信州大学
大学院総合理工学研究科

修士論文

系列により許容歪みを変化させたレート・歪み定理

指導教員　西新 幹彦 准教授

専攻　工学専攻
分野　情報・融合システム工学分野
学籍番号　24W6045D
氏名　塚田 新

2026 年 2 月 18 日

目次

1　はじめに

現在の情報化社会においては，膨大な量の情報が日々やり取りされており，通信の効率化は極めて重要な課題である．通信システムにおいては，通常，情報源と受信者の間に符号器および復号器が設けられ，符号器は情報源を符号化し，復号器は受信した符号語をもとに情報源の復元を行う．通信の効率を向上させるとは，一般にデータの圧縮率を高めることを意味し，本研究では符号化レートを小さくすることと同義であると捉える．

しかし，符号化レートを無制限に小さくすると，受信者に伝えるべき情報を正確に復元することは不可能となる．そこで情報理論では，情報源と復号器出力の間に誤りが生じる確率が漸近的に零となるという制約の下で，符号化レートをどこまで小さくできるかという問題が考察されてきた．その代表的な結果として，Shannon による情報源符号化定理が知られている．

さらに，条件を緩和し，情報源と復号器出力の間に一定の違いを許容する問題設定も考えられている．例えば動画視聴においては，情報源と完全に一致しない映像であっても，人間の視覚では違いを知覚できない場合が多い．一般に，情報源と復号器出力の間の違いを許容することで，それを許容しない場合と比べて，符号化レートをより小さくすることが可能となる．情報理論では，この違いを歪みという尺度で定量化し，平均歪みが一定値以下となる条件の下で達成可能な最小符号化レートを求める問題は，レート・歪み問題として広く研究されてきた．

従来のレート・歪み理論では，任意の情報源系列に対して同一の歪み制約 D 以下で復元することを目的としていた．しかし実際の応用においては，許容できる歪みが送信内容に依存して変化する場合が多い．例えば，送信する情報源系列が雲の写真である場合，多少ぼやけていても雲であることが判別できれば十分である．従って，受信者が受け取る写真の歪みが大きくても許容され，その分，符号化レートを小さくすることが可能となる．一方，人の顔の写真は重要度が高く，誰の顔であるかを識別できる品質が求められるため，許容される歪みは雲の写真の場合よりも小さく設定する必要がある．この結果，人の顔の写真に対しては，符号化レートを大幅に小さくすることは困難となる．

同様に, 受信者の立場から見れば，復号系列に依存して許容歪みを変化させたい場合もある．まとめると，許容歪みを変化させる要因として情報源系列または復号系列が考えられる．しかしこれらを別々に取り扱う必要はない．問題の定式化としてはそのどちらにも依存して変化する許容歪みを考えれば十分である．

本論文では，一般情報源に対する固定長最大歪み符号化の枠組みを拡張し，許容歪みが情報源系列と復号系列に依存して変化する問題設定を考え，符号化定理を導出する．さらに，歪みを確率的な歪みに拡張した問題設定も考え，これに対しても符号化定理を導出する．証明を通して，歪み測度が負の値を取ることを許せば，導出された符号化定理が従来の符号化定理に帰着されることを明らかにする．

2　数学的準備

本研究では一般情報源について考える．一般情報源とは，一般に定常性・無記憶性を仮定しない情報源であり，各 n に対して $\mathcal{X}^n$ 上の確率分布 P_{X^n} に従う確率変数 X^n の列 $\boldsymbol{X} \triangleq \{X^n = (X_1, X_2, \ldots, X_n)\}_{n=1}^{\infty}$ として表される．

ここで一般に $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数をとる任意の確率変数列として次を定義する．

定義 1 確率的上限を

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty} Z_n \triangleq \inf\left\{\alpha \,\middle|\, \lim_{n\to\infty} \Pr\{Z_n > \alpha\} = 0\right\} \tag{1}$$

と定義する．

定義 2 確率的下限を

$$\text{p-}\liminf_{n\to\infty} Z_n \triangleq \sup\left\{\beta \,\middle|\, \lim_{n\to\infty} \Pr\{Z_n < \beta\} = 0\right\} \tag{2}$$

と定義する．

さらに二つの確率変数列 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ について次を定義する．

定義 3　$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ に対して

$$\bar{I}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}) \triangleq \text{p-}\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{P_{X^n|Y^n}(X^n|Y^n)}{P_{X^n}(X^n)} \tag{3}$$

と定義し，これを $\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ の間の相互情報量スペクトル上限と呼ぶ．ここで $P_{X^n|Y^n}(x^n|y^n)$ は，$Y^n = y^n$ が与えられた下での $X^n = x^n$ の条件付き確率を表す．

3　レート・歪み理論

本章では，問題設定の基礎として，固定長符号化における最大歪み基準を採用した標準的なレート・歪み理論について記述する．情報源アルファベットを $\mathcal{X}$, 復号アルファベットを $\mathcal{Y}$ とする．各 n に対し，歪み測度 d_n を関数 $d_n : \mathcal{X}^n \times \mathcal{Y}^n \to [0, \infty)$ として定める．ここで $d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ $(\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n, \boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^n)$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の間の歪みと呼ぶ．

