

信州大学工学部

学士論文

3元情報源に対してハミング歪みを適用した
レート歪み関数

指導教員 西新 幹彦 准教授

学科 電子情報システム工学科
学籍番号 22T2054H
氏名 木谷 隼和

2026年3月31日

目次

1	はじめに	1
2	レート歪み理論	1
3	2元情報源に対するレート歪み関数	3
4	3元情報源に対するレート歪み関数	6
4.1	$0 \leq D < 2p_2$ の場合	7
4.2	$2p_2 \leq D < 1 - p_0$ の場合	11
4.3	$D \geq 1 - p_0$ の場合	16
4.4	相互情報量とレート歪み関数	16
5	まとめ	17
	謝辞	19
	参考文献	19

1 はじめに

通信では、取得したデータを限られた通信路容量で効率よく送る必要がある。例えば、スマートフォンによる音声通話では、マイクが拾った音声をそのままのデータ量で送信すると膨大な情報量となるため、聞き取りにあまり影響を与えない音を除去して効率的に通信している。しかし、データを圧縮すれば必ず情報の欠落や劣化が生じ、元データと復元データの間には歪みと呼ばれる差異が生まれる。通信路容量が限られる現実世界では、多少の劣化を許容しながらも、可能な限りデータ量を削減することが求められる。この「どの程度まで圧縮できるか」と「どの程度まで歪みを許容できるか」はトレードオフの関係にある。この関係を理論的に規定する枠組みがレート歪み理論である。レート歪み理論は、許容される歪みの範囲内で符号化レートをどこまで小さくできるのか、その理論上の下限を与えるものであり、この下限はレート歪み関数と呼ばれる。

2元情報源に対するレート歪み関数は広く知られており、多くの教科書で標準的な結果として扱われている。しかし3元情報源に対するレート歪み関数は明らかにされていない。そこで本研究では、2元情報源に対するレート歪み理論を3元情報源へと拡張し、ハミング歪みを適用した場合のレート歪み関数の導出を行った。具体的には、相互情報量の最小化問題をラグランジュの未定乗数法により定式化し、歪み制約および確率制約の下で最適な条件付確率分布を求めた。

その結果、歪み D の値に応じてレート歪み関数が3つの区間に分かれて表されることが明らかになった。このうち、ある区間では出力が3元から2元へと縮退する解が最適となり、その導出にはKKT条件を用いた。一方、入力分布が一様な場合には、出力が3元から2元へと縮退する区間は現れなかった。

2 レート歪み理論

本章では、レート歪み理論の基礎となる一般的枠組みを整理する。離散的な情報源 X はアルファベット \mathcal{X} に属する記号を独立同分布で生成するものとする。すなわち、情報源系列

$$X^n = (X_1, X_2, \dots, X_n) \tag{1}$$

の各要素は確率分布 $P_X(x)$ に従い独立に生成される。復元側のアルファベットを $\hat{\mathcal{X}}$ とし、元の系列 $x^n \in \mathcal{X}^n$ と復元系列 $\hat{x}^n \in \hat{\mathcal{X}}^n$ の間のずれを歪みと呼ぶ。

定義 2.1 $d : \mathcal{X} \times \hat{\mathcal{X}} \rightarrow [0, d_{\max}]$ を歪み測度と呼ぶ。系列間の歪みは

$$d_n(x^n, \hat{x}^n) \triangleq \sum_{i=1}^n d(x_i, \hat{x}_i) \quad (2)$$

で定義する。

定義 2.2 符号化は、符号化写像（エンコーダ）

$$\phi_n : \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{M}_n \quad (3)$$

および復号写像（デコーダ）

$$\psi_n : \mathcal{M}_n \rightarrow \hat{\mathcal{X}}^n \quad (4)$$

から構成される。ここで $\mathcal{M}_n = \{1, 2, \dots, M_n\}$ は符号語の集合である。

このとき、復元系列は

$$\hat{X}^n = \psi_n(\phi_n(X^n)) \quad (5)$$

で与えられる。

定義 2.3 レート歪みの組 (R, D) が達成可能であるとは、

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \leq R \quad (6)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{1}{n} d_n(X^n, \hat{X}^n) \right] \leq D \quad (7)$$

を満たす符号列 $\{(\phi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在することをいう。本研究では対数の底は 2 として扱う。

相互情報量を

$$I(X; \hat{X}) \triangleq \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{\hat{x} \in \hat{\mathcal{X}}} P_X(x) P_{\hat{X}|X}(\hat{x}|x) \log \frac{P_{\hat{X}|X}(\hat{x}|x)}{P_{\hat{X}}(\hat{x})} \quad (8)$$

で定義すると、次の定理が成立する。

定理 2.1 レート歪み関数は

$$R(D) = \min_{\hat{X}: \mathbb{E}[d(X, \hat{X})] \leq D} I(X; \hat{X}) \quad (9)$$

の最適化問題で与えられる。レート歪み関数 $R(D)$ は一般に歪み D に対して単調非増加かつ凸であることが知られている。

3 2元情報源に対するレート歪み関数

本章では、既存研究において知られている、2元情報源にハミング歪みを適用した場合のレート歪み関数の導出を示す。(9)に対し、入力アルファベットを $\mathcal{X} = \{0, 1\}$ 、歪み測度としてハミング歪みを用いることで、相互情報量最小化問題がどのように具体化されるかを確認する。本章で得られる結果自体は既存研究で知られているものであるが、後章において行う3元情報源の場合との比較および議論の基礎として、導出過程を簡潔にまとめておく。

