非線形振動理論に現れる微分方程式に対する時間大域解の長時間挙動

國本雄介

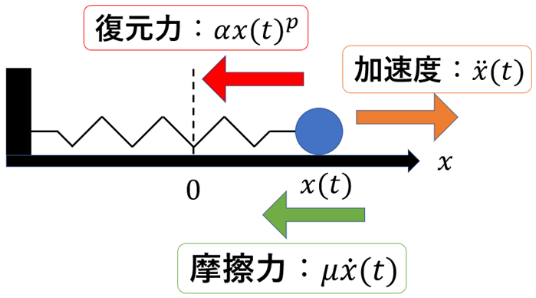
信州大学 工学部 水環境・土木工学科 数理科学研究室

概要

本研究では, 非線形振動を記述する微分方程式の数学解析を行った. 論文では, まずはじめに今回対象とする微分方程式の初期値問題が時間大域解を持つことを証明し, 次に方程式の持つエネルギーの構造に着目して, 十分時間が経過したときの解の振る舞いを調べた. 具体的には, 非線形項の次数に応じて, エネルギーがどのようなオーダーで減衰するかを解析した. 先行研究では, 非線形項の次数が 3 の場合にエネルギーの減衰評価が求められていたが, 本研究では, それを一般化したエネルギーの評価の導出に成功した.

1　非線形振動の数学解析

本研究では, 非線形振動を記述する数理モデルの理論解析を行う. 具体的には, 以下の図に示す, バネにつながれた単位質点の摩擦のある床上の運動を考える. なお, ここではばねの重さは考慮しないものとする.



今, 床上水平右向きを正とし, バネの自然長の位置が原点となるような x 軸を取る. 質点の時刻 t での原点からの変位を $x = x(t)$ とし, 床の摩擦で表現される抵抗力は速度に比例すると考え, $\mu\dot{x}(t)$ $(\mu \geq 0)$ とする. また, バネの弾性による復元力は, 必ずしもフックの法則には従わない非線形な場合を主として考え, $\alpha x(t)^p$ $(\alpha > 0,\ p：奇数)$ で与えられる場合を考える. このとき, ニュートンの運動方程式により, 次の微分方程式が導かれる.

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -\alpha x(t)^p - \mu\dot{x}(t), & t > 0, \\ x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = x_1, & (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{IVP-0}$$

本研究では, 上記の初期値問題 (IVP-0) の数学解析を行う.

2　時間局所解と時間大域解

初期値問題 (IVP-0) を解析するために, 二階の微分方程式を一階の微分方程式系に書き直す. いま, $y := \dot{x}$, $y_0 := x_1$ とおくと,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) = -\alpha x(t)^p - \mu y(t), & t > 0, \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0, & (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \tag{IVP-1}$$

が得られる. 更に, $\boldsymbol{u} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} y \\ -\alpha x^p - \mu y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u_0} := \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ とおき, (IVP-1) を次の形に書き換える.

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{u}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(t)), & t > 0, \\ \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u_0} \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{IVP-2}$$

本研究ではまず, (IVP-2) に対して, 次の定理を証明した.

定理 1：(IVP-2) の時間局所解の存在.

任意の正数 M に対して, ある $t_0 = t_0(M)$ が存在して, 次が成り立つ：$|\boldsymbol{u}_0| \leq M$ ならば, (IVP-2) は, 区間 $I = [0, t_0]$ 上で唯一つの解 $\boldsymbol{u} \in C^1(I)$ を持ち, 次を満たす.

$$\sup_{t \in I} |\boldsymbol{u}(t)| \leq 2M.$$

これを示すには, (IVP-2) に対応する積分方程式を考えればよい.

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}_0 + \int_0^t \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(s))ds, \quad t \geq 0.$$

上式の解を求めるために, 逐次近似列 $\{\boldsymbol{u}^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ を次で定義する.

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}^{(0)}(t) := \boldsymbol{u}_0, \\ \boldsymbol{u}^{(n)}(t) := \boldsymbol{u}_0 + \int_0^t \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}^{(n-1)}(s))ds, & n \geq 1. \end{cases}$$

この関数列 $\{\boldsymbol{u}^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ は $C^0(I)$ でのコーシー列であり, 極限関数 $\boldsymbol{u} \in C^0(I)$ が積分方程式を満たす解となり, 定理が示される.