次に，符号化方式を定義する．M_n 個の符号語の集合を $\mathcal{M}_n = \{1, 2, ..., M_n\}$ とする．情報源系列 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n$ は符号器 $\varphi_n : \mathcal{X}^n \to \mathcal{M}_n$ で符号化される. さらに復号化は復号器 $\psi_n : \mathcal{M}_n \to \mathcal{Y}^n$ で行われる. ここで $\psi_n(m)$ を m の復号語という．また, 本論文では，復号系列として二種類の確率系列を区別する．$\boldsymbol{Y} = \{Y^n\}_{n=1}^{\infty}$ は評価および最適化のために導入する任意の確率系列を表す．一方で，$\widetilde{Y}^n \triangleq \psi_n(\varphi_n(X^n))$, $\widetilde{\boldsymbol{Y}} \triangleq \{\widetilde{Y}^n\}_{n=1}^{\infty}$ は，符号 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ により実際に生成される復号器出力系列を表す．一般に Y^n と $\widetilde{Y}^n$ は一致しない．

以下では一般情報源に対するレート・歪み関数のうち, 固定長最大歪み符号化問題を考えるため, 歪みの評価方法として用いる最大歪みを次のように定義する.

定義 4 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ の最大歪みを

$$\overline{D}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) \triangleq \text{p-}\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} d_n(X^n, Y^n) \tag{4}$$

と定義し, $\overline{D}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ を $\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ の間の最大歪みという.

また, 長さ n の情報源系列を符号化するために必要な 1 文字当たりの符号語長を符号化レートと呼び $\frac{1}{n}\log M_n$ と表す. 効率的な通信を行うためには, 歪みおよび符号化レートをできるだけ小さくすることが望ましいが, 両者はトレードオフの関係にあり, 同時に任意に小さくすることはできない. そこで本章では, 歪みおよび符号化レートに制約を課した場合の達成可能性の定義と, それに基づくレート・歪み関数について, 既存の理論を整理し確認する.

定義 5 二つの実数 R, D に対して, (R, D) が達成可能であるとは, ある符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して, $\widetilde{Y}^n \triangleq \psi_n(\varphi_n(X^n))$, $\widetilde{\boldsymbol{Y}} \triangleq \{\widetilde{Y}^n\}_{n=1}^{\infty}$ とおくとき,

$$\overline{D}(\boldsymbol{X},\widetilde{\boldsymbol{Y}}) \le D, \tag{5}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log M_n \le R \tag{6}$$

を満たすことをいう.

定義 6 レート・歪み関数は

$$R(D) \triangleq \inf\{R | (R, D) \text{ が達成可能 }\} \tag{7}$$

と定義される. レート・歪み理論における基本的な問題は, このレート・歪み関数を数学的に特徴付けることである.

また, 一般的なレート・歪み関数は相互情報量スペクトル上限を用いて以下のように表せることが知られている [3].

定理 1　レート・歪み関数 $R(D)$ は

$$R(D) = \inf_{\boldsymbol{Y}:\overline{D}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\le D} \bar{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) \tag{8}$$

と表される.

4　系列により許容歪みを変化させたレート・歪み定理

本章では，系列ごとに許容歪みの値を変化させた場合のレート・歪み理論について考察する．具体的には，固定長符号化および最大歪み基準の下で，系列に依存した歪み制約を導入した場合のレート・歪み定理を与える．以下では，[3, Section 4] における議論に基づき，これを本問題に適用することで定理を導く．

従来一定値として与えられていた歪み制約を，系列ごとに変化する関数 $D_n(X^n,Y^n)$ として定式化する．ここで $D_n(X^n,Y^n)$ は，長さ n の情報源系列 X^n と復号系列 Y^n に対して，許容される歪みの上限を表す関数である．すなわち，$d_n(X^n,Y^n)$ が実際に生じた歪みであるのに対し，$D_n(X^n,Y^n)$ は，当該系列に対してあらかじめ許容される歪みの基準を与えるものであり, 本章では，このような許容歪み関数を $\boldsymbol{D} \triangleq \{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ としてまとめて扱う．

なお，許容歪みが送信者側のみによって決定される場合には，$D_n(X^n,Y^n)$ は復号系列 Y^n に依存せず，情報源系列 X^n のみに依存する関数 $D_n(X^n)$ とみなすことができる．一方，許容歪みが受信者側のみによって決定される場合には，$D_n(X^n,Y^n)$ は情報源系列 X^n に依存せず，受信者系列 Y^n のみに依存する関数 $D_n(Y^n)$ とみなすことができる．従って，本章で扱う歪み制約は，送信者側決定型および受信者側決定型の歪み制約を特別な場合として包含する一般的な枠組みである．

定義 7 系列によって変化する $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ の最大歪みを

$$\overline{D}'(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{D}) \triangleq \text{p-}\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}(d_n(X^n,Y^n) - D_n(X^n,Y^n)) \tag{9}$$

