

信州大学  
大学院総合理工学研究科

修士論文

雑音のない一般通信路に対する  
コスト制約付き通信路容量

指導教員 西新 幹彦 准教授

専攻 工学専攻  
分野 情報数理融合システム分野  
学籍番号 24W6074H  
氏名 村岡 和奏

2026年2月12日

# 目次

1	はじめに	1
2	先行研究	1
2.1	定常無記憶情報源のコスト付き固定長符号化	2
2.2	定常無記憶通信路の符号化	3
2.3	一般通信路の符号化	4
2.4	一般通信路のコスト制約付き符号化	5
2.5	雑音のない一般通信路のコスト制約付き符号化	6
3	各種コスト制約および誤り確率に基づく通信路容量	7
3.1	誤りを許さない場合	8
3.2	誤り確率が漸近的にゼロになればよい場合	11
3.3	小さい誤り確率を許す場合	19
3.4	小さい誤り確率を漸近的に許す場合	24
4	通信路容量の関係	26
5	まとめ	31
	謝辞	31
	参考文献	31
	付録 A 補題の証明	33

## 1 はじめに

インターネットやモバイル通信は急速な発展を遂げ、日本だけでなく、世界中で生活インフラの基盤となっている。さらなる進展に伴い、通信の高速化、大容量化、高信頼化などの需要に応えるべく進歩を続ける技術の一つに通信システムがあげられる。通信システムとは符号語の送受信によって情報を伝えるシステムであり、目的によって二つの符号化に分けられる。一つ目が情報をより効率良く符号化し、小さいデータで情報を送る情報源符号化である。二つ目が誤りをできるだけ小さくし、通信の信頼性の向上を達成する通信路符号化である。

本研究では通信路符号化の問題を考える。通信路符号化問題では情報の送り手と受け手の存在を前提とし、送り手が送ったメッセージを受け手が正しく受け取るために必要な伝送レートや復号誤り確率を求める。そのように通信をする際、すなわち、符号シンボルが通信路を通過する際、一般にコストがかかる。具体的には、信号を送信するための電力や受信までの時間がコストとされ、かかるコストは形式的にはコスト関数によって表される。その上で、符号シンボルの通信コストに上限を設け、その制約内での最適な符号化、および、符号化定理を求める問題をコスト制約付き通信路符号化問題と呼ぶ。コスト付き符号化問題は符号語長のコストへの單なる一般化になっているだけでなく、情報源符号化の周辺の種々の問題に登場することが分かっている[2]。また、雑音のある通信路の符号化や符号化定理も先行研究により解明されており[1]、雑音のない通信路においてもコスト付き符号化問題として定理が示されている[2]。

本研究ではこの雑音のない一般通信路に対し、情報スペクトル的方法を用いて通信路容量を導出した。具体的には、4つの復号誤り評価基準と2つのコスト制約基準を考え、8つの組み合わせすべてについて、容量が「コスト制約を満たす入力列集合の指指数レート」で表されることを示した。雑音がない場合は雑音がある場合の特別な場合なので、成立する定理自体は自明であるが、雑音がないという特殊性を活かし、雑音がある場合の一般定理とは独立に直接的な順・逆定理を証明した。本研究の成果は、雑音がないという特殊な状況における固有の構成的理解を深め、コスト制約下での符号設計に対する統一的な視点を提供する。

## 2 先行研究

はじめに本研究の先行研究となる様々な条件における符号化について復習する。本論文で扱う底の明記されていない対数は自然対数である。

## 2.1 定常無記憶情報源のコスト付き固定長符号化

本研究で扱うのは通信路符号化の問題であるが、雑音のない通信路では誤り訂正の必要がないため、問題の核心は情報源符号化と同様の符号語の効率的な構成へと集約される。よってこの節では、コスト付き情報源符号化に関してすでに知られていることを確認する。

定常無記憶情報源とは  $X_1, X_2, \dots$  が独立で同一の分布に従うような確率過程  $(X_1, X_2, \dots)$  のことである。各  $n = 1, 2, \dots$  に対して、整数の集合  $\mathcal{M}_n = \{1, 2, \dots, M_n\}$  を定めておく、長さ  $n$  の情報源系列  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n$  を集合  $\mathcal{M}_n$  のいずれかの要素に変換する操作を符号化といい、この変換を表す写像  $\varphi_n : \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{M}_n$  を符号化関数という。ここで、 $\varphi_n(\mathbf{x})$  は  $\mathbf{x}$  の符号語と呼ばれる。次に、符号語  $m = \varphi_n(\mathbf{x})$  を受け取った受信者はこれからもとの情報源系列  $\mathbf{x}$  を復元しようとする。この操作を復号化といい、この変換を表す写像  $\psi_n : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{X}^n$  を復号化関数という。ここで復号された結果は必ずしも元の情報源系列に一致しなくともよい。そのとき長さ  $n$  の情報源系列を確率変数  $X^n = (X_1, \dots, X_n)$  とおき

$$\varepsilon_n \triangleq \Pr\{X^n \neq \psi_n(\varphi_n(X^n))\} \quad (1)$$

を誤り確率と呼ぶ。復号誤りが起こると精度の高い通信ではなくなるため、誤り確率  $\varepsilon_n$  は小さければ小さいほどよいが、そのためには符号語数  $M_n$  がある程度大きくななければならない。しかし、 $M_n$  は符号長  $n$  の増大に伴って指数関数的に増大するため、その値自体では圧縮の効率を適切に評価することが困難である。そこで、 $M_n$  の大きさを定量的に表す量を定義する必要が生じる。それを表す量として

$$r_n \triangleq \frac{1}{n} \log M_n \quad (2)$$

を考え符号化レートと呼ぶ[1]。この符号化レートが小さければ小さいほど通信効率が良くなり、高速な通信が可能になるが、すると誤り確率が大きくなってしまうという相反関係にある。