情報源 X は $\mathcal{X} = \{0, 1\}$ を取り、その分布を

$$P_X(0) = p_0, \quad P_X(1) = p_1, \quad p_0 + p_1 = 1 \quad (10)$$

とする。復元記号 \hat{X} も同様に $\{0, 1\}$ を取るものとする。

条件付き確率

$$q_{ji} = P_{\hat{X}|X}(j | i), \quad i, j \in \{0, 1\} \quad (11)$$

を導入すると、正規化条件は

$$q_{00} + q_{10} = 1, \quad q_{01} + q_{11} = 1 \quad (12)$$

で与えられる。

ハミング歪み

$$d(x, \hat{x}) = \begin{cases} 0 & (x = \hat{x}) \\ 1 & (x \neq \hat{x}) \end{cases} \quad (13)$$

を用いると、平均歪みは

$$E[d(X, \hat{X})] = p_0 q_{10} + p_1 q_{01} \quad (14)$$

と表される。レート歪み問題では、設定した歪みを最大限まで許容するので、歪み制約が等式制約となり

$$D = p_0 q_{10} + p_1 q_{01} \quad (15)$$

と書ける。

一方、復元記号の分布は

$$P_{\hat{X}}(0) = r_0 = p_0 q_{00} + p_1 q_{01} \quad (16)$$

$$P_{\hat{X}}(1) = r_1 = p_0 q_{10} + p_1 q_{11} \quad (17)$$

で与えられる。

条件付き確率 q_{ji} を用いると、相互情報量 $I(X; \hat{X})$ は

$$I(X; \hat{X}) = p_0 q_{00} \log \frac{q_{00}}{r_0} + p_0 q_{10} \log \frac{q_{10}}{r_1} + p_1 q_{01} \log \frac{q_{01}}{r_0} + p_1 q_{11} \log \frac{q_{11}}{r_1} \quad (18)$$

と書ける。レート歪み理論においては、この相互情報量を歪み制約の下で最小化することが目的である。

ラグランジュ関数は

$$L = p_0 q_{00} \log \frac{q_{00}}{r_0} + p_0 q_{10} \log \frac{q_{10}}{r_1} + p_1 q_{01} \log \frac{q_{01}}{r_0} + p_1 q_{11} \log \frac{q_{11}}{r_1} - \lambda_1 (q_{00} + q_{10} - 1) - \lambda_2 (q_{01} + q_{11} - 1) - \lambda_3 (p_0 q_{10} + p_1 q_{01} - D) \quad (19)$$

と書ける。

ラグランジュの未定乗数法より、最適性条件は

$$\frac{\partial L}{\partial q_{00}} = p_0 \log \frac{q_{00}}{r_0} - \lambda_1 = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_{10}} = p_0 \log \frac{q_{10}}{r_1} - \lambda_1 - p_0 \lambda_3 = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_{01}} = p_1 \log \frac{q_{01}}{r_0} - \lambda_2 - p_1 \lambda_3 = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_{11}} = p_1 \log \frac{q_{11}}{r_1} - \lambda_2 = 0 \quad (23)$$

と書ける。

上記の連立方程式と制約条件を整理すると、最適な条件付き確率は

$$q_{00} = \frac{(1-D)(p_0-D)}{p_0(1-2D)}, \quad (24)$$

$$q_{10} = \frac{D(p_1-D)}{p_0(1-2D)}, \quad (25)$$

$$q_{01} = \frac{D(p_0-D)}{p_1(1-2D)}, \quad (26)$$

$$q_{11} = \frac{(1-D)(p_1-D)}{p_1(1-2D)} \quad (27)$$

で与えられる。これは $0 \leq D \leq \min\{p_0, p_1\}$ の範囲で成立する。

(18) に (25)–(27) を代入すると相互情報量は

$$\begin{aligned} I(X; \hat{X}) &= (1-D) \log(1-D) + D \log D - p_0 \log p_0 - p_1 \log p_1 \\ &= (-p_0 \log p_0 - p_1 \log p_1) - \{-D \log D - (1-D) \log(1-D)\} \\ &= H(X) - H(1-D, D) \end{aligned} \quad (28)$$

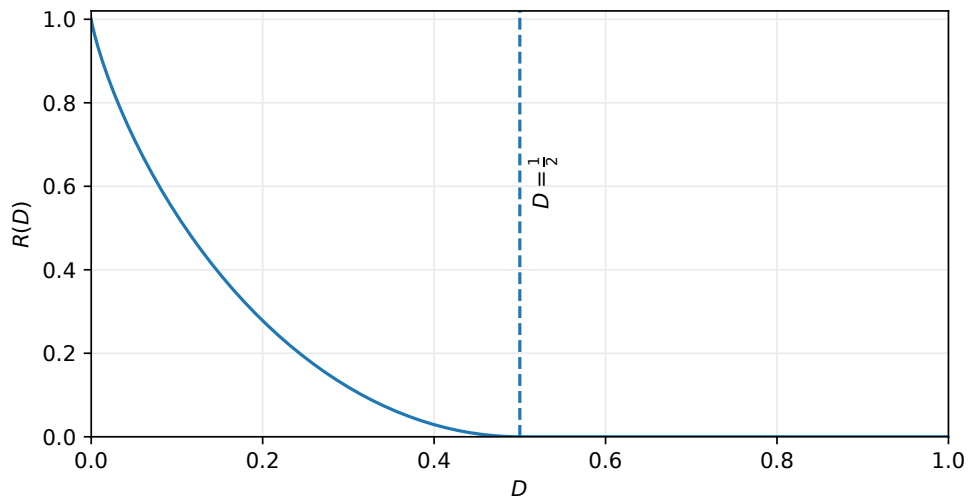


図1 2元情報源 (0.5,0.5) に対してハミング歪みを適用したレート歪み関数

となる. ただし確率変数 X が $P(X = i) = p_i$ ($i = 0, 1, \dots, m-1$) に従うとき,

$$H(X) = H(p_0, p_1, \dots, p_{m-1}) \triangleq - \sum_{i=0}^{m-1} p_i \log p_i \quad (29)$$

と定義する.