と定義する．

また, この場合における達成可能の定義は以下のようになる．

定義 8 レート R が達成可能であるとは，ある符号の列 $\{(\varphi_n,\psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して，$\widetilde{Y}^n \triangleq \psi_n(\varphi_n(X^n))$，$\widetilde{\boldsymbol{Y}} \triangleq \{\widetilde{Y}^n\}_{n=1}^{\infty}$ とおくとき，

$$\overline{D}'(\boldsymbol{X},\widetilde{\boldsymbol{Y}}|\boldsymbol{D}) \le 0, \tag{10}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log M_n \le R \tag{11}$$

を満たすことをいう．

また, この制約の下で達成可能な最小レートを，本論文ではレート・歪み関数と呼び，次が成り立つ．

定理 2　系列によって許容歪みを変化させた場合のレート・歪み関数 $R^*(\boldsymbol{D})$ は

$$R^*(\boldsymbol{D}) = \inf_{\boldsymbol{Y}:\overline{D}'(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{D})\le 0} \bar{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) \tag{12}$$

で表される．

以降では順定理と逆定理に分けて定理 2 を示す．

4.1 順定理

まず, 順定理を示すために, 符号を構成するための補題を示す．以下の補題は, [3, Section 4] において示されている結果に基づくものであり，本論文ではこれをそのまま用いる．

補題 1 情報源 X^n に対し，それと相関のある Y^n を考える．また，R および γ を任意に与えられた正の定数とする．

$$\mathcal{B}_n(\boldsymbol{y}) \triangleq \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n \;\middle|\; \frac{1}{n} \log \frac{P_{X^n|Y^n}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y})}{P_{X^n}(\boldsymbol{x})} \le R - \gamma \right\} \tag{13}$$

とおく．また，$\mathcal{S}_n(\boldsymbol{y})$ を $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^n$ を引数とする $\mathcal{X}^n$ の任意の部分集合とする．このとき，ある符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して，

$$\begin{aligned} &\Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n(\psi_n(\varphi_n(X^n)))\} \\ &\quad \le \Pr\{X^n \notin \mathcal{B}_n(Y^n)\} + \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n(Y^n)\} + e^{-n\gamma} \end{aligned} \tag{14}$$

$$\frac{1}{n} \log M_n \le R \tag{15}$$

を満たす．

以下では，補題 1 を用いて，定理 2 の順定理を示す．

〔定理 2 の順定理の証明〕

$$R > R_0 \triangleq \inf_{\boldsymbol{Y}: \overline{D}'(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}|\boldsymbol{D}) \le 0} \bar{I}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}) \tag{16}$$

が達成可能であることを証明する．

$R - \gamma > R_0$ を満たす $\gamma > 0$ をとると，$\overline{D}'(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}|\boldsymbol{D}) \le 0$ を満たす確率系列 $\boldsymbol{Y}$ が存在して $R - \gamma > \bar{I}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y})$ である．

このとき，$\overline{D}'(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}|\boldsymbol{D})$ の定義より，任意の整数 $k > 0$ に対して

$$\lim_{n \to \infty} \Pr\left\{ \frac{1}{n} d_n(X^n, Y^n) - \frac{1}{n} D_n(X^n, Y^n) > \frac{1}{k} \right\} = 0 \tag{17}$$

である．ゆえに，十分に大きなすべての n で

$$\Pr\left\{ \frac{1}{n} d_n(X^n, Y^n) - \frac{1}{n} D_n(X^n, Y^n) > \frac{1}{k} \right\} < \frac{1}{k} \tag{18}$$

を満たし，各 n で最大の k が存在する．従って，この k に対して，$\gamma_n \triangleq \frac{1}{k}$ とすると，$\gamma_n \to 0 \quad (n \to \infty)$ かつ，

$$\Pr\left\{ \frac{1}{n} d_n(X^n, Y^n) - \frac{1}{n} D_n(X^n, Y^n) > \gamma_n \right\} < \gamma_n \tag{19}$$

となる (対角線論法). つづいて，$\mathcal{S}_n(\boldsymbol{y})$ を

$$\mathcal{S}_n(\boldsymbol{y}) \triangleq \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n \;\middle|\; \frac{1}{n} d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \frac{1}{n} D_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \le \gamma_n \right\} \tag{20}$$

と定義すると，補題 1 より，ある符号 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在し,$\tilde{Y}^n \triangleq \psi_n(\varphi_n(X^n))$ のもとで

$$\frac{1}{n} \log M_n \le R \tag{21}$$

$$\begin{aligned} &\Pr\left\{ \frac{1}{n} d_n(X^n, \widetilde{Y}^n) - \frac{1}{n} D_n(X^n, \widetilde{Y}^n) > \gamma_n \right\} \\ &\le \Pr\left\{ \frac{1}{n} \log \frac{P_{X^n|Y^n}(X^n \mid Y^n)}{P_{X^n}(X^n)} > R - \gamma \right\} \\ &\quad + \Pr\left\{ \frac{1}{n} d_n(X^n, Y^n) - \frac{1}{n} D_n(X^n, Y^n) > \gamma_n \right\} + e^{-n\gamma} \end{aligned} \tag{22}$$