ここにさらに、コストの概念を導入する。まず符号化に用いるアルファベットを  $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$  とし、各記号  $a \in \mathcal{A}$  に対して、その記号を使用する際にかかるコストを  $c(a) > 0$  と定義する。このとき、長さ  $n$  の符号系列  $\mathbf{a} = a_1 a_2 \cdots a_n \in \mathcal{A}^*$  に対するコスト  $c(\mathbf{a})$  は、各記号のコストの総和として

$$c(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n c(a_i) \quad (3)$$

により与えられる。ここで、コスト  $t = c(a)$  で送信可能な系列の総数を  $N(t)$  によって表し、単位コストあたりに送信できるビット数をコスト容量とし、

$$\alpha_c \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log_2 N(t)}{t} \quad (4)$$

と定義する。定常無記憶情報源がエントロピー  $H$  を有するとき、任意の  $\varepsilon > 0$  に対し、単位記号当たりの平均コストが  $H/\alpha_c + \varepsilon$  以下になるように情報源系列を符号化することが可能である。また逆に、単位記号当たりの平均コストを  $H/\alpha_c$  より真に小さくなるように情報源系列を符号化することは不可能である [2]。

## 2.2 定常無記憶通信路の符号化

この節ではコスト制約付き通信路符号化問題の基本について確認する。まず、定常無記憶通信路における符号化について述べる。通信路の入出力アルファベットをそれぞれ  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  とする。通信路は条件付き確率の組  $\{W(y|x)\}_{x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}}$  によって表される。すなわち

$$\sum_{y \in \mathcal{Y}} W(y|x) = 1 \quad (\forall x \in \mathcal{X}) \quad (5)$$

を満たす。

入力系列

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{X}^n \quad (6)$$

が与えられたとき出力系列

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathcal{Y}^n \quad (7)$$

の出現する条件付確率  $W^n(\mathbf{y}|\mathbf{x})$  が

$$W^n(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n W(y_i|x_i) \quad (8)$$

で与えられる通信路のことを定常無記憶通信路と呼ぶ。伝送すべきメッセージの集合を  $\mathcal{M}_n = \{1, 2, \dots, M_n\}$  としたとき、それらを長さ  $n$  の通信路入力に変換する写像  $\varphi_n : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{X}^n$  を符号化関数と呼ぶ。ここで通信路の受信側では、あらかじめ定めておいた  $\mathcal{Y}^n$  の分割

$$\mathcal{Y}^n = \psi_n^{-1}(1) \cup \dots \cup \psi_n^{-1}(M_n) \quad (\psi_n^{-1}(i) \cap \psi_n^{-1}(j) = \emptyset \text{ for } i \neq j) \quad (9)$$

に基づいて、受信語  $\mathbf{y}$  が  $\mathbf{y} \in \psi_n^{-1}(m)$  ならば  $m \in \mathcal{M}_n$  が送信されてきたものと判定する。ここで、

$$r_n = \frac{1}{n} \log M_n \quad (10)$$

は通信路 1 回当たりの伝送情報量を表し符号化レートと呼ばれる。また、通信路符号化における復号の誤り確率  $\varepsilon_n$  は

$$\varepsilon_n \triangleq \frac{1}{M_n} \sum_{m=1}^{M_n} W^n(\psi_n^{-1}(m)^c | \varphi_n(m)) \quad (11)$$

と定義される。通信路符号化問題は通常、誤り確率を漸近的にゼロにするような符号器と復号器の組が存在するという条件のもとで符号化レートを最大限どこまで大きく出来るかという形に定式化される。そこで次のように定義する。

**定義 1** 任意の非負実数  $R$  に対し、レート  $R$  が達成可能とは

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \quad (12)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq R \quad (13)$$

を満たすような符号の列  $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$  が存在することである。

**定義 2 (通信路容量)**

$$C(W) \triangleq \sup\{R \mid R \text{ が達成可能 }\}. \quad (14)$$

確率変数  $X, Y$  に対して  $I(X; Y)$  を

$$I(X; Y) \triangleq \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} P_X(x) W(y|x) \log \frac{W(y|x)}{P_Y(y)} \quad (15)$$

と定義し、 $X$  と  $Y$  の間の相互情報量と呼ぶ。ここで  $W(y|x)$  は  $X = x$  が与えられたときの  $Y = y$  の条件付確率を表す。すると相互情報量を用いて、通信路容量は

**定理 1**

$$C(W) = \sup_X I(X; Y) \quad (16)$$

で与えられる [1]。ここで  $\sup_X$  は入力アルファベット  $\mathcal{X}$  の中に値を取るすべての確率変数  $X$  にわたる上限を表す。

## 2.3 一般通信路の符号化

次に、通信路を定常無記憶とは限らない一般の通信路に拡張したときの符号化を考える。そのため一般の通信路を次のように定義する。すなわち、 $W^n$  を各  $n = 1, 2, \dots$  に対して

$$\sum_{y \in \mathcal{Y}^n} W^n(y|x) = 1 \quad (\forall x \in \mathcal{X}^n) \quad (17)$$

を満たすものとする。それらの系列  $\mathbf{W} = \{W^n\}_{n=1}^{\infty}$  を一般通信路と呼ぶ。ここで一般に、実数値確率変数列  $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$  に対して

$$\text{p-}\liminf_{n \rightarrow \infty} Z_n \triangleq \sup \left\{ \beta \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\{Z_n \leq \beta\} = 0 \right. \right\} \quad (18)$$

を定義する。これを  $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$  の確率的下極限という。

確率的下極限を用いて、通信路の入出力  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  に対して

$$\underline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \triangleq \text{p-liminf}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n|X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} \quad (19)$$

を定義し、これを相互情報量スペクトル下限と呼ぶ。

**定理 2** 任意の通信路  $\mathbf{W}$  に対して、その通信路容量  $C(\mathbf{W})$  は

$$C(\mathbf{W}) = \sup_{\mathbf{X}} \underline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (20)$$

で与えられる [1]。ここで  $\sup_{\mathbf{X}}$  はすべての入力過程  $\mathbf{X}$  にわたる上限を表す。

## 2.4 一般通信路のコスト制約付き符号化

ここにさらにコストの概念を導入する。一般に、 $n = 1, 2, \dots$  に対して、写像  $c_n : \mathcal{X}^n \rightarrow \mathbb{R}$  が与えられているとし、

$$\mathbf{c} = \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \quad (21)$$