局所解の存在定理によると, 時刻 $t = 0$ から出発して, $[0, t_0]$ まで少し前進して解が作れるということである. 次に, この議論を繰り返して, $t = t_0$ から出発して, $[t_0, t_1]$ 上の解を作り, これらを合わせて $[0, t_1]$ 上の解を作る. この議論を続けて, 次々に解を延長していけば, 必ず大域解が存在するのではないかと考えられる. しかし, 一般にはそうではない. 今, $|\boldsymbol{u}_0| \leq M_0$ として局所解の存在定理を用いると, 解のサイズは, $|\boldsymbol{u}| \leq 2M_0$ となるので, この操作を繰り返すと, 次第に大きくなり, $2M_0, 4M_0, \cdots, 2^k M_0, \cdots$ となる可能性がある. この方法では,

$$0 \leq t < \sum_{k=0}^{\infty} t_0(2^k M_0)$$

までは解が延長可能であるが, 解のサイズが大きくなることに伴って, 解の延長時間幅 $t_0(2^k M_0)$ が減少して, その結果上式の右辺の級数が収束してしまうような場合, 時間大域的には解を延長することができなくなってしまう.

解を時間大域的に延長するため, アプリオリ評価を導入する. アプリオリ評価とは, 存在の有無の分からない解があると仮定したとき, 方程式の形や初期条件等の初めに与えられた量のみから前もって得られる解の評価のことである.

アプリオリ評価 (cf. [2]).

任意の初期値 $\boldsymbol{u}_0 \in \mathbb{R}^2$ に対し, ある定数 $C(\boldsymbol{u}_0) > 0$ が存在して, 次が成り立つ：ある区間 $[0, T]$ 上で $\boldsymbol{u} \in C^1([0, T])$ が (IVP-2) の解であるならば, 次を満たす.

$$\sup_{0 \le t \le T} |\boldsymbol{u}(t)| \le C(\boldsymbol{u}_0).$$

このアプリオリ評価と局所解の存在定理を合わせると, 解を常に一定間隔で延長できるため, 大域解の存在定理が示される.

時間大域解の存在定理 (cf. [2]).

アプリオリ評価の下, 任意の $\boldsymbol{u}_0 \in \mathbb{R}^2$ に対して, (IVP-2) は唯一つの時間大域解 $\boldsymbol{u} \in C^1([0, \infty))$ を持ち, 次が成り立つ：

$$\sup_{t \ge 0} |\boldsymbol{u}(t)| \le C(\boldsymbol{u}_0).$$

3　時間大域解の存在定理の証明

前述した理論により, (IVP-1) の時間大域解の存在を示すためには, アプリオリ評価が得られればよいと分かる. 本研究では, エネルギー法を用いて, アプリオリ評価が成立することを証明した. エネルギー法とは, 個々の方程式の持つ, エネルギー等の保存量を利用して解を評価する手法の総称である. 今, ある区間 $[0, T]$ で解 (x, y) は存在するものとし, (IVP-1) の第 2 式の両辺に y を掛けて整理すると, 次が得られる.

$$\left(\frac{1}{2}y(t)^2 + \frac{\alpha}{p+1}x(t)^{p+1}\right)' + \mu y(t)^2 = 0. \tag{E1}$$

この両辺を $[0, t]$ 上で積分すると, 次の等式が成り立つ.

$$\left(\frac{1}{2}y(t)^2 + \frac{\alpha}{p+1}x(t)^{p+1}\right) + \mu\int_0^t y(\tau)^2 d\tau = \left(\frac{1}{2}y_0^2 + \frac{\alpha}{p+1}x_0^{p+1}\right).$$

ここで, 左辺の第 1 項は時刻 t での力学的エネルギー, 第 2 項は摩擦で失われたエネルギーの総量, 右辺は初期時刻での力学的エネルギーを表している. これより, 時間が経つにつれて力学的エネルギーが減衰していることが分かる. また, この等式から直ちにアプリオリ評価が導かれるため, 次の定理が証明された.