を満たす．式 (22) の右辺について，$R - \gamma > \bar{I}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y})$ より，n が十分大きいとき, 第 1 項は 0 に漸近する．また，式 (19) により，n が十分大きいとき第 2 項も 0 に漸近する．従って，

$$\lim_{n \to \infty} \Pr\left\{ \frac{1}{n} d_n(X^n, \widetilde{Y}^n) - \frac{1}{n} D_n(X^n, \widetilde{Y}^n) > \gamma_n \right\} = 0 \tag{23}$$

である．ゆえに，

$$\operatorname*{p-lim\,sup}_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} d_n(X^n, \widetilde{Y}^n) - \frac{1}{n} D_n(X^n, \widetilde{Y}^n) - \gamma_n \right) \le 0 \tag{24}$$

であり，$\gamma_n \to 0 \quad (n \to \infty)$ であるので，

$$\operatorname*{p-lim\,sup}_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} d_n(X^n, \widetilde{Y}^n) - \frac{1}{n} D_n(X^n, \widetilde{Y}^n) \right) \le 0 \tag{25}$$

となる．これは達成可能性の式 (10) を満たすことを意味する．一方，式 (21) より達成可能性の式 (11) も満たされる．従って，レート R は達成可能である．R は式 (16) を満たす任意の実数だったので

$$R^*(\boldsymbol{D}) \le \inf_{\boldsymbol{Y}: \overline{D}'(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} | \boldsymbol{D}) \le 0} \bar{I}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}) \tag{26}$$

が結論される．□

4.2 逆定理

本節では，定理 2 の逆定理を示す．その準備として，以下の補題を用いる．この補題は，[1, 補題 2.4] に基づくものである．

補題 2　確率変数列 $\boldsymbol{Y}$ に対して，ある定数列 $\{M_n\}$ が存在し，

$$|\{\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y} \mid P_{Y^n}(\boldsymbol{y}) > 0\}| \leq M_n \tag{27}$$

を満たすならば，任意の $\gamma > 0$ に対して

$$\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{Y^n}(Y^n)} \geq \frac{1}{n}\log M_n + \gamma\right\} \leq e^{-n\gamma} \tag{28}$$

が成立する．

続いて，この補題を用いて定理 2 の逆定理を示す．

〔定理 2 の逆定理の証明〕最初に，レート R が達成可能であるとする．すなわち，

$$\operatorname*{p-lim\,sup}_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) - D_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n)))\right) \leq 0 \tag{29}$$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log M_n \leq R \tag{30}$$

を満たす符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在するとする．

ここで，$\widetilde{Y}^n \triangleq \psi_n(\varphi_n(X^n))$ とおくと，

$$\operatorname*{p-lim\,sup}_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}d_n(X^n, \widetilde{Y}^n) - D_n(X^n, \widetilde{Y}^n)\right) \leq 0 \tag{31}$$

が成立する．

続いて，$\widetilde{Y}^n$ の取りうる値の種類は高々 M_n である．従って，

$$\left|\left\{\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^n \;\middle|\; P_{\widetilde{Y}^n}(\boldsymbol{y}) > 0\right\}\right| \leq M_n \tag{32}$$

であるので，補題 2 より，任意の $\gamma > 0$ に対して

$$\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{\widetilde{Y}^n}(\widetilde{Y}^n)} \geq \frac{1}{n}\log M_n + \gamma\right\} \leq e^{-n\gamma} \tag{33}$$

が成立する．加えて，

$$\frac{1}{n}\log\frac{P_{\widetilde{Y}^n|X^n}(\widetilde{Y}^n|X^n)}{P_{\widetilde{Y}^n}(\widetilde{Y}^n)} \leq \frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{\widetilde{Y}^n}(\widetilde{Y}^n)}$$

より，

$$\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{P_{\widetilde{Y}^n|X^n}(\widetilde{Y}^n|X^n)}{P_{\widetilde{Y}^n}(\widetilde{Y}^n)} \geq \frac{1}{n}\log M_n + \gamma\right\} \leq e^{-n\gamma} \tag{34}$$

が成立する．

ここで，任意の $\gamma > 0$ に対して，十分大きなすべての n で，

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\log M_n &\le \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log M_n + \gamma \\ &\stackrel{(30)}{\le} R + \gamma \end{aligned} \tag{35}$$

がいえるので，

$$\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{P_{\widetilde{Y}^n|X^n}(\widetilde{Y}^n|X^n)}{P_{\widetilde{Y}^n}(\widetilde{Y}^n)} \ge R + 2\gamma\right\} \le e^{-n\gamma} \tag{36}$$

が成立する．従って, 相互情報量スペクトル上限の定義より

$$\bar{I}(\boldsymbol{X};\widetilde{\boldsymbol{Y}}) \le R + 2\gamma \tag{37}$$

である．ここで γ は任意であるので，

$$\bar{I}(\boldsymbol{X};\widetilde{\boldsymbol{Y}}) \le R \tag{38}$$

がいえる．

以上より，任意の達成可能レート R に対して，復号器出力系列 $\widetilde{\boldsymbol{Y}}$ が存在し，

$$\overline{D}'(\boldsymbol{X},\widetilde{\boldsymbol{Y}}) \le 0 \quad \text{かつ} \quad \bar{I}(\boldsymbol{X};\widetilde{\boldsymbol{Y}}) \le R$$