とおく。ただし、 $\mathbb{R}$  は実数全体の集合を表す。このとき、 $x \in \mathcal{X}^n$  に対して  $c_n(x)$  を  $x$  のコストと呼ぶ。そのもとで、すべての  $n = 1, 2, \dots$  に対してすべての符号語が

$$\frac{1}{n} c_n(\varphi_n(m)) \leq \Gamma \quad (m = 1, 2, \dots, M_n) \quad (22)$$

を満たすような符号を考える。ただし、 $\Gamma$  は与えられた定数であり、この形の条件をコスト制約  $\Gamma$  と呼ぶ。

コスト制約付きの通信路符号化問題はコスト制約のない通信路符号化問題と同様に定義できる。

**定義 3** 非負実数  $R, \Gamma$  に対し、レート  $R$  が  $\Gamma$ -達成可能とは

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \quad (23)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq R \quad (24)$$

$$\frac{1}{n} c_n(\varphi_n(m)) \leq \Gamma \quad (\forall n \in \mathbb{N}, m = 1, 2, \dots, M_n) \quad (25)$$

を満たすような符号の列  $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$  が存在することである。

**定義 4**  $\Gamma$  に対して

$$C_s(\Gamma|W) \triangleq \sup\{R | R \text{ が } \Gamma\text{-達成可能}\} \quad (26)$$

を  $\Gamma$ -通信路容量と呼ぶ。

$\Gamma$ -通信路容量の数学的表現のため、 $\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n$  を

$$\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n \triangleq \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{X}^n \mid \frac{1}{n} c_n(\mathbf{x}) \leq \Gamma \right\} \quad (27)$$

と定義し、すべての  $n = 1, 2, \dots$  に対して

$$\Pr\{X^n \in \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n\} = 1 \quad (28)$$

を満たす入力過程  $\mathbf{X} = \{X^n\}_{n=1}^\infty$  の全体を  $S_\Gamma$  で表すと、定理 2 に対応する次の定理を得る。

**定理 3** 通信路  $W$  の  $\Gamma$ -通信路容量  $C_s(\Gamma|W)$  は

$$C_s(\Gamma|W) = \sup_{\mathbf{X} \in S_\Gamma} \underline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (29)$$

で与えられる [1]。ただし、 $\mathbf{Y}$  は  $\mathbf{X}$  を入力過程とする通信路  $W$  の出力過程を表す。

## 2.5 雑音のない一般通信路のコスト制約付き符号化

次に雑音のない一般通信路を考える。定理 3 は通信路に雑音がない場合も成り立つことから、 $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$  ならば、式 (19) は

$$\underline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{X}) = \text{p-liminf}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{W^n(X^n|X^n)}{P_{X^n}(X^n)} \quad (30)$$

となり、ここで一般通信路の定義

$$W^n(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \triangleq \Pr\{Y^n = \mathbf{y}|X^n = \mathbf{x}\} \quad (\mathbf{x} \in \mathcal{X}, \mathbf{y} \in \mathcal{Y}) \quad (31)$$

より

$$W^n(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = \Pr\{X^n = \mathbf{x}|X^n = \mathbf{x}\} \quad (32)$$

$$= 1 \quad (33)$$

となることから

$$\underline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{X}) = \text{p-liminf}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \quad (34)$$

であるが、ここで

$$\underline{H}(\mathbf{X}) \triangleq \text{p-liminf}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \quad (35)$$

を用いて

$$\underline{I}(\mathbf{X}; \mathbf{X}) = \underline{H}(\mathbf{X}) \quad (36)$$

と書き換えることができる。このことより、通信路に雑音がない場合、定理 4 は次のように表される。

#### 定理 4

$$C_s(\Gamma|W) = \sup_{\mathbf{X} \in S_\Gamma} \underline{H}(\mathbf{X}) \quad (37)$$

この定理は、雑音のない一般通信路に対するコスト制約付き符号化問題のひとつの答えである。本研究の主題は、この問題に対する他の設定のバリエーションも含めて、雑音がない特殊性を利用して証明を構成することである。

### 3 各種コスト制約および誤り確率に基づく通信路容量

本論文の本題として、雑音のない一般通信路を考える。つまり、出力  $Y$  は入力  $X$  に等しい。しかし、符号器と復号器による誤りは許容する。従って、誤り確率  $\varepsilon_n$  は

$$\varepsilon_n \triangleq \Pr\{X^n \neq \psi_n(\varphi_n(X^n))\} \quad (38)$$

と定義される。これは式 (11) におけるメッセージの一様分布を情報源分布  $P_{X^n}$  に、通信路  $W^n$  を出力が入力と等しい変換に置き換えた定義に相当する。

本研究では雑音のない一般通信路におけるコスト制約付き通信路容量を導出する。証明に入る前に、本章で扱う 8 つの問題設定を整理する。これらの設定は、誤り確率に関する 4 つの基準と、コスト制約に関する 2 つの基準の組み合わせからなる。

誤り確率に関して、

- (a) 誤りが全く許容されない設定  $\varepsilon_n = 0$
- (b) 符号語長  $n \rightarrow \infty$  で誤り確率が 0 に収束する設定  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$
- (c) 誤り確率が常に  $\varepsilon$  以下に抑えられている設定  $\varepsilon_n \leq \varepsilon$
- (d)  $n \rightarrow \infty$  での誤り確率の上極限が  $\varepsilon$  以下となる設定  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n \leq \varepsilon$

の 4 種類を考える。

コスト制約に関して、

- (e) 送信する符号語に対して課されるコストを全ての符号語が例外なく制限  $\Gamma$  を満たすことを要求する厳密な制約  $\Pr\left\{\frac{1}{n}c_n(\varphi_n(U_{M_n})) \leq \Gamma\right\} = 1$
- (f) 符号語長を大きくしたときに制約を満たす確率が 1 に収束すればよいとする漸近的な制約  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}c_n(\varphi_n(U_{M_n})) \leq \Gamma\right\} = 1$