ここで D を大きくしていくと, $D = \min\{p_0, p_1\}$ のとき, (25)–(27) より, $p_0 \leq p_1$ の場合には

$$r_0 = 0 \quad (30)$$

となる. $p_0 \geq p_1$ の場合には

$$r_1 = 0 \quad (31)$$

となり, 確率の小さい方に対応する復元記号が出力されなくなる. すなわち $I(X; \hat{X}) = 0$ となる. よって $D \geq \min\{p_0, p_1\}$ の範囲では $R(D) = 0$ となる.

(28) と以上の解析より, 2元情報源 $X \in \{0, 1\}$ に対してハミング歪みを用いた場合のレート歪み関数 $R(D)$ は

$$R(D) = \begin{cases} H(X) - H(1-D, D), & 0 \leq D < \min\{p_0, p_1\} \\ 0, & D \geq \min\{p_0, p_1\} \end{cases} \quad (32)$$

となる. 図1は2元情報源にハミング歪みを適用したレート歪み関数のグラフである.

4 3元情報源に対するレート歪み関数

本章では、既存研究では明らかにされていない、3元情報源に対してハミング歪みを適用した場合のレート歪み関数を新たに導出する。

情報源 X はアルファベット

$$\mathcal{X} = \{0, 1, 2\}$$

を取り、その確率分布を

$$P_X(0) = p_0, \quad P_X(1) = p_1, \quad P_X(2) = p_2, \quad p_0 + p_1 + p_2 = 1 \quad p_0 > p_1 > p_2 \quad (33)$$

とする。復元記号 \hat{X} も同様に $\{0, 1, 2\}$ を取るものとする。

条件付き確率

$$q_{ji} = P_{\hat{X}|X}(j | i), \quad i, j \in \{0, 1, 2\} \quad (34)$$

を導入し、正規化条件は

$$q_{00} + q_{10} + q_{20} = 1, \quad q_{01} + q_{11} + q_{21} = 1, \quad q_{02} + q_{12} + q_{22} = 1 \quad (35)$$

で与えられるものとする。

また、出力分布 $r_j = P(\hat{X} = j)$ は

$$P_{\hat{X}}(0) = r_0 = p_0 q_{00} + p_1 q_{01} + p_2 q_{02}, \quad (36)$$

$$P_{\hat{X}}(1) = r_1 = p_0 q_{10} + p_1 q_{11} + p_2 q_{12}, \quad (37)$$

$$P_{\hat{X}}(2) = r_2 = p_0 q_{20} + p_1 q_{21} + p_2 q_{22} \quad (38)$$

で定義される。

ハミング歪みを用いると、平均歪みは

$$E[d(X, \hat{X})] = p_0(q_{10} + q_{20}) + p_1(q_{01} + q_{21}) + p_2(q_{02} + q_{12}) \quad (39)$$

と書け、レート歪み問題では、設定した歪みを最大限まで許容するので、歪み制約が等式制約となり

$$D = p_0(q_{10} + q_{20}) + p_1(q_{01} + q_{21}) + p_2(q_{02} + q_{12}) \quad (40)$$

と書ける。

このとき、相互情報量 $I(X; \hat{X})$ は

$$I(X; \hat{X}) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 p_i q_{ji} \log \frac{q_{ji}}{r_j} \quad (41)$$

で与えられる。

4.1 $0 \leq D < 2p_2$ の場合

本節では、歪みが

$$0 \leq D < 2p_2$$

の範囲にある場合について、ラグランジュの未定乗数法から得られる連立方程式を用いて、最適な条件付き確率 q_{ji} を導出する。

ラグランジュ関数は

$$\begin{aligned} L = & \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 p_i q_{ji} \log \frac{q_{ji}}{r_j} - \lambda_1 (q_{00} + q_{10} + q_{20} - 1) \\ & - \lambda_2 (q_{01} + q_{11} + q_{21} - 1) - \lambda_3 (q_{02} + q_{12} + q_{22} - 1) \\ & - \lambda_4 (p_0 (q_{10} + q_{20}) + p_1 (q_{01} + q_{21}) + p_2 (q_{02} + q_{12}) - D) \end{aligned} \quad (42)$$

となる。

ラグランジュ関数 L に対し、 q_{ji} に関する停留条件

$$\frac{\partial L}{\partial q_{ji}} = 0 \quad (43)$$

を適用すると、

$$\frac{\partial L}{\partial q_{00}} = p_0 \log \frac{q_{00}}{r_0} - \lambda_1 = 0, \quad (44)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_{10}} = p_1 \log \frac{q_{10}}{r_1} - \lambda_1 - p_0 \lambda_4 = 0, \quad (45)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_{20}} = p_2 \log \frac{q_{20}}{r_2} - \lambda_1 - p_0 \lambda_4 = 0, \quad (46)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_{01}} = p_1 \log \frac{q_{01}}{r_0} - \lambda_2 - p_1 \lambda_4 = 0, \quad (47)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_{11}} = p_1 \log \frac{q_{11}}{r_1} - \lambda_2 = 0, \quad (48)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_{21}} = p_1 \log \frac{q_{21}}{r_2} - \lambda_2 - p_1 \lambda_4 = 0, \quad (49)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_{02}} = p_2 \log \frac{q_{02}}{r_0} - \lambda_3 - p_2 \lambda_4 = 0, \quad (50)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_{12}} = p_2 \log \frac{q_{12}}{r_1} - \lambda_3 - p_2 \lambda_4 = 0, \quad (51)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_{22}} = p_2 \log \frac{q_{22}}{r_2} - \lambda_3 = 0 \quad (52)$$