が成り立つ．従って，

$$R^*(\boldsymbol{D}) \ge \inf_{\boldsymbol{Y}:\overline{D}'(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{D})\le 0} \bar{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y})$$

が従う．□

以上，順定理と逆定理から得られた条件を組み合わせることにより，

$$R^*(\boldsymbol{D}) \triangleq \inf_{\boldsymbol{Y}:\overline{D}'(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{D})\le 0} \bar{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y})$$

が導かれた．これにより，定理 2 が示された．

5　確率的歪みを用いたレート歪み定理

本章では，歪み尺度を確率変数として拡張した確率的歪みを導入し，これに基づくレート・歪み理論を定式化する．

確率的歪みは，情報源 X^n と最終的に品質評価を行う受信者の間に，観測・伝送・後処理などの不確実な過程が介在する状況をモデル化するために導入する．典型例として，情報源出力はエンコーダに入力される前に観測雑音により劣化し，また復号出力も受信者に提示されるまでの伝送路や後段処理により追加の劣化を受け得る．このとき，符号化器・復号器が生成する復号器出力系列 $\widetilde{Y}^n$ が同一であっても，実際に受信者が観測する品質（歪み）は，これら不確実過程の実現に依存して変動する．従って歪みを確定的な関数 $d_n(X^n, Y^n)$ としてではなく，(X^n, Y^n) に条件付けられた確率変数としてモデル化する．

通常の歪み尺度では，情報源系列 $X^n = \boldsymbol{x}$ と復号系列 $Y^n = \boldsymbol{y}$ が与えられたとき，それらの間の歪みは確定的に定まる実数値として定義される．一方，確率的歪みでは，同じ $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対しても歪みの値が確率的に変動し，一定の分布に従う確率変数として与えられる．ここで，各 n に対し，(X^n, Y^n) に条件付けられた実数値確率変数 Δ_n を確率的歪みとして導入する．本章では，X^n および Y^n が与えられた後に歪み Δ_n が生成されるモデルを仮定する．このとき，Δ_n は対応する条件付き（累積）分布関数によって特徴付けられる．

定義 9 確率的歪みの分布関数を

$$F_n(d \mid \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \triangleq \Pr\left\{ \frac{1}{n}\Delta_n \le d \,\middle|\, X^n = \boldsymbol{x},\ Y^n = \boldsymbol{y} \right\} \tag{39}$$

と定義する．ここで $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n$, $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^n$ である．

次に，固定長最大歪み符号化問題を考える．

定義 10 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ の最大歪みを

$$\overline{D_\delta}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \triangleq \inf\left\{ d \,\middle|\, \text{p-}\limsup_{n\to\infty} \overline{F}_n(d \mid X^n, Y^n) \le \delta \right\} \tag{40}$$

と定義する．ここで，$\boldsymbol{X} = \{X^n\}_{n=1}^\infty$，$\boldsymbol{Y} = \{Y^n\}_{n=1}^\infty$ と，$\overline{F}_n(d \mid X^n, Y^n) \triangleq 1 - F_n(d \mid X^n, Y^n)$ は (X^n, Y^n) に関する確率変数である．

また, 式 (40) の $\delta \in [0, 1)$ は歪み超過確率の許容レベルを表す定数である．すなわち，$\overline{D_\delta}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ は，確率的歪み Δ_n がしきい値 d を超過する確率が δ 以下となるような最小の d を意味する．この意味で，$\delta = 0$ の場合には，歪み超過が確率的にほとんど起こらない最大歪み制約を与え，$\delta > 0$ の場合には，歪み超過を確率 δ まで許容する緩和された最大歪み制約を表す．

従って，確率的歪みにおける達成可能性の定義は以下のようになる．

定義 11 (R, D) が達成可能とは

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M_n \le R \tag{41}$$

$$\overline{D_\delta}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \le D \tag{42}$$

を満たす符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在することである．ただし M_n は符号語数であり D は実数値である．

定義 11 の達成可能性の下で，確率的歪み制約に対するレート・歪み関数は，[3] において示されているように，相互情報量スペクトル上限を用いて次式で与えられる．

定理 3　レート・歪み関数 $R(\delta, D)$ は

$$R(\delta, D) = \inf_{\boldsymbol{Y}:\overline{D_\delta}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\le D} \bar{I}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}) \tag{43}$$

