平成28年度第三年次編入学試験(一般選抜)

数　学

1　平面内の領域 $D = \{(x,y) \mid (x,y) \neq (0,0)\}$ で定義された2変数関数 $f(x,y)$ に対して，$\Delta f(x,y) = f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y)$ と定める。また，$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ $(r > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ とし，$z = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。ただし，領域 D で $f(x,y)$ の2階までのすべての偏導関数が存在して，それらはすべて連続とする。

(1) z_r，z_θ を r，θ，f_x，f_y を用いて表せ。

(2) $z_{rr} + \dfrac{1}{r}z_r + \dfrac{1}{r^2}z_{\theta\theta} = \Delta f$ を示せ。

(3) $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x^2+y^2}\log(x^2+y^2)$ のとき，$\Delta f(x,y)$ を求めよ。ただし，対数は自然対数とする。

2　$p > 2$ は実数とする。$D_n = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq n, 0 \leqq y \leqq n\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ とおき，領域 D_n 上の2重積分

$$I_n(p) = \iint_{D_n} \frac{dxdy}{(1+x+y)^p}$$

を考える．

(1) $I_n(p)$ を計算し，極限値 $I(p) = \lim_{n\to\infty} I_n(p)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_3^\infty I(p)dp$ を計算せよ。

3　a，b は実数とする。実数の未知数 x，y，z，w に関する連立1次方程式

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 1 \\ 2x + y + 4z + aw = 1 \\ 3x + 4y + z + 2w = 1 \\ 4x + 3y + 2z + w = b \end{cases}$$

は無数の解をもつとする。このとき，a，b が満たす条件を求め，連立1次方程式を解け。

4　行列 $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ。

(1) A の固有値と B の固有値を求めよ。

(2) A，B について，それらが対角化できるか調べ，対角化できれば対角化せよ。