が得られる. これらの式を整理すると,

$$q_{00} = r_0 e^{\lambda_1/p_0}, \quad (53)$$

$$q_{10} = r_1 e^{\lambda_1/p_0 + \lambda_4}, \quad (54)$$

$$q_{20} = r_2 e^{\lambda_1/p_0 + \lambda_4}, \quad (55)$$

$$q_{01} = r_0 e^{\lambda_2/p_1 + \lambda_4}, \quad (56)$$

$$q_{11} = r_1 e^{\lambda_2/p_1}, \quad (57)$$

$$q_{21} = r_2 e^{\lambda_2/p_1 + \lambda_4}, \quad (58)$$

$$q_{02} = r_0 e^{\lambda_3/p_2 + \lambda_4}, \quad (59)$$

$$q_{12} = r_1 e^{\lambda_3/p_2 + \lambda_4}, \quad (60)$$

$$q_{22} = r_2 e^{\lambda_3/p_2} \quad (61)$$

となる.

ここで,

$$\alpha \triangleq e^{\lambda_1/p_0}, \quad \beta \triangleq e^{\lambda_2/p_1}, \quad \gamma \triangleq e^{\lambda_3/p_2}, \quad t \triangleq e^{\lambda_4} \quad (62)$$

とおくと,

$$q_{00} = r_0 \alpha, \quad q_{01} = r_0 \beta t, \quad q_{02} = r_0 \gamma t \quad (63)$$

$$q_{10} = r_1 \alpha t, \quad q_{11} = r_1 \beta, \quad q_{12} = r_1 \gamma t \quad (64)$$

$$q_{20} = r_2 \alpha t, \quad q_{21} = r_2 \beta t, \quad q_{22} = r_2 \gamma \quad (65)$$

と書ける.

これらに対し, 正規化条件

$$q_{00} + q_{10} + q_{20} = 1, \quad (66)$$

$$q_{01} + q_{11} + q_{21} = 1, \quad (67)$$

$$q_{02} + q_{12} + q_{22} = 1 \quad (68)$$

を適用する.

まず r_0 を計算する.

$$r_0 = p_0 q_{00} + p_1 q_{01} + p_2 q_{02} \quad (69)$$

$$= p_0 (r_0 \alpha) + p_1 (r_0 \beta t) + p_2 (r_0 \gamma t) \quad (70)$$

$$= r_0 (p_0 \alpha + t p_1 \beta + t p_2 \gamma) \quad (71)$$

より, $r_0 > 0$ であることから

$$1 = p_0 \alpha + t p_1 \beta + t p_2 \gamma \quad (72)$$

を得る. 同様に r_1, r_2 から

$$1 = tp_0\alpha + p_1\beta + tp_2\gamma, \quad (73)$$

$$1 = tp_0\alpha + tp_1\beta + p_2\gamma \quad (74)$$

を得る.

ここで, 式 (72) から式 (73) を引くと

$$0 = p_0\alpha - tp_0\alpha + tp_1\beta - p_1\beta \quad (75)$$

$$= (1-t)(p_0\alpha - p_1\beta) \quad (76)$$

となる. ここで

$$t \neq 1 \quad (77)$$

と仮定する. すると

$$p_0\alpha = p_1\beta \quad (78)$$

を得る. 同様に, 式 (72) から式 (74) を引けば

$$p_0\alpha = p_2\gamma \quad (79)$$

が得られる. したがって,

$$p_0\alpha = p_1\beta = p_2\gamma \triangleq k \quad (80)$$

とおける.

式 (80) を式 (72) に代入すると

$$1 = k + tk + tk = k(1 + 2t) \quad (81)$$

より

$$k = \frac{1}{1 + 2t} \quad (82)$$

が得られる. 従って

$$\alpha = \frac{k}{p_0} = \frac{1}{p_0(1 + 2t)}, \quad \beta = \frac{k}{p_1} = \frac{1}{p_1(1 + 2t)}, \quad \gamma = \frac{k}{p_2} = \frac{1}{p_2(1 + 2t)} \quad (83)$$

となる.

次に, (40) に (63), (64), (65) および (83) を代入して整理すると,

$$D = \frac{2t}{1 + 2t} \quad (84)$$

が得られる．よって $t = 1$ は $D = \frac{2}{3}$ と同値である．一方，本節では $0 \leq D < 2p_2$ かつ $p_2 < \frac{1}{3}$ より $2p_2 < \frac{2}{3}$ となり，

$$0 \leq D < \frac{2}{3} \quad (85)$$

が成り立つ．従って $D \neq \frac{2}{3}$ であり， $t \neq 1$ となる．よって仮定した (77) は正しい．(84) を t について解くと

$$t = \frac{D}{2 - 2D} \quad (86)$$

が得られるため，

$$1 + 2t = 1 + \frac{2D}{2 - 2D} = \frac{2}{2 - 2D} = \frac{1}{1 - D} \quad (87)$$

となる．これを式 (83) に代入すると，

$$\alpha = \frac{1 - D}{p_0}, \quad \beta = \frac{1 - D}{p_1}, \quad \gamma = \frac{1 - D}{p_2} \quad (88)$$