で与えられる．

6　系列により許容範囲を変化させた確率的レート・歪み定理

本章では, 歪みが確率的歪みの場合における, 系列によって許容できる歪みの値を変化させた場合のレート・歪み定理を証明する．

まず初めに, 系列によって歪みの許容値 $D_n(x, y)$ が変化する場合の確率的歪みの定義を考える．

定義 12 確率的歪みを

$$\begin{aligned}
F'_n(d \mid \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \Pr\left\{ \frac{1}{n}(\Delta_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - D_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) \le d \,\middle|\, X^n = \boldsymbol{x},\, Y^n = \boldsymbol{y} \right\} && (44)\\
&= \Pr\left\{ \frac{1}{n}\Delta_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \le d + \frac{1}{n} D_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \,\middle|\, X^n = \boldsymbol{x},\, Y^n = \boldsymbol{y} \right\} && (45)\\
&= F_n\left(d + \frac{1}{n} D_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \,\middle|\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \right) && (46)
\end{aligned}$$

と定義する．ここで $x \in \mathcal{X}^n$, $y \in \mathcal{Y}^n$ である．

前章同様に最大歪みは次のように定義することが出来る．

定義 13 $(\boldsymbol{X}$,$\boldsymbol{Y})$ の最大歪みを

$$\overline{D_\delta}'(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \mid \boldsymbol{D}) \triangleq \inf\left\{ d \,\middle|\, \text{p-}\limsup_{n\to\infty} \overline{F}'_n(d \mid X^n, Y^n) \le \delta \right\} \tag{47}$$

と定義する．

従って, 確率的歪みにおける達成可能性の定義は以下のようになる.

定義 14　レート R が達成可能であるとは,

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log M_n \le R \tag{48}$$

$$\overline{D_\delta}'(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\mid\boldsymbol{D})\le 0 \tag{49}$$

を満たす符号の列 $\{(\varphi_n,\psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在することである.

本章では，4 章と同様に系列ごとに許容歪みが変化する歪み関数 $D_n(X^n,Y^n)$ を導入するが，歪み制約としては，定義 13 で導入した系列依存の最大歪み $\overline{D_\delta}'(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\mid\boldsymbol{D})\le 0$ のみを課して議論を行う.

この制約の下でのレート・歪み関数を次で与える.

定理 4　レート・歪み関数 $R^*(\delta,\boldsymbol{D})$ は

$$R^*(\delta,\boldsymbol{D})=\inf_{\boldsymbol{Y}:\overline{D_\delta}'(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{D})\le 0}\bar{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) \tag{50}$$

で与えられる．以降では順定理と逆定理に分けて定理 4 を示す.

6.1　順定理

本節では，補題 1 で構成した符号を用いて，定理 4 の順定理を示す.

〔定理 4 の順定理の証明〕

$$R>R_0\triangleq\inf_{\boldsymbol{Y}:\overline{D_\delta}'(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{D})\le 0}\bar{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) \tag{51}$$

が達成可能であることを示す．すなわち，ある符号の列 $\{(\varphi_n,\psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して，$\widetilde{Y}^n\triangleq\psi_n(\varphi_n(X^n))$，$\widetilde{\boldsymbol{Y}}\triangleq\{\widetilde{Y}^n\}_{n=1}^{\infty}$ とおくとき,

$$\overline{D_\delta}'(\boldsymbol{X},\widetilde{\boldsymbol{Y}}\mid\boldsymbol{D})\le 0,\qquad \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log M_n\le R \tag{52}$$

が成り立つことを示せばよい.

$R-\gamma>R_0$ を満たす任意の $\gamma>0$ を取る．このとき定義より, ある確率系列 $\boldsymbol{Y}=\{Y^n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して

$$\overline{D_\delta}'(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\mid\boldsymbol{D})\le 0,\qquad \bar{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y})<R-\gamma \tag{53}$$

を満たす.

ここで $\overline{D_\delta}'(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\mid\boldsymbol{D})\le 0$ より, $k>0$ に対して

$$\inf\left\{d\ \middle|\ \text{p-}\limsup_{n\to\infty}\overline{F}_n\!\left(d+\frac{1}{n}D_n(X^n,Y^n)\middle|\,X^n,Y^n\right)\le\delta\right\}<\frac{1}{k} \tag{54}$$

を満たす．従って

$$\operatorname*{p\text{-}\limsup}_{n\to\infty} \overline{F}_n\!\left(d+\frac{1}{n}D_n(X^n,Y^n)+\frac{1}{k}\,\middle|\, X^n,Y^n\right)\le\delta \tag{55}$$

が成り立つ．また, p-$\limsup$ の定義から

$$\lim_{n\to\infty}\Pr\left\{\overline{F}_n\!\left(d+\frac{1}{n}D_n(X^n,Y^n)+\frac{1}{k}\,\middle|\, X^n,Y^n\right)>\delta+\frac{1}{k}\right\}=0 \tag{56}$$

である．ゆえに，十分大きなすべての n で

$$\Pr\left\{\overline{F}_n\!\left(d+\frac{1}{n}D_n(X^n,Y^n)+\frac{1}{k}\,\middle|\, X^n,Y^n\right)>\delta+\frac{1}{k}\right\}<\frac{1}{k} \tag{57}$$