の 2 種類を考える。

これらを網羅的に議論することで、通信の条件が異なる設定であっても、最終的な通信路容量が単一の形式に帰着されるという、一般通信路における普遍的な性質を明らかにする。

### 3.1 誤りを許さない場合

本節で扱う復号誤りがゼロという設定下では、 $\varepsilon_n = 0$  は自明であるため、本節における達成可能の定義には、復号誤りに関する条件は含めない。

#### 3.1.1 コスト制約を厳密に満たす

ここで、雑音のない通信路における  $\Gamma$ -達成可能を、以下のように定義する。

**定義 5** 非負実数  $R, \Gamma$  に対し、レート  $R$  が  $\Gamma$ -達成可能とは

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq R \quad (39)$$

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(U_{M_n})) \leq \Gamma \right\} = 1 \quad (40)$$

を満たすような符号の列  $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$  が存在することである。

$\Gamma$ -通信路容量は定義 5 に従って定義するが、通信路に雑音がないので単に  $C(\Gamma)$  と表すこととする。

**定理 5**  $\Gamma$ -通信路容量  $C(\Gamma)$  は

$$C(\Gamma) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \quad (41)$$

で与えられる。

本定理は、コスト容量の式 (4) と極めて類似した形式を有している。これは両者が、制約を満たす系列数の増大率を容量の本質として捉えているためである。具体的には、式 (4) における総コスト  $t$  の役割をブロック長  $n$  が担う形へと整理されており、コスト制約を独立した変数として扱うことにより汎用的な解析を可能にしている。したがって、これら 2 つの式は異なる制約条件下において同一の理論構造を共有する形式であるといえる。

以下では通信路に雑音がないことを使って定理 4 の証明をする。

[証明]

1) Direct part:

$\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n$  の要素をすべて符号語として符号を設計する。すると符号語数は  $M_n = |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n|$  となり

$$R \triangleq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \quad (42)$$

は式 (39) を満たす。一方符号語のコストは式 (27) より

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(U_{M_n})) \leq \Gamma \right\} = 1 \quad (43)$$

となり，式(40)を満たす．したがって  $R$  は  $\Gamma$ -達成可能であり

$$C(\Gamma) \geq R = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \quad (44)$$

となる．

2) Converse part:

背理法によって

$$C(\Gamma) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \quad (45)$$

を示す．まず

$$R > \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \quad (46)$$

が  $\Gamma$ -達成可能であると仮定する．そのもとでまず，

$$R - 2\gamma > \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \quad (47)$$

なる  $\gamma > 0$  をとる．

$R$  が  $\Gamma$ -達成可能であるから，

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq R \quad (48)$$

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(U_{M_n})) \leq \Gamma \right\} = 1 \quad (49)$$

なる符号の列  $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$  が存在することになる．

ここで式(48)より

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq R > R - 2\gamma > \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \quad (50)$$

となる．このことから，十分大きなすべての  $n$  で

$$\frac{1}{n} \log M_n > R - \gamma \quad (51)$$

かつ，無限個の  $n$  で

$$\frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| < R - \gamma \quad (52)$$

である．よって，無限個の  $n$  で

$$\frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| < \frac{1}{n} \log M_n \quad (53)$$

$$\therefore |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| < M_n \quad (54)$$

となる。これは符号語の中に

$$\frac{1}{n}c_n(\varphi_n(m)) > \Gamma \quad (55)$$

なるものがあることを意味する。したがってこれは式(49)に矛盾する。したがって式(46)なる $R$ は達成可能ではない。□

### 3.1.2 コスト制約を漸近的に満たす

ここでコスト制約が漸近的な場合を考える。

**定義 6** 非負実数 $R, \Gamma$ に対し、レート $R$ が $\Gamma$ -達成可能とは

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq R \quad (56)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(U_{M_n})) \leq \Gamma \right\} = 1 \quad (57)$$

を満たすような符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在することである。

**定理 6**  $\Gamma$ -通信路容量 $C(\Gamma)$ は

$$C(\Gamma) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \quad (58)$$

で与えられる。

〔証明〕

1) Direct part:

$\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n$ の要素をすべて符号語として符号を設計する。すると、定理5と同様に順定理の証明が可能である。

2) Converse part:

定理5の逆定理と同様に背理法によって

$$C(\Gamma) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \quad (59)$$

を示す。そこで

$$R > \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \quad (60)$$

が $\Gamma$ -達成可能であるとして矛盾を導く。まず、

$$R - 2\gamma > \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \quad (61)$$

なる $\gamma > 0$ をとる。ここで、定理5の証明における式(48)～(51)と同様の議論が成立し、無限個の $n$ で

$$\frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| < R - \gamma \quad (62)$$

となることから、無限個の  $n$  で

$$\frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| + \gamma < \frac{1}{n} \log M_n \quad (63)$$

$$\therefore |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \cdot e^{n\gamma} < M_n \quad (64)$$

が成り立つ。一方、 $M_n$  個の符号語のうち、制約を満たすものは高々  $|\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n|$  個であり、残りの少なくとも  $M_n - |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n|$  個の符号語は制約を満たさない。したがって

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(U_{M_n})) > \Gamma \right\} \geq \frac{1}{M_n} (M_n - |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n|) \quad (65)$$

$$= 1 - \frac{|\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n|}{M_n} \quad (66)$$

$$> 1 - \frac{M_n \cdot e^{-n\gamma}}{M_n} \quad (67)$$

$$= 1 - e^{-n\gamma} \quad (68)$$

が無限個の  $n$  で成り立っている。よって

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(U_{M_n})) > \Gamma \right\} = 1 \quad (69)$$

となり、これは式 (57) に矛盾する。□

### 3.2 誤り確率が漸近的にゼロになればよい場合

本節では漸近的に誤りがゼロとなる設定へと移行する。これに従い、達成可能の定義には復号誤りに関する条件を明示的に加える。

#### 3.2.1 コスト制約を厳密に満たす

雑音のない通信路における  $\Gamma$ -達成可能を以下のように定義する。

**定義 7** 非負実数  $R, \Gamma$  に対し、レート  $R$  が  $\Gamma$ -達成可能とは

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \quad (70)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq R \quad (71)$$

