解決された等々言われていることを知っているでしょう。人は知に幸せを求めてやまない生物です。皆さん、私たちとともに数学の世界に踏み込んでみませんか。