を得る．

この結果を (63), (64), (65) のすべての q_{ji} に代入して整理すると， $0 \leq D < 2p_2$ の範囲における最適な条件付き確率は

$$q_{00} = \frac{(2 - 2D)(2p_0 - D)}{2p_0(2 - 3D)}, \quad (89)$$

$$q_{10} = \frac{D(2p_1 - D)}{2p_0(2 - 3D)}, \quad (90)$$

$$q_{20} = \frac{D(2p_2 - D)}{2p_0(2 - 3D)}, \quad (91)$$

$$q_{01} = \frac{D(2p_0 - D)}{2p_1(2 - 3D)}, \quad (92)$$

$$q_{11} = \frac{(2 - 2D)(2p_1 - D)}{2p_1(2 - 3D)}, \quad (93)$$

$$q_{21} = \frac{D(2p_2 - D)}{2p_1(2 - 3D)}, \quad (94)$$

$$q_{02} = \frac{D(2p_0 - D)}{2p_2(2 - 3D)}, \quad (95)$$

$$q_{12} = \frac{D(2p_1 - D)}{2p_2(2 - 3D)}, \quad (96)$$

$$q_{22} = \frac{(2 - 2D)(2p_2 - D)}{2p_2(2 - 3D)} \quad (97)$$

で与えられる. (89)–(97) を (41) に代入し整理すると, (29) より $0 \leq D < 2p_2$ の範囲でのレート歪み関数は

$$R(D) = \frac{1}{2-3D} \sum_{i=0}^2 \left[(1-D)(2p_i - D) \log \frac{1-D}{p_i} + D(1-p_i - D) \log \frac{D}{2p_i} \right] \quad (98)$$

$$= H(X) - H\left(1-D, \frac{D}{2}, \frac{D}{2}\right) \quad (99)$$

となる. 上で導出した最適な条件付き確率 q_{ji} は, $0 \leq D < 2p_2$ の範囲において, すべての q_{ji} が非負となり, 最適解として成立する.

4.2 $2p_2 \leq D < 1 - p_0$ の場合

許容歪み D が $D \geq 2p_2$ となると, (91), (94), (97) より

$$q_{20} = \frac{D(2p_2 - D)}{2p_0(2 - 3D)} \leq 0, \quad q_{21} = \frac{D(2p_2 - D)}{2p_1(2 - 3D)} \leq 0, \quad q_{22} = \frac{(2 - 2D)(2p_2 - D)}{2p_2(2 - 3D)} \leq 0 \quad (100)$$

となることが分かる. したがって $D \geq 2p_2$ の範囲では, 「すべての復元記号が正の確率で出現する」という内部解の条件が崩れ, 前節で導出した条件付き確率は KKT 条件 [2][3] を満たす最適解とはならない. このため, $D \geq 2p_2$ の場合には, 新たに最適な条件付き確率を導出する必要がある.

領域 $D \geq 2p_2$ では, まず, 復元記号 $\hat{X} = 2$ の出現確率 r_2 は正であると仮定して固定する. そのもとで, 後の KKT 条件に合わせるため, q_{20}, q_{21}, q_{22} を r_2 の関数として

$$q_{20} = \frac{p_0}{D - p_2} r_2, \quad (101)$$

$$q_{21} = \frac{p_1}{D - p_2} r_2, \quad (102)$$

$$q_{22} = \frac{D - p_2}{1 - D} r_2 \quad (103)$$

と置き, ラグランジュの未定乗数法で条件付確率を求めていく. ラグランジュの未定乗数法を

用いて導出した条件付確率 q_{ji} に対して, $r_2 \rightarrow 0$ を取ると

$$q_{00} \rightarrow \frac{(p_1 + D - 1)(1 - D)}{p_0(2D - p_2 - 1)}, \quad (104)$$

$$q_{01} \rightarrow \frac{(p_1 + D - 1)(D - p_2)}{p_1(2D - p_2 - 1)}, \quad (105)$$

$$q_{02} \rightarrow \frac{p_1 + D - 1}{2D - p_2 - 1}, \quad (106)$$

$$q_{10} \rightarrow \frac{(p_0 + D - 1)(D - p_2)}{p_0(2D - p_2 - 1)}, \quad (107)$$

$$q_{11} \rightarrow \frac{(p_0 + D - 1)(1 - D)}{p_1(2D - p_2 - 1)}, \quad (108)$$

$$q_{12} \rightarrow \frac{p_0 + D - 1}{2D - p_2 - 1}, \quad (109)$$

$$q_{20} \rightarrow 0, \quad (110)$$

$$q_{21} \rightarrow 0, \quad (111)$$

$$q_{22} \rightarrow 0 \quad (112)$$

となる. しかし, (104)-(112) が分布となるのは, $D \leq 1 - p_0$ のときに限る. このとき復元側から記号 2 が消失して \mathcal{X} は事実上 $\{0, 1\}$ の 2 元に縮退する.

導出した q_{ji} が $2p_2 \leq D < 1 - p_0$ に対して最適かどうかを KKT 条件によって確かめる. $D = 1 - p_0$ の場合は次のステップで確認する. この問題における不等号制約は非負制約と歪み制約より, 非負制約を

$$g_{ji}(q^*) = -q_{ji} \quad (j, i \in \{0, 1, 2\}) \quad (113)$$

とおく. 歪み制約を

$$g_1(q^*) = p_0(q_{10} + q_{20}) + p_1(q_{01} + q_{21}) + p_2(q_{02} + q_{12}) - D \quad (114)$$