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(U_{M_n})) \leq \Gamma \right\} = 1 \quad (72)$$

を満たすような符号の列  $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$  が存在することである。

以下の定理が得られる。

**定理 7**  $\Gamma$ -通信路容量  $C(\Gamma)$  は

$$C(\Gamma) = \sup_{\mathbf{X}: \Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(X^n) \leq \Gamma \right\} = 1} \underline{H}(\mathbf{X}) \quad (73)$$

で与えられる。

この定理は 2.5 節で述べたものと同一である。以下では通信路に雑音がないことを使って定理 6 の証明をする。

[証明]

1) Direct part:

まず、すべての  $n$  に対して

$$\Pr\left\{\frac{1}{n}c_n(X^n) \leq \Gamma\right\} = 1 \quad (74)$$

であるような任意の情報源  $\mathbf{X}$  を考える。次にこの  $\mathbf{X}$  に対して、

$$R < \underline{H}(\mathbf{X}) \quad (75)$$

なる任意の  $R$  を考える。このとき、ある  $\gamma > 0$  に対して、

$$R = \underline{H}(\mathbf{X}) - 2\gamma \quad (76)$$

が成り立つ。この  $R$  が  $\Gamma$ -達成可能であることを示す。準備として

$$\mathcal{T}_n \triangleq \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{X}^n \left| \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(x)} > \underline{H}(\mathbf{X}) - \gamma \right. \right\} \quad (77)$$

を定める。 $M_n \triangleq e^{nR} = e^{\underline{H}(\mathbf{X}) - 2\gamma}$  とおき、 $\bar{\varphi}_n(1), \bar{\varphi}_n(2), \dots, \bar{\varphi}_n(M_n) \in \mathcal{X}^n$  を互いに独立に分布  $P_{X^n}$  に従って発生させる。この  $\bar{\varphi}_n$  が符号器となる。次に復号器を定める。復号器  $\bar{\psi}_n$  は  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n$  を受け取ったとき、

$$\bar{\varphi}_n(m) = \mathbf{x} \quad (78)$$

となるような  $m \in \mathcal{M}_n$  がただ一つのとき、 $\bar{\psi}_n(\mathbf{x}) = m$  とし、それ以外は誤りとみなす。 $m \in \mathcal{M}_n$  が正しく伝わるためには受信語  $\bar{\varphi}_n(m)$  がどの  $m' \neq m$  に対しても  $\bar{\varphi}_n(m') \neq \bar{\varphi}_n(m)$  であればよい。ここで、事象  $E(m)$  を

$$E(m) \triangleq \{ \text{ある } m' \neq m \text{ に対して } \bar{\varphi}_n(m') = \bar{\varphi}_n(m) \} \quad (79)$$

と定める。すると、メッセージ  $m$  を送信したときの復号誤り確率  $\bar{\varepsilon}_n(m)$  は

$$\bar{\varepsilon}_n(m) = \Pr\{E(m)\} \quad (80)$$

$$= \Pr\{E(m) \text{ かつ } \bar{\varphi}_n(m) \notin \mathcal{T}_n\} + \Pr\{E(m) \text{ かつ } \bar{\varphi}_n(m) \in \mathcal{T}_n\} \quad (81)$$

と表される。

ここで第 2 項は

$$\Pr\{E(m) \text{かつ} \bar{\varphi}_n(m) \in \mathcal{T}_n\} \quad (82)$$

$$= \Pr\{\{\text{ある } m' \neq m \text{ に対して } \bar{\varphi}_n(m') = \bar{\varphi}_n(m)\} \text{かつ} \bar{\varphi}_n(m) \in \mathcal{T}_n\} \quad (83)$$

$$= \Pr\{\{\text{ある } m' \neq m \text{ に対して } \{\bar{\varphi}_n(m') = \bar{\varphi}_n(m)\} \text{かつ} \bar{\varphi}_n(m) \in \mathcal{T}_n\}\} \quad (84)$$

$$= \Pr\left\{\bigcup_{m' \neq m} \{\bar{\varphi}_n(m') = \bar{\varphi}_n(m)\} \text{かつ} \bar{\varphi}_n(m) \in \mathcal{T}_n\right\} \quad (85)$$

$$\leq \sum_{m' \neq m} \Pr\{\bar{\varphi}_n(m') = \bar{\varphi}_n(m) \text{かつ} \bar{\varphi}_n(m) \in \mathcal{T}_n\} \quad (86)$$

であり、和の中は

$$\Pr\{\bar{\varphi}_n(m') = \bar{\varphi}_n(m) \text{かつ} \bar{\varphi}_n(m) \in \mathcal{T}_n\} \quad (87)$$

$$= \sum_{\mathbf{x}} \Pr\{\bar{\varphi}_n(m') = \bar{\varphi}_n(m) \text{かつ} \bar{\varphi}_n(m) \in \mathcal{T}_n \text{かつ} \bar{\varphi}_n(m) = \mathbf{x}\} \quad (88)$$

$$= \sum_{\mathbf{x}} \Pr\{\bar{\varphi}_n(m') = \mathbf{x}\} \cdot \Pr\{\bar{\varphi}_n(m) \in \mathcal{T}_n \text{かつ} \bar{\varphi}_n(m) = \mathbf{x}\} \quad (89)$$

$$= \sum_{\mathbf{x}} \Pr\{X^n = \mathbf{x}\} \cdot \Pr\{X^n \in \mathcal{T}_n \text{かつ} X^n = \mathbf{x}\} \quad (90)$$

$$= \sum_{\mathbf{x}} P_{X^n}(\mathbf{x}) \cdot \Pr\{\mathbf{x} \in \mathcal{T}_n \text{かつ} X^n = \mathbf{x}\} \quad (91)$$

$$= \sum_{\mathbf{x}} P_{X^n}(\mathbf{x}) \cdot \Pr\{X^n = \mathbf{x}\} \cdot \mathbb{1}\{\mathbf{x} \in \mathcal{T}_n\} \quad (92)$$

$$= \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{T}_n} P_{X^n}(\mathbf{x}) \cdot P_{X^n}(\mathbf{x}) \quad (93)$$

