解析関数空間の研究

講座・職名：数理解析講座・教授

略歴：'70 九州大学理学部数学科卒業，'72 九州大学大学院理学研究科修士課程数学専攻修了，'73 九州大学大学院理学研究科博士課程数学専攻中途退学，'73 信州大学助手（理学部），'88 信州大学講師（理学部），'93 信州大学助教授（理学部），'97 信州大学教授（理学部）

専門分野：複素解析学

キーワード：解析関数，n 次元複素 Euclid 空間，単位球，解析関数空間，Bergman 空間，Hardy 空間，Privalov 空間

ホームページ：`http://math.shinshu-u.ac.jp/~matsugu/`

真次　康夫（まつぐ　やすお）
YASUO MATSUGU

現在の研究テーマ：n 次元複素 Euclid 空間の単位球上の解析関数空間

私の数年来の研究は，複素ユークリッド空間 C^n の単位球

$$B_n = \{z = (z_1, \cdots, z_n) \in C^n : |z| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2} < 1\}$$

上の解析関数，調和関数についてのものである。特に，基本的な解析関数部分空間である荷重バーグマン (Bergman) 空間

$$A^p_\alpha(B_n) = \{f \in H(B_n) : \int_{B_n} |f|^p d\nu_\alpha < \infty\}$$

$$(0 < p < \infty, -1 < \alpha < \infty),$$

ハーディ (Hardy) 空間

$$H^p(B_n) = \{f \in H(B_n) : \lim_{r \to -1} \int_{S_n} |f_r|^p d\sigma < \infty\}$$

$$(0 < p < \infty),$$

ネバンリンナ (Nevanlinna) 空間

$$\mathrm{N}\,(B_n) = \{f \in H(B_n) : \lim_{r \to -1} \int_{S_n} \log(1+|f_r|) d\sigma < \infty\}$$

に関する研究が主要テーマである。（蛇足ながら，上記定義式で用いた記号は以下の意味である。）

$H(B_n) : B_n$上の解析関数の全体,

$f \in H(B_n), 0 < r < 1, \zeta \in S_n$に対し, $f_r(\zeta) = f(r\zeta)$,

$d\nu : C^n$の通常の体積要素, $d\nu_\alpha(z) = (1-|z|^2)^\alpha d\nu(z)$,

$S_n = \{z \in C^n : |z| = 1\}, d\sigma : S_n$の通常の面積要素.

ネバンリンナ空間を研究するなかで，最近，プリバロフ (Privalov) 空間 $\mathrm{N}^p(B_n)(1 < p < \infty)$ 並びに荷重バーグマン・プリバロフ空間 $(AN)^p_\alpha(B_n)(1 < p < \infty$ ，$-1 < \alpha < \infty)$ の研究を始めた。これらは，それぞれ，ハーディ空間，荷重バーグマン空間を含むものであり，ネバンリンナ空間により近い解析関数空間である。プリバロフ空間，荷重バーグマン・プリバロフ空間を，ネバンリンナ空間の中での相対的位置付けを中心として，十分深く掘り下げる事が当面する課題である。プリバロフ空間，荷重バーグマン・プリバロフ空間の様々な特徴付け，また，それらの特徴付けを応用して，その F-代数としての独自性，環準同型の決定等を研究したい，との意向をもっている。

プリバロフ空間，荷重バーグマン・プリバロフ空間の定義は，形式的には，ハーディ空間，荷重バーグマン空間のそれと類似のものである。しかし，内容面の上では，著しい相違点がある。それは後２者が環を成さないのに反して，前２者は環を成し，しかも自然な位相に関して F-代数になる事実である。B_n 上の荷重バーグマン・プリバロフ空間の研究に対しては，F-代数の一般論の発展に関しても，重要な概念提供が期待される。F-代数の理論は未だ十分な基礎付けが成されておらず，興味深い例による内容の展開が，F-代数の理論の発展に寄与するものと考えられる。