を満たす．各 n に対して条件を満たす最大の k を取り，$\gamma_n\triangleq\frac{1}{k}$ とおくと，$\gamma_n\to 0$ $(n\to\infty)$ かつ

$$\Pr\left\{\overline{F}_n\!\left(d+\frac{1}{n}D_n(X^n,Y^n)+\gamma_n\,\middle|\, X^n,Y^n\right)>\delta+\gamma_n\right\}<\gamma_n \tag{58}$$

が成り立つ（対角線論法）．従って

$$\lim_{n\to\infty}\Pr\left\{\overline{F}_n\!\left(d+\frac{1}{n}D_n(X^n,Y^n)+\gamma_n\,\middle|\, X^n,Y^n\right)>\delta+\gamma_n\right\}=0 \tag{59}$$

を得る．つづいて，各 n と $\boldsymbol{y}\in\mathcal{Y}^n$ に対して

$$\mathcal{S}_n(\boldsymbol{y})\triangleq\left\{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}^n\,\middle|\,\overline{F}_n\!\left(d+\frac{1}{n}D_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\gamma_n\,\middle|\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)\le\delta+\gamma_n\right\} \tag{60}$$

と定義する．このとき補題 1 より，ある符号の列 $\{(\varphi_n,\psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して

$$\frac{1}{n}\log M_n\le R \tag{61}$$

$$\begin{aligned}
&\Pr\left\{\overline{F}_n\!\left(d+\frac{1}{n}D_n(X^n,\widetilde{Y}^n)+\gamma_n\,\middle|\, X^n,\widetilde{Y}^n\right)>\delta+\gamma_n\right\}\\
&\le\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{P_{X^n|Y^n}(X^n\mid Y^n)}{P_{X^n}(X^n)}>R-\gamma\right\}\\
&\quad+\Pr\left\{\overline{F}_n\!\left(d+\frac{1}{n}D_n(X^n,Y^n)+\gamma_n\,\middle|\, X^n,Y^n\right)>\delta+\gamma_n\right\}+e^{-n\gamma}
\end{aligned} \tag{62}$$

を満たす．ここで $\widetilde{Y}^n\triangleq\psi_n(\varphi_n(X^n))$ である．式 (62) の右辺第 1 項は $R-\gamma>\bar{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y})$ より $n\to\infty$ で 0 に漸近する．また第 2 項は (59) より 0 に漸近し，第 3 項も 0 に漸近するため,

$$\lim_{n\to\infty}\Pr\left\{\overline{F}_n\!\left(d+\frac{1}{n}D_n(X^n,\widetilde{Y}^n)+\gamma_n\,\middle|\, X^n,\widetilde{Y}^n\right)>\delta+\gamma_n\right\}=0 \tag{63}$$

である．任意の $\gamma' > 0$ に対して，十分大きな n では $\gamma_n < \gamma'$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left\{\overline{F}_n\left(d + \frac{1}{n}D_n(X^n, \widetilde{Y}^n) + \gamma_n \,\middle|\, X^n, \widetilde{Y}^n\right) > \delta + \gamma'\right\} = 0 \tag{64}$$

が成り立つ．従って, $\gamma' > 0$ 及び p- lim sup の定義から

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty} \overline{F}_n\left(d + \frac{1}{n}D_n(X^n, \widetilde{Y}^n) + \gamma_n \,\middle|\, X^n, \widetilde{Y}^n\right) \le \delta \tag{65}$$

を得る．また, 任意の $\gamma'' > 0$ に対して，十分大きな n では $\gamma_n < \gamma''$ であるから

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty} \overline{F}_n\left(d + \frac{1}{n}D_n(X^n, \widetilde{Y}^n) + \gamma'' \,\middle|\, X^n, \widetilde{Y}^n\right) \le \delta \tag{66}$$

であり, 下限値を取ると, $\overline{F}'_n(d \mid X^n, Y^n)$ の定義より

$$\inf\left\{d \,\middle|\, \text{p-}\limsup_{n\to\infty} \overline{F}'_n(d \mid X^n, \tilde{Y}^n) \le \delta\right\} \le \gamma'' \tag{67}$$

である．従って, $\gamma'' > 0$ 及び定義 13 より

$$\overline{D_\delta}'(\boldsymbol{X}, \widetilde{\boldsymbol{Y}} \mid \boldsymbol{D}) \le 0 \tag{68}$$

である．これは達成可能性の式 (49) を満たすことを意味する．一方，式 (61) より達成可能性の式 (48) も満たされる．従って，レート R は達成可能である．ここで，R は式 (51) を満たす任意の実数であったため, 系列ごとに許容歪みが変化する歪み制約 $\overline{D_\delta}'(\boldsymbol{X}, \widetilde{\boldsymbol{Y}} \mid \boldsymbol{D}) \le 0$ の下で定義される達成可能最小レート $R^*(\delta, \boldsymbol{D})$ は

$$R^*(\delta, \boldsymbol{D}) \le \inf_{\boldsymbol{Y}: \overline{D_\delta}'(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \mid \boldsymbol{D}) \le 0} \bar{I}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}) \tag{69}$$