と書き換えることができる。そこで、 $\mathbf{x} \in \mathcal{T}_n$  より、

$$\frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(\mathbf{x})} > \underline{H}(\mathbf{X}) - \gamma \quad (94)$$

$$\log \frac{1}{P_{X^n}(\mathbf{x})} > n(\underline{H}(\mathbf{X}) - \gamma) \quad (95)$$

$$\frac{1}{P_{X^n}(\mathbf{x})} > e^{n(\underline{H}(\mathbf{X}) - \gamma)} \quad (96)$$

$$P_{X^n}(\mathbf{x}) < e^{-n(\underline{H}(\mathbf{X}) - \gamma)} \quad (97)$$

であり、これを式 (93) に代入すると、

$$\sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{T}_n} P_{X^n}(\mathbf{x}) \cdot P_{X^n}(\mathbf{x}) < \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{T}_n} P_{X^n}(\mathbf{x}) \cdot e^{-n(\underline{H}(\mathbf{X}) - \gamma)} \quad (98)$$

$$\leq 1 \cdot e^{-n(\underline{H}(\mathbf{X}) - \gamma)} \quad (99)$$

となる. これにより式 (81) は

$$\bar{\varepsilon}_n(m) \leq \Pr\{\bar{\varphi}_n(m) \notin \mathcal{T}_n\} + \sum_{m' \neq m} e^{-n(\underline{H}(\mathbf{X}) - \gamma)} \quad (100)$$

$$= \Pr\{X^n \notin \mathcal{T}_n\} + (M_n - 1)e^{-n(\underline{H}(\mathbf{X}) - \gamma)} \quad (101)$$

$$< \Pr\{X^n \notin \mathcal{T}_n\} + M_n e^{-n(\underline{H}(\mathbf{X}) - \gamma)} \quad (102)$$

$$= \Pr\{X^n \notin \mathcal{T}_n\} + e^{n(\underline{H}(\mathbf{X}) - 2\gamma) - n(\underline{H}(\mathbf{X}) - \gamma)} \quad (103)$$

$$= \Pr\{X^n \notin \mathcal{T}_n\} + e^{-n\gamma} \quad (104)$$

となる. ここで  $\bar{\varepsilon}_n(m)$  は  $m \in \mathcal{M}_n$  に依存しない値で上から押さえられるため, 平均復号誤り確率  $\bar{\varepsilon}_n$  は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\varepsilon}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{M_n} \sum_{m=1}^{M_n} \bar{\varepsilon}_n(m) \quad (105)$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\Pr\{X^n \notin \mathcal{T}_n\} + e^{-n\gamma}) \quad (106)$$

$$= 0 \quad (107)$$

となる. ただし式 (107) では大数の法則 [1] を用いた.

ところが,  $\bar{\varepsilon}_n$  はランダム符号のすべてにわたる平均値であったので, 誤り確率  $\varepsilon_n$  が  $\varepsilon_n \leq \bar{\varepsilon}_n$  となるようなランダムでない符号  $(\varphi_n, \psi_n)$  が少なくとも 1 つ存在する.

ここで  $(\varphi_n, \psi_n)$  の符号化レートは

$$\frac{1}{n} \log M_n = \frac{1}{n} \log e^{nR} \quad (108)$$

$$= R \quad (109)$$

である. 一方符号語のコストは

$$\Pr\left\{\frac{1}{n} c_n(\bar{\varphi}_n(U_{M_n})) \leq \Gamma\right\} = \sum_{m=1}^{M_n} \Pr\left\{\frac{1}{n} c_n(\bar{\varphi}_n(U_{M_n})) \leq \Gamma, U_{M_n} = m\right\} \quad (110)$$

$$= \sum_{m=1}^{M_n} \Pr\left\{\frac{1}{n} c_n(\bar{\varphi}_n(m)) \leq \Gamma, U_{M_n} = m\right\} \quad (111)$$

$$= \sum_{m=1}^{M_n} \Pr\left\{\frac{1}{n} c_n(\bar{\varphi}_n(m)) \leq \Gamma\right\} \cdot \Pr\{U_{M_n} = m\} \quad (112)$$

$$= \frac{1}{M_n} \sum_m \Pr\left\{\frac{1}{n} c_n(X^n) \leq \Gamma\right\} \quad (113)$$

$$= 1 \quad (114)$$

より, ここで発生させた符号は必ず式 (72) を満たす. ここで  $U_M$  は  $M$  以下の自然数上に一様に分布する確率変数とする.

式(107), 式(114)より, この符号  $(\varphi_n, \psi_n)$  は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \quad (115)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq R \quad (116)$$

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(U_{M_n})) \leq \Gamma \right\} = 1 \quad (117)$$

を満たす. よってレート  $R$  は  $\Gamma$ -達成可能である. このことから,  $C(\Gamma) \geq R = \underline{H}(\mathbf{X}) - 2\gamma$  が成り立つが,  $\mathbf{X}$  は式(74)を満たす任意の情報源だったので,

$$C(\Gamma) \geq \sup_{\mathbf{X}: \Pr\{\frac{1}{n} c_n(X^n) \leq \Gamma\} = 1} \underline{H}(\mathbf{X}) - 2\gamma \quad (118)$$

が成り立つ. ここで  $\gamma > 0$  は任意だったことに注意すれば,

$$C(\Gamma) \geq \sup_{\mathbf{X}: \Pr\{\frac{1}{n} c_n(X^n) \leq \Gamma\} = 1} \underline{H}(\mathbf{X}) \quad (119)$$

が得られる.

2) Converse part:

背理法によって

$$C(\Gamma) \leq \sup_{\mathbf{X}: \Pr\{\frac{1}{n} c_n(X^n) \leq \Gamma\} = 1} \underline{H}(\mathbf{X}) \quad (120)$$

を示す. そこで

$$R = \sup_{\mathbf{X}: \Pr\{\frac{1}{n} c_n(X^n) \leq \Gamma\} = 1} \underline{H}(\mathbf{X}) + 3\gamma \quad (121)$$

が  $\Gamma$ -達成可能であるとして矛盾を導く. ただし,  $\gamma > 0$  は任意に小さい定数である.