研究領域：複素解析学

よく知られた Euler の公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

は三角関数と指数関数との関係を簡明かつ見事に表現している。Euler の公式の両辺に登場している i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ であり，両辺の値はともに複素数である。Euler の公式に象徴されるように，実変数の実数値を取る関数であっても，その関数を調べるためには，実数の世界にとどまることは不十分であり，複素数の世界に分け入る必要がある。高等学校の数学において学習する多項式・三角関数・指数関数等の理解を深めるためにも，当然，同じことが言える。複素変数の複素数値関数を研究するのが 複素解析学 である。多項式・ベキ根関数・指数関数・対数関数・三角関数・逆三角関数，これらの加減乗除及び合成関数を総称して 初等関数 と呼ぶ。初等関数を複素数の立場から研究することが，複素解析学入門である。あらゆる関数の中で最も基本的なものは 多項式 である。多項式以外の初等関数はもちろん多項式ではあり得ないが，いずれも無限次数の多項式ともいうべき，ベキ級数 によって表現される。例えば，

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (-\infty < x < \infty),$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (-\infty < x < \infty),$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (-\infty < x < \infty)$$

一般に，関数 f が，その定義域 Ω の各点 z_0 の近傍において，収束するベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ の和によって表わされる，即ち，

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \quad (|z-z_0| < r)$$

（ここで，r は関数 f と点 z_0 に依存して定まる正の実数である。）となる場合，f を Ω 上の 解析関数 と呼ぶ。Ω 上の解析関数の全体を $H(\Omega)$ によって表す。複素解析学の主たる研究対象は解析関数である。解析関数の定義域は様々であるが，最も単純なのが，複素平面 C の 単位円板 D である：

$$D = \{z \in C : |z| < 1\}$$

D は原点を中心とする半径 1 の円の内部である。この円の境界 T は原点を中心とする半径 1 の円周であり，単位円周 と呼ばれる：

$$T = \{z \in C : |z| = 1\}$$

Euler の公式により，

$$T = \{e^{i\theta} : 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\}$$

と表される。D と T の合併集合を $\overline{D}$ で表す：

$$\overline{D} = \{z \in C : |z| \leqq 1\}$$

$\overline{D}$ の近傍上の解析関数の全体を $H(\overline{D})$ で表す。$H(\overline{D})$ に属する関数は次の形の積分によって表現することができる：

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{1-ze^{-i\theta}} d\theta \quad (z \in D)$$

これを Cauchy の積分公式 と言う。特に，$z=0$ の場合は，

$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta$$

$H(D)$ に属する関数 f 及び正の実数 p に対し，左側極限

$$\lim_{r \to 0-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta$$

を $\|f\|_{H^p}$ で表す。また，積分

$$\int_0^1 2r \left\{ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right\} dr$$

を $\|f\|_{A^p}$ で表す。解析関数の集合

$$\{f \in H(D) : \|f\|_{H^p} < \infty\}$$

を $H^p(D)$ で表し，D 上の Hardy 空間 と呼ぶ。解析関数の集合

$$\{f \in H(D) : \|f\|_{A^p} < \infty\}$$

を $A^p(D)$ で表し，D 上の Bergman 空間 と呼ぶ。Hardy 空間の理論は，1930 年代頃から，イギリスの数学者 G.H. Hardy, J.E. Littlewood，ハンガリーの数学者 F.Riesz, M.Riesz，ロシアの数学者 I.I.Privalov, V.Smirnov 等の研究により活発化した。Hardy 空間の理論は Fourier 級数論と密接な関係にあり，その発展初期には Hardy 空間に属する個々の関数そのものの研究が中心となっていたが，その後，Hardy 空間の関数空間としての性質を，主として，関数解析的見地から検討する研究も数多くなされてきている。同様な研究が，Bergman 空間に対しても，また，それらの多次元への拡張も，近年，進展が著しい。

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{1-ze^{-i\theta}} d\theta \quad (z \in D)$$