とおく. 等号制約を

$$h_i(q) = \sum_{j=0}^2 q_{ji} - 1 = 0 \quad (i = 0, 1, 2) \quad (115)$$

とする. 非負制約の乗数を μ_{ji} , 歪み制約の乗数を μ_1 , 列和制約の乗数を $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ とすると

$$-\nabla I(q^*) = \sum_{j,i} \mu_{ji} \nabla g_{ji}(q^*) + \mu_1 \nabla g_1(q^*) + \lambda_0 \nabla h_0(q^*) + \lambda_1 \nabla h_1(q^*) + \lambda_2 \nabla h_2(q^*), \quad (116)$$

$$\mu_{ji} \geq 0, \quad g_{ji}(q^*) \leq 0, \quad \mu_{ji} g_{ji}(q^*) = 0, \quad (\forall i, j) \quad (117)$$

$$\mu_1 \geq 0, \quad g_1(q^*) \leq 0, \quad \mu_1 g_1(q^*) = 0, \quad (118)$$

$$h_0(q^*) = h_1(q^*) = h_2(q^*) = 0 \quad (119)$$

を満たし, $\mu_{ji}, \mu_1, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ が存在すればよい [2][3]. KKT 条件を考慮している範囲では $q_{ji} > 0$ より $g_{ji}(q^*) \leq 0$ となり, $\mu_{ji}g_{ji}(q^*) = 0$ より $\mu_{ji} = 0$ となる. また, ラグランジュの未定乗数法で制約として用いているので, $h_0(q^*) = h_1(q^*) = h_2(q^*) = 0$, $g_1(q^*) = 0$ が成り立つことを用いると

$$-\frac{\partial I}{\partial q_{00}}(q^*) = \lambda_0, \quad (120)$$

$$-\frac{\partial I}{\partial q_{10}}(q^*) = p_0\mu_1 + \lambda_0, \quad (121)$$

$$-\frac{\partial I}{\partial q_{20}}(q^*) = p_0\mu_1 + \lambda_0, \quad (122)$$

$$-\frac{\partial I}{\partial q_{01}}(q^*) = p_1\mu_1 + \lambda_1, \quad (123)$$

$$-\frac{\partial I}{\partial q_{11}}(q^*) = \lambda_1, \quad (124)$$

$$-\frac{\partial I}{\partial q_{21}}(q^*) = p_1\mu_1 + \lambda_1, \quad (125)$$

$$-\frac{\partial I}{\partial q_{02}}(q^*) = p_2\mu_1 + \lambda_2, \quad (126)$$

$$-\frac{\partial I}{\partial q_{12}}(q^*) = p_2\mu_1 + \lambda_2, \quad (127)$$

$$-\frac{\partial I}{\partial q_{22}}(q^*) = \lambda_2 \quad (128)$$

を得る. (120)~(128) を満たす $\mu_1, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ が存在すれば, 導出した q_{ji} が最適といえる.

まず

$$\frac{\partial I}{\partial q_{00}}(q^*) = p_0 \log \frac{q_{00}}{r_0} \xrightarrow{r_2 \rightarrow 0} p_0 \log \frac{1-D}{p_0} \quad (129)$$

なので, (120) より

$$\lambda_0 = -p_0 \log \frac{1-D}{p_0} \quad (130)$$

が得られる. 次に

$$\frac{\partial I}{\partial q_{10}}(q^*) = p_0 \log \frac{q_{10}}{r_1} \xrightarrow{r_2 \rightarrow 0} p_0 \log \frac{D-p_2}{p_0} \quad (131)$$

なので, (121) より

$$-p_0 \log \frac{D-p_2}{p_0} = p_0\mu_1 + \lambda_0 = p_0\mu_1 - p_0 \log \frac{1-D}{p_0} \quad (132)$$

となる。したがって

$$\mu_1 = \log \frac{1-D}{D-p_2} \quad (133)$$

が得られる。同様に

$$\frac{\partial I}{\partial q_{11}}(q^*) = p_1 \log \frac{q_{11}}{r_1} \xrightarrow{r_2 \rightarrow 0} p_1 \log \frac{1-D}{p_1} \quad (134)$$

なので, (124) より

$$\lambda_1 = -p_1 \log \frac{1-D}{p_1} \quad (135)$$

が得られる。

$q_{02} = r_0$, $q_{12} = r_1$ より

$$\frac{\partial I}{\partial q_{02}}(q^*) = p_2 \log \frac{q_{02}^*}{r_0} \xrightarrow{r_2 \rightarrow 0} p_2 \log 1 = 0, \quad (136)$$

$$\frac{\partial I}{\partial q_{12}}(q^*) = p_2 \log \frac{q_{12}^*}{r_1} \xrightarrow{r_2 \rightarrow 0} p_2 \log 1 = 0 \quad (137)$$

となり, (126) または (127) より

$$0 = p_2 \mu_1 + \lambda_2 \quad (138)$$

$$\lambda_2 = -p_2 \log \frac{1-D}{D-p_2} \quad (139)$$

が得られる。

(133), (135) より

$$p_1 \mu_1 + \lambda_1 = p_1 \log \frac{1-D}{D-p_2} - p_1 \log \frac{1-D}{p_1} \quad (140)$$

$$= p_1 \log \frac{p_1}{D-p_2} \quad (141)$$

$$= -\frac{\partial I}{\partial q_{21}}(q^*) \quad (142)$$

が成り立ち (123) も満たす。よってあとは (122), (125), (128) を満たせばよい。

まず

$$\frac{\partial I}{\partial q_{20}}(q^*) = p_0 \log \frac{q_{20}}{r_2} = p_0 \log \frac{q_{20}}{p_0 q_{20} + p_1 q_{21} + p_2 q_{22}} \quad (143)$$

$$= -p_0 \log \left(p_0 + p_1 \frac{q_{21}}{q_{20}} + p_2 \frac{q_{22}}{q_{20}} \right) \quad (144)$$

となる. (122) と (133), (130) より

$$p_0\mu_1 + \lambda_0 = p_0 \log \frac{1-D}{D-p_2} - p_0 \log \frac{1-D}{p_0} = -p_0 \log \frac{D-p_2}{p_0} \quad (145)$$