$R$  が  $\Gamma$ -達成可能であるから,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq R \quad (122)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \quad (123)$$

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(U_{M_n})) \leq \Gamma \right\} = 1 \quad (124)$$

なる符号の列  $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$  が存在することになる.

そこで,  $X^n = \varphi_n(U_{M_n})$  とすれば, 付録 A にある補題 1 により

$$\varepsilon_n \geq \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \leq \frac{1}{n} \log M_n - \gamma \right\} - e^{-n\gamma} \quad (125)$$

である. 一方, 式 (122) より

$$\frac{1}{n} \log M_n \geq R - \gamma \quad (\forall n \geq n_0) \quad (126)$$

が得られ, これを式 (125) に代入すると

$$\varepsilon_n \geq \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \leq R - 2\gamma \right\} - e^{-n\gamma} \quad (\forall n \geq n_0) \quad (127)$$

となる. ここで式 (121) より

$$R - 2\gamma = \sup_{\mathbf{X}: \Pr\{\frac{1}{n}c_n(X^n) \leq \Gamma\} = 1} \underline{H}(\mathbf{X}) + \gamma \quad (128)$$

であるが, 今考えている  $X^n = \varphi_n(U_{M_n})$  は式 (124) を満たすので

$$\sup_{\mathbf{X}: \Pr\{\frac{1}{n}c_n(X^n) \leq \Gamma\} = 1} \underline{H}(\mathbf{X}) + \gamma \geq \underline{H}(\mathbf{X}) + \gamma \quad (129)$$

となる. したがって式 (127) は

$$\varepsilon_n \geq \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \leq \underline{H}(\mathbf{X}) + \gamma \right\} - e^{-n\gamma} \quad (130)$$

となる. ここで  $\underline{H}(\mathbf{X})$  の定義より

$$\underline{H}(\mathbf{X}) = \text{p-lim inf}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \quad (131)$$

$$= \sup \left\{ \beta \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \leq \beta \right\} = 0 \right\} \quad (132)$$

である. したがって  $\alpha = \underline{H}(\mathbf{X}) + \gamma$  を用いて

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \leq \alpha \right\} \neq 0 \quad (133)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \leq \alpha \right\} > \exists \delta > 0 \quad (134)$$

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \leq \alpha \right\} > \delta > 0 \quad (\exists n \geq \forall n_0) \quad (135)$$

となることから式 (130) は

$$\varepsilon_n \geq \delta - e^{-n\gamma} \quad (136)$$

となる. つまり式 (136) となる  $n$  が可算無限個存在することから,  $\varepsilon_n \rightarrow 0(n \rightarrow \infty)$  とはなれない. これは式 (123) に矛盾する. よって, 達成可能なレート  $R$  は  $\sup_{\mathbf{X}: \Pr\{\frac{1}{n}c_n(X^n) \leq \Gamma\} = 1} \underline{H}(\mathbf{X})$  より大きくなれない.  $\square$

### 3.2.2 コスト制約を漸近的に満たす

ここでコスト制約が漸近的な場合を考える.

**定義 8** 非負実数  $R, \Gamma$  に対し, レート  $R$  が  $\Gamma$ -達成可能とは

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \quad (137)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq R \quad (138)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(U_{M_n})) \leq \Gamma \right\} = 1 \quad (139)$$

を満たすような符号の列  $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$  が存在することである.

**定理 8**  $\Gamma$ -通信路容量  $C(\Gamma)$  は

$$C(\Gamma) = \sup_{\mathbf{X}: \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \{ \frac{1}{n} c_n(X^n) \leq \Gamma \} = 1} \underline{H}(\mathbf{X}) \quad (140)$$

で与えられる.

[証明]

1) Direct part:

まず,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(X^n) \leq \Gamma \right\} = 1 \quad (141)$$

であるような任意の情報源  $\mathbf{X} = \{X^n\}_{n=1}^{\infty}$  を考える. 次にこの  $\mathbf{X}$  に対して,

$$R < \underline{H}(\mathbf{X}) \quad (142)$$

なる任意の  $R$  を考える. このとき, ある  $\gamma > 0$  に対して,

$$R = \underline{H}(\mathbf{X}) - 2\gamma \quad (143)$$

が成り立つ. この  $R$  が  $\Gamma$ -達成可能であることを示す. 準備として

$$\mathcal{T}_n \triangleq \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{X}^n \left| \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(x)} > \underline{H}(\mathbf{X}) - \gamma \right. \right\} \quad (144)$$

を定める.  $M_n \triangleq e^{nR} = e^{\underline{H}(\mathbf{X}) - 2\gamma}$  とおき,  $\bar{\varphi}_n(1), \bar{\varphi}_n(2), \dots, \bar{\varphi}_n(M_n) \in \mathcal{X}^n$  を互いに独立に分布  $P_{X^n}$  に従って発生させる.

復号誤り確率  $\varepsilon_n$  が 0 に収束することは定理 7 と同様に示すことができる.

次に符号語のコストを考える.  $X^n$  の分布を用いて  $\bar{X}^n$  の分布を

$$P_{\bar{X}^n}(x) = \begin{cases} \Pr\{X^n = x | X^n \in \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n\} & (x \in \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n) \\ 0 & (x \notin \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n) \end{cases} \quad (145)$$