が結論される．□

6.2 逆定理

〔定理 4 の逆定理の証明〕最初に，レート R が達成可能であるとする．すなわち,

$$\inf\left\{d \,\middle|\, \text{p-}\limsup_{n\to\infty} \overline{F}_n\left(d + \frac{1}{n}D_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) \,\middle|\, X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))\right) \le \delta\right\} \le 0 \tag{70}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log M_n \le R \tag{71}$$

を満たす符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^\infty$ が存在するとする．ここで，$\widetilde{Y}^n \triangleq \psi_n(\varphi_n(X^n))$ とおくと,

$$\inf\left\{d \,\middle|\, \text{p-}\limsup_{n\to\infty} \overline{F}_n\left(d + \frac{1}{n}D_n(X^n, \widetilde{Y}^n) \,\middle|\, X^n, \widetilde{Y}^n\right) \le \delta\right\} \le 0 \tag{72}$$

が成立する．また，定理 2 の逆定理と同様に，$\widetilde{Y}^n$ は高々 M_n 個の値しかとらないことから補題 2 を適用でき，任意の $\gamma > 0$ に対して

$$\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{P_{\widetilde{Y}^n|X^n}(\widetilde{Y}^n|X^n)}{P_{\widetilde{Y}^n}(\widetilde{Y}^n)} \geq R + 2\gamma\right\} \leq e^{-n\gamma} \tag{73}$$

が成り立つ．よって相互情報量スペクトル上限の定義から

$$\bar{I}(\boldsymbol{X};\widetilde{\boldsymbol{Y}}) \leq R \tag{74}$$

を得る．以上より，任意の達成可能レート R に対して，復号器出力系列 $\widetilde{\boldsymbol{Y}}$ が存在し

$$\overline{D_\delta}'(\boldsymbol{X},\widetilde{\boldsymbol{Y}} \mid \boldsymbol{D}_n) \leq 0 \quad \text{かつ} \quad \bar{I}(\boldsymbol{X};\widetilde{\boldsymbol{Y}}) \leq R$$

が成り立つ．従って

$$R^*(\delta,\boldsymbol{D}) \geq \inf_{\widetilde{\boldsymbol{Y}}:\overline{D_\delta}'(\boldsymbol{X},\widetilde{\boldsymbol{Y}}|\boldsymbol{D}_n)\leq 0} \bar{I}(\boldsymbol{X};\widetilde{\boldsymbol{Y}}) \tag{75}$$

が成り立つ．□

以上，順定理と逆定理を組み合わせることにより

$$R^*(\delta,\boldsymbol{D}) = \inf_{\boldsymbol{Y}:\overline{D_\delta}'(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{D})\leq 0} \bar{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y})$$

が導かれる．

7　まとめ

本論文では，一般情報源に対する固定長最大歪み符号化の枠組みにおいて，系列ごとに許容歪みが変化する場合のレート・歪み理論を導出した．具体的には，情報源系列および復号系列に依存して変化する許容歪み $D_n(X^n,Y^n)$ を導入し，系列依存の最大歪み制約の下での達成可能最小レートを，相互情報量スペクトル上限により特徴付けた．

本研究の要点は，従来理論（[3]）で用いられる歪み $d_n(X^n,Y^n)$ に対し，差分

$$d'_n(X^n,Y^n) \triangleq d_n(X^n,Y^n) - D_n(X^n,Y^n)$$

を新たな歪みとして導入することで，本問題を従来のレート・歪み問題へ帰着できることを示した点にある．これにより，系列依存の歪み制約を導入した場合にも，情報スペクトル的方法に基づく既存の符号化定理を統一的に適用できることが明らかとなった．

また，[3] では歪みが非負であることを前提として議論されているのに対し，本研究で導入した $d'_n(X^n,Y^n)$ は定義上負の値をとり得る．しかし，証明における評価手順を精査することで，歪みが負となる場合であっても，符号化定理の導出に本質的な支障がないことを確認した．

さらに，歪みを確率変数として扱う確率的歪みの場合についても，系列依存の許容歪みを導入した定式化を与え，同様の帰着により従来の確率的レート・歪み理論へ統一的に接続できることを示した．

今後の課題としては，固定長符号化に限らず可変長符号化においても，同様の系列依存歪み制約の下で符号化定理が成立するかを検討することが挙げられる．また，本論文では最大歪みを用いたが，平均歪みに基づく評価へ拡張した場合の理論的性質や達成可能レートの特徴付けを明らかにすることも重要である．

謝辞

本研究を進めるにあたり，丁寧なご指導を頂いた西新幹彦准教授に感謝の意を表する．

参考文献

[1] 韓太舜, 情報理論における情報スペクトル的方法, 培風館, 1998.

[2] 西新 幹彦，伊藤 佑樹，「ランダム符号化を用いない一般情報源に対するレート・歪み理論の順定理」，第 41 回情報理論とその応用シンポジウム（SITA2018），福島県いわき市，2018 年 12 月.

[3] Mikihiko Nishiara, Yuki Ito,“Proof of Achievability Part of Rate-Distortion Theorem without Random Coding,” IEICE Trans. Fundamentals, vol.E107-A, no.3, pp.404-408, 2024.