を得る. よって \log の中身を比較すると

$$p_0 + p_1 \frac{q_{21}}{q_{20}} + p_2 \frac{q_{22}}{q_{20}} = \frac{D-p_2}{p_0} \quad (146)$$

となる. 次に

$$\frac{\partial I}{\partial q_{21}}(q^*) = p_1 \log \frac{q_{21}}{r_2} = p_1 \log \frac{q_{21}}{p_0 q_{20} + p_1 q_{21} + p_2 q_{22}} \quad (147)$$

$$= -p_1 \log \left(p_0 \frac{q_{20}}{q_{21}} + p_1 + p_2 \frac{q_{22}}{q_{21}} \right) \quad (148)$$

となる. (125) と (133), (135) より

$$p_1\mu_1 + \lambda_1 = p_1 \log \frac{1-D}{D-p_2} - p_1 \log \frac{1-D}{p_1} = -p_1 \log \frac{D-p_2}{p_1} \quad (149)$$

を得る. したがって

$$p_0 \frac{q_{20}}{q_{21}} + p_1 + p_2 \frac{q_{22}}{q_{21}} = \frac{D-p_2}{p_1} \quad (150)$$

となる. 同様に

$$\frac{\partial I}{\partial q_{22}}(q^*) = p_2 \log \frac{q_{22}}{r_2} = p_2 \log \frac{q_{22}}{p_0 q_{20} + p_1 q_{21} + p_2 q_{22}} \quad (151)$$

$$= -p_2 \log \left(p_0 \frac{q_{20}}{q_{22}} + p_1 \frac{q_{21}}{q_{22}} + p_2 \right) \quad (152)$$

となる. (128) と (139) より

$$\lambda_2 = p_2 \log \left(p_0 \frac{q_{20}}{q_{22}} + p_1 \frac{q_{21}}{q_{22}} + p_2 \right) = -p_2 \log \frac{1-D}{D-p_2} \quad (153)$$

を得る. したがって

$$p_0 \frac{q_{20}}{q_{22}} + p_1 \frac{q_{21}}{q_{22}} + p_2 = \frac{1-D}{D-p_2} \quad (154)$$

となり, (146), (150), (154) が成り立てば KKT 条件が満たされる.

$r_2 = p_0 q_{20} + p_1 q_{21} + p_2 q_{22}$ を用いると, (154) は

$$r_2 = \left(p_0 \frac{q_{20}}{q_{22}} + p_1 \frac{q_{21}}{q_{22}} + p_2 \right) q_{22} = \frac{1-D}{D-p_2} q_{22} \quad (155)$$

となる．よって

$$q_{22} = \frac{D - p_2}{1 - D} r_2 \quad (156)$$

を得る．同様に (146), (150) から

$$r_2 = \frac{D - p_2}{p_0} q_{20} \Rightarrow q_{20} = \frac{p_0}{D - p_2} r_2, \quad (157)$$

$$r_2 = \frac{D - p_2}{p_1} q_{21} \Rightarrow q_{21} = \frac{p_1}{D - p_2} r_2 \quad (158)$$

が得られる．これは最初に置いた (101), (102), (103) と一致する．よって (146), (150), (154) の等式が成り立つ．したがって導出した q_{ji} は $r_2 \rightarrow 0$ の極限において KKT 条件を満たす．

よって (104)–(112) を (8) に代入して整理すると, (29) より $2p_2 \leq D < 1 - p_0$ の範囲でのレート歪み関数は

$$R(D) = (D - p_2) \log(D - p_2) + (1 - D) \log(1 - D) - p_0 \log p_0 - p_1 \log p_1 \quad (159)$$

$$= H(X) - H(1 - D, D - p_2, p_2) \quad (160)$$

となる．

4.3 $D \geq 1 - p_0$ の場合

$D = 1 - p_0$ のとき (104)–(112) より

$$q_{0i} = 1, \quad q_{1i} = 0, \quad q_{2i} = 0 \quad (i = 0, 1, 2) \quad (161)$$

が成立する．すなわち \hat{X} は常に 0 を出力し, $I(X; \hat{X}) = 0$ となる．よって $D \geq 1 - p_0$ の範囲では $R(D) = 0$ となる．

4.4 相互情報量とレート歪み関数

以上の結果より, 歪み D の範囲ごとに, 最適な条件付き確率 q_{ji} が異なることが明らかになった．各区間で得られた結果を相互情報量に代入して整理し, それらを統合したレート歪み関数 $R(D)$ は