定理 2：**(IVP-1) の時間大域解の存在.**

p：奇数, $\mu \ge 0$, $\alpha > 0$ とする. このとき, (IVP-1) は唯一つの時間大域解 $(x, y) \in C^1([0, \infty))$ を持つ.

4　解の時間減衰評価

最後に, エネルギー法を用いてより詳細な解の評価の導出を行う. まず, (IVP-1) の第 2 式の両辺に $\mu x/2$ を掛けて整理し, (E1) と組み合わせると, 次の等式が成立する.

$$\left(\frac{1}{2}y(t)^2 + \frac{\mu}{2}x(t)y(t) + \frac{\mu^2}{4}x(t)^2 + \frac{\alpha}{p+1}x(t)^{p+1}\right)' \tag{E2}$$
$$+ \frac{\mu}{2}y(t)^2 + \frac{\mu\alpha}{2}x(t)^{p+1} = 0.$$

ここで, (E2) の括弧の中身を $E(t)$ とおく：

$$E(t) := \left(\frac{1}{2}y(t)^2 + \frac{\mu}{2}x(t)y(t) + \frac{\mu^2}{4}x(t)^2 + \frac{\alpha}{p+1}x(t)^{p+1}\right). \tag{†}$$

この関数 $E(t)$ はエネルギーに対応するものである. この $E(t)$ に対しては, $p = 1$ と $p = 3$ の場合, 先行研究によって, 次の結果が成り立つことが知られている.

既知の結果 ($p = 1$; [2], $p = 3$; [1]).

p：奇数, $\mu > 0$, $\alpha > 0$ とする. このとき, ある正定数 $\nu > 0$, $C_0 > 0$ が存在して, 次が成り立つ：

$$p = 1 \implies E(t) \le E(0)e^{-\nu t},\ \ t \ge 0,$$
$$p = 3 \implies E(t) \le C_0 t^{-1},\ \ t > 0.$$

ここで, $E(t)$ は (†) で定義されたものである.

これらの結果により, 復元力が線形の場合と 3 次の非線形性を持つ場合では, エネルギーの減衰のオーダーが本質的に異なることが分かる. 一方で, より一般の場合である p 次の非線形性を持つ復元力の場合, エネルギーがどのように減衰するのかは詳しく調べられていなかった. そこで本研究では, p の値の変化に伴う, エネルギーの減衰オーダーの変化を解析した.

5　主結果

以下の定理が本研究における主結果である：

定理 3：**エネルギーの減衰評価.**

$p \ge 3$ (奇数), $\mu > 0$, $\alpha > 0$ とする. このとき, ある正定数 $C_0 > 0$ が存在して, 次が成り立つ：

$$E(t) \le C_0 t^{-\frac{2}{p-1}},\ \ t > 0.$$

ここで, $E(t)$ は (†) で定義されたものである.

この結果から, p が 3 以上の奇数の場合には, 解が p の値に対応して多項式的オーダーで減衰することが分かった. 特に, p の値が大きくなるほど, 解の減衰オーダーが遅くなることが明らかになった. 証明の鍵となるのは, 次の微分不等式の導出である.

$$\exists \nu > 0, \quad E(t)' + \nu\frac{E(t)^{\frac{p+1}{2}}}{1 + E(t)^{\frac{p-1}{2}}} \le 0,\ \ t \ge 0.$$

この微分不等式を解析することにより, 上記の定理が示される.

今後の展望としては, 今回のような真に非線形である復元力を持つ場合, 非線形項の次数 p が実際にどのような振動現象と対応しているのか, 個々の現象についても考察を行い, 数理現象に対する理解をより一層深めていきたいと考えている.

参考文献

[1] 伊藤大介：微分方程式の安定性解析とその非線形振動理論への応用, 信州大学, 卒業論文, 2022.

[2] 松村昭孝, 西原健二：改訂版 非線形微分方程式の大域解–圧縮性粘性流の数学解析–, 日本評論社, 2015.