有限の数学

花木 章秀
Akihide HANAKI

講座・職名： 数理構造講座・准教授

略歴： ’88 千葉大学理学部卒業，’90 千葉大学理学研究科修了，’94 千葉大学自然科学研究科修了 (博士 (理学))，’94 山梨大学工学部助手，’98 信州大学理学部講師，’00 信州大学理学部助教授，’07 信州大学理学部准教授

専門分野： 代数学

キーワード： 代数的組合せ論，アソシエーション・スキーム，有限群の表現

ホームページ： http://math.shinshu-u.ac.jp/~hanaki/

現在の研究テーマ：アソシエーション・スキームの表現

学生時代の私の専門は「有限群の表現論」であったが，ある問題がきっかけとなり，現在は主にアソシエーション・スキーム，特にその表現を研究している。アソシエーション・スキームの勉強を始めた頃は，身近に詳しい人もなく，色々と苦労をした。まず具体的な例を知るために，小さいものを書き上げるということをした (これは後に計算機を用いた分類という研究に発展し，現在も続いている)。そのときに思い付いた問題に「素数位数アソシエーション・スキームの分類」があった。よく知られているように素数位数の群は巡回群に限る。同様のことがアソシエーション・スキームに対しても成り立つのかということである。素数位数のアソシエーション・スキームは cyclotomic scheme とそれに代数的に同型なものしか知られていない。しばらくの間，私の主テーマはこの問題であったが，そう簡単には解決の糸口を見つけることはできなかった。

2004 年秋，ある研究集会で大阪教育大学の宇野勝博先生とアソシエーション・スキームの表現に関する話をした際，「原点に帰って R. Brauer の 1940 年頃の論文を読むといい」といわれた (R. Brauer は有限群のモジュラー表現の多くの重要な部分を築いた数学者)。さっそく読んでみた。するとその中の議論に使える部分があり，それを利用することによって大きな結果を得ることができた。その後，宇野先生と議論を重ねて，現在得られている結果は以下の通りである。

定理 (**花木-宇野**). 素数位数アソシエーション・スキームは可換である。更にその最小分解体がアーベル体であるならば，それは cyclotomic scheme と代数的に同型である。

これはその証明にモジュラー表現を本質的に用いており，新しい手法による成果ともいえる。定理の中の仮定について「可換なアソシエーション・スキームの最小分解体はアーベル体であるか」(坂内-伊藤) という問題があり，これが肯定的であるならば素数位数アソシエーション・スキームは既述のものに限られる。しかし我々の結果の後，小松-坂内によって知られていない素数位数アソシエーション・スキームの存在の可能性が示されている。

素数位数アソシエーション・スキームに関する問題は完全に解決したわけではないが，表現論的な議論はしつくした感があり，現在はあまり考えていない。現在，もっとも興味をもっているのは，アソシエーション・スキームとその部分スキームや商スキームの間の関係である。これがよく分かれば，多くの問題は原始的スキーム (部分スキームや商スキームをもたないもの) に帰着することができ，その研究が進むことが期待される。最近，表現に関して Clifford 型の定理を証明したが，更なる一般化を行いたいと思っている。

研究領域：代数的組合せ論 –アソシエーション・スキーム–

1930 年代，R. A. Fisher は農業試験を効率的に行うため，幾何学における配置問題を応用した。これが「実験計画法」という名の「組合せデザイン」の研究の始まりとされる。「組合せデザイン」の問題とは，簡単にいえば,「全体をよく近似するなるべく小さな部分集合を見つける」ということである。部分集合を小さくすれば，近似が悪くなるのは当り前のことであるが，ある意味でもっとも効率のよいものを求めたいのである。

1940 年代には C. E. Shannon らによって「誤り訂正符号」の理論が作り出される。誤り訂正符号とは情報通信の際に生じるノイズ (雑音) を除去するために，用いられるものである。簡単な例として，まったく同じ情報をくり返し送るという方法がある。もし受け取った情報が異なれば，誤りがあることが分かる。また 3 回以上送れば，多数決の原理によって正しい情報を推測することが出来る。しかし，この方法では情報量が大きくなりすぎるという問題がある。情報量の増加を少なくし，かつ誤り検出，誤り訂正の効率もよくするというのが，誤り訂正符号の理論の一つの目的である。

「組合せデザイン」や「誤り訂正符号」の理論は，このように実用的な問題から始まっているが，純粋数学としての研究も盛んに行われてきた。1973 年に P. Delsarte はこれらのものを「アソシエーション・スキーム」という枠組の中で統一的に扱うことが出来ることを示した。Delsarte の論文が，アソシエーション・スキームを中心とする「代数的組合せ論」の出発点であるともいわれている (代数的組合せ論という言葉の意味は広く，他の意味で用いられることも多い)。

一方で D. G. Higman は 1970 年代を中心に有限群論，あるいはその表現論の一般化という観点から coherent configuration を研究した。特に homogeneous coherent configuration は Delsarte らによるアソシエーション・スキームの非可換版ともいえるものであり，私はこの意味で「アソシエーション・スキーム」という言葉を使っている。この意味ではアソシエーション・スキームは有限群の概念をその特別な場合として含むことになる。

アソシエーション・スキームは元々，組合せ論的な研究対象であるから，その研究は組合せ論的な手法によるものが多い。しかし，多くの組合せ論的な議論は扱う集合が大きくなると，もはや手に負えないほど複雑で難しくなる。そこで，ある種の “粗い” 議論が有効になってくる。アソシエーション・スキームからは自然に代数が定義される。この代数を調べることによって元のアソシエーション・スキームの性質などを見るのである。近年，この方法によっていくつかの新しい結果が得られたため，注目される研究の一つとなっている。特にモジュラー表現 (正標数の体上の隣接代数の表現) はほとんど研究が進んでおらず，今後の発展が期待される。

X を有限集合とする。S は $X \times X$ の分割とする。すなわち

$$X \times X = \bigcup_{s \in S} s \quad \text{(disjoint)}$$

である。(X, S) が以下の 3 条件をみたすとき，これを**アソシエーション・スキーム**という。

(1) $1 = \{(x, x) \mid x \in X\} \in S$,

(2) $s \in S$ ならば

$$s^* = \{(y, x) \mid (x, y) \in s\} \in S,$$

(3) $s, t, u \in S$ に対して整数 p_{st}^u が存在して，$(x, y) \in u$ であるとき

$$\sharp\{z \in X \mid (x, z) \in s,\ (z, y) \in t\} = p_{st}^u.$$

集合 X の元数を (X, S) の**位数**という。このとき S の元を形式的な基底とし p_{st}^u を構造定数とする代数が定義される。これを (X, S) の**隣接代数**という。隣接代数が可換であるときアソシエーション・スキームは**可換**であるといわれる。

任意の $s \in S$ に対して $p_{ss^*}^1 = 1$ であるようなアソシエーション・スキームは，本質的に有限群と同じものであり，そのときの隣接代数は群代数と同じになる。

複素数体上の隣接代数は半単純であり，したがって指標理論が有効である。このときの表現を**通常表現**という。正標数の体上の隣接代数は半単純とは限らず，一般にその研究は難しい。このときの表現を**モジュラー表現**という。正標数の体上の隣接代数がいつ半単純になるかは *Frame* **数**によって判定できるが，Frame 数を求めることは一般には容易ではない。

THEOREM Every association scheme of prime order is commutative. Moreover, if the minimal splitting field of the scheme is an abelian number field, then the scheme is algebraically isomorphic to a cyclotomic scheme.