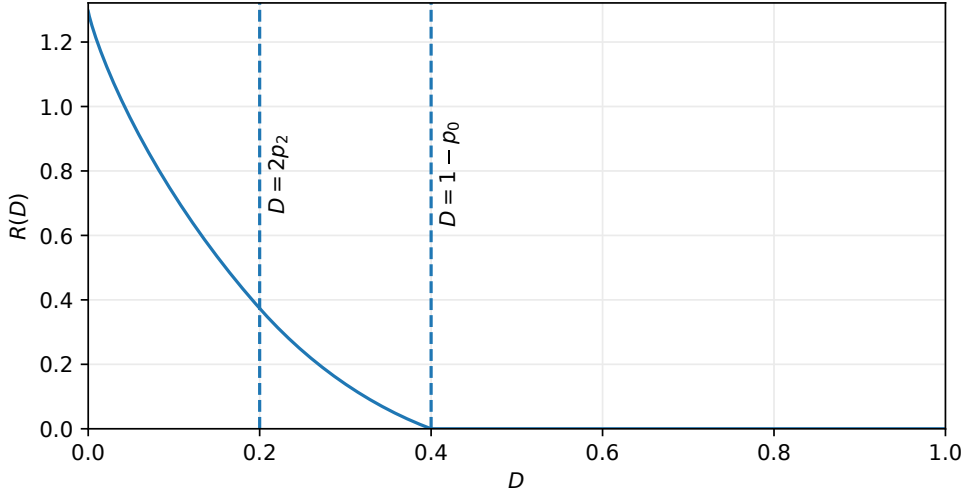


図2 3情報源(0.6,0.3,0.1)に対してハミング歪みを適用したレート歪み関数

$$\begin{aligned}
 R(D) &= \min_{\hat{X}: \mathbb{E}[d(X, \hat{X})] \leq D} I(X; \hat{X}) \\
 &= \begin{cases} H(X) - H\left(1 - D, \frac{D}{2}, \frac{D}{2}\right), & 0 \leq D < 2p_2 \\ H(X) - H(1 - D, D - p_2, p_2), & 2p_2 \leq D < 1 - p_0 \\ 0, & 1 - p_0 \leq D \end{cases} \quad (162)
 \end{aligned}$$

となる。この結果をグラフとして示したものが図2および図3である。図2は $p_0 > p_1 > p_2$ を満たす確率分布に対するレート歪み関数を示している。図2では、第一区間と第二区間で式が切り替わっているが、 $D = 2p_2$ の時の値と傾きが同じなので滑らかに接続されている。一方、図3は $p_0 = p_1 = p_2 = \frac{1}{3}$ の場合であり、このときは $2p_2 = 1 - p_0$ が成り立つため、第2区間 $2p_2 \leq D < 1 - p_0$ が消失する。その結果、レート歪み関数は第1区間から直接 $R(D) = 0$ に接続される形となる。

5 まとめ

本研究では2元情報源から3元情報源へ拡張してハミング歪みを適用したレート歪み関数をラグランジュの未定乗数法を用いて導出した。その結果許容歪みが大きくなるにつれて復元記号の一部が不要となり、 $2p_2 \leq D < 1 - p_0$ の範囲で出力が3元から2元に縮退することを

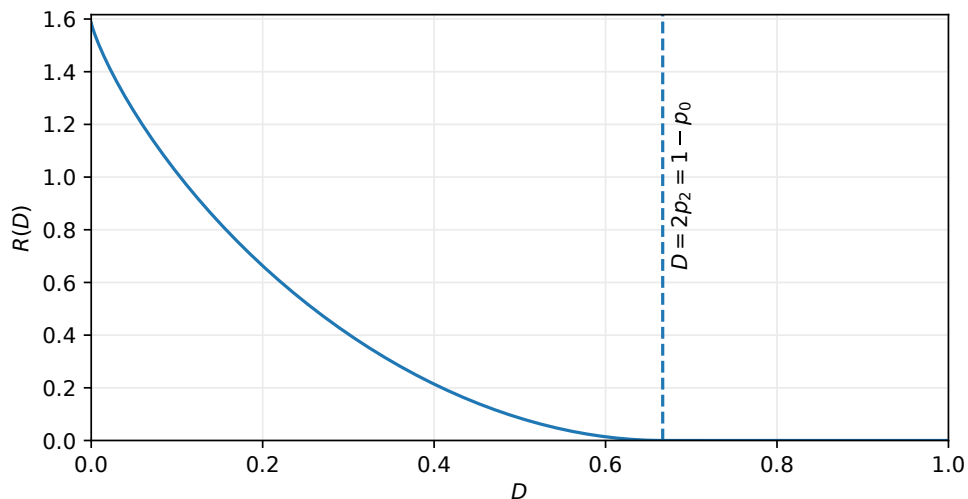


図3 3元情報源 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ に対してハミング歪みを適用したレート歪み関数

確認した。また、3値が同じ確率の場合は出力が3元から2元に縮退せずにレートが0になることが分かった。

また、本研究では $D > 2p_2$ の範囲で条件付確率を求めるときに最初に (101), (102), (103) とおいて導出をした。この操作は、境界で $q_{2i} = 0$ を直接仮定する代わりに、まず $r_2 > 0$ のもとで KKT 条件を満たす形で q_{2i} を与えた。そして最後に $r_2 \rightarrow 0$ を取ることで r_2 が小さくなるにつれて q_{20}, q_{21}, q_{22} も同時に小さくなり、最終的に復元記号2が消失する状況を自然に記述できた。

2元情報源のレート歪み関数と3元情報源のレート歪み関数を比較してみると、どちらももとの情報源がもっている不確かさ $H(X)$ から、歪みを許したことによって生じる曖昧さのエントロピーを引いた形となっている。このことから n 元へ拡張した場合でもレート歪み関数が $R(D) = H(X) - H()$ のような形で表されるのではないかと考察できる。

今後の課題として、まず n 元情報源への一般化が挙げられる。特に、 n の増加に伴って出力がどのように段階的に縮退するかを確認していきたい。さらに、レート歪み関数が考察の通りの形で表せられるかも確認したい。また、本研究ではハミング歪みを対象としたが、より一般的な歪み尺度に対しても同様の解析が可能か検討していきたい。

謝辞

本研究を行うにあたり、丁寧なご指導を賜りました指導教員の西新幹彦准教授に感謝の意を表す。また、(162)式の簡略化について貴重なご助言を賜りました福井大学岩田賢一教授に深く感謝申し上げます。

参考文献

- [1] T. Cover, J. Thomas, Elements of Information Theory 2nd ed., Wiley, 2006.
- [2] 坂和正敏, 非線形システムの最適化, 森北出版株式会社, 1996.
- [3] 関口良行, はじめての最適化, 近代科学社, 2014.