と定める。したがって

$$\sum_x P_{\bar{X}^n}(x) = \sum_{x \in \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n} \Pr\{X^n = x | X^n \in \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n\} \quad (146)$$

$$= \sum_{x \in \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n} \frac{\Pr\{X^n = x \text{かつ } X^n \in \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n\}}{\Pr\{X^n \in \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n\}} \quad (147)$$

$$= \frac{\Pr\{X^n \in \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n\}}{\Pr\{X^n \in \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n\}} \quad (148)$$

$$= 1 \quad (149)$$

となる。ここで式(144)と式(145)を用いて

$$\Pr\{\bar{X}^n \notin \mathcal{T}_n\} = \sum_{x \notin \mathcal{T}_n} P_{\bar{X}^n}(x) \quad (150)$$

$$= \sum_{x \in \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n \setminus \mathcal{T}_n} \Pr\{X^n = x | X^n \in \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n\} \quad (151)$$

$$= \sum_{x \in \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n \setminus \mathcal{T}_n} \frac{\Pr\{X^n = x \text{かつ } X^n \in \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n\}}{\Pr\{X^n \in \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n\}} \quad (152)$$

$$\leq \frac{1}{\Pr\{X^n \in \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n\}} \sum_{x \in \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n \setminus \mathcal{T}_n} P_{X^n}(x) \quad (153)$$

$$\leq \frac{1}{\Pr\{X^n \in \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n\}} \sum_{x \notin \mathcal{T}_n} P_{X^n}(x) \quad (154)$$

であり、式(144)より

$$\frac{1}{\Pr\{X^n \in \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n\}} \sum_{x \notin \mathcal{T}_n} P_{X^n}(x) = \frac{1}{\Pr\{X^n \in \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n\}} \Pr\left\{\frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(x)} \leq H(\mathbf{X}) - \gamma\right\} \quad (155)$$

$$\rightarrow 0 \quad (156)$$

となり、コスト制約を満たす系列集合  $\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n$  のみに制限した分布  $P_{\bar{X}^n}$  を用いても、典型集合  $\mathcal{T}_n$  から外れる確率は漸近的に 0 となる。したがって、式(145)より、これに従って選ばれる符号語  $\varphi_n$  はすべて  $\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n$  に属するため、任意の  $n$  に対して

$$\Pr\left\{\frac{1}{n} c_n(\varphi_n(U_{M_n})) \leq \Gamma\right\} = 1 \quad (157)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\left\{\frac{1}{n} c_n(\varphi_n(U_{M_n})) \leq \Gamma\right\} = 1 \quad (158)$$

が成立する。したがって、符号語のコストは式(139)を満たす。

ここで  $(\varphi_n, \psi_n)$  の符号化レートは

$$\frac{1}{n} \log M_n = \frac{1}{n} \log e^{nR} \quad (159)$$

$$= R \quad (160)$$

であり、前節の式 (107) と同様に復号誤り確率  $\varepsilon_n$  が 0 に収束することと、式 (158) より、この符号  $(\varphi_n, \psi_n)$  は達成可能の条件式 (137), (138), (139) を満たす。よってレート  $R$  は  $\Gamma$ -達成可能である。このことから、 $C(\Gamma) \geq R = \underline{H}(\mathbf{X}) - 2\gamma$  が成り立つが、 $\mathbf{X}$  は式 (141) を満たす任意の情報源であったので、

$$C(\Gamma) \geq \sup_{\mathbf{X}: \Pr\{\frac{1}{n}c_n(X^n) \leq \Gamma\} = 1} \underline{H}(\mathbf{X}) - 2\gamma \quad (161)$$

が成り立つ。ここで  $\gamma > 0$  は任意だったことに注意すれば、

$$C(\Gamma) \geq \sup_{\mathbf{X}: \Pr\{\frac{1}{n}c_n(X^n) \leq \Gamma\} = 1} \underline{H}(\mathbf{X}) \quad (162)$$

が得られる。

2) Converse part:

達成可能な符号が満たすべき制約と、通信路容量の式で  $\sup$  を取る対象となる情報源の制約が同様の対応関係にあるため、定理 7 と同様に逆定理の証明が可能である。□

### 3.3 小さい誤り確率を許す場合

本節では、復号誤り確率に関する制約を  $\varepsilon_n \leq \varepsilon$  へと緩和した場合を考える。

#### 3.3.1 コスト制約を厳密に満たす

ここでコスト制約が厳密な場合を考える。

**定義 9** 非負実数  $R, \Gamma$  に対し、レート  $R$  が  $\Gamma$ -達成可能とは

$$\varepsilon_n \leq \varepsilon \quad (163)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq R \quad (164)$$

$$\Pr\left\{\frac{1}{n}c_n(\varphi_n(U_{M_n})) \leq \Gamma\right\} = 1 \quad (165)$$

**定理 9**  $\Gamma$ -通信路容量  $C(\Gamma)$  は

$$C(\Gamma) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \quad (166)$$

で与えられる。

[証明]

1) Direct part:

はじめに  $M'_n \triangleq |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n|$  とおき、 $\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n$  から符号語  $\varphi_n(1), \varphi_n(2), \dots, \varphi_n(M'_n)$  を重複なく選び、誤りなく届くようにデコーダ  $\psi_n$  をつくる。

ここでメッセージを増やして  $M_n = \lfloor \frac{M'_n}{1-\varepsilon} \rfloor$  個にし、増やしたメッセージに対する符号語は、 $\varphi_n(1), \varphi_n(2), \dots, \varphi_n(M'_n)$  に重複させる。増やしたメッセージは誤って復号される。ここで復号誤り確率  $\varepsilon_n$  は

$$\varepsilon_n = \frac{M_n - M'_n}{M_n} \quad (167)$$

$$= 1 - \frac{M'_n}{M_n} \quad (168)$$

$$\leq 1 - \frac{M'_n}{\frac{M'_n}{1-\varepsilon}} \quad (169)$$

$$= \varepsilon \quad (170)$$

より

$$\varepsilon_n \leq \varepsilon \quad (171)$$

となる。一方符号語はすべて  $\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n$  から選んだので

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(U_{M_n})) \leq \Gamma \right\} = 1 \quad (172)$$

となる。また符号化レートは

$$\frac{1}{n} \log M_n \geq \frac{1}{n} \log \left( \frac{M'_n}{1-\varepsilon} - 1 \right) \quad (173)$$

$$= \frac{1}{n} \log \left( M'_n \times \left( \frac{1}{1-\varepsilon} - \frac{1}{M'_n} \right) \right) \quad (174)$$

$$= \frac{1}{n} \log M'_n + \frac{1}{n} \log \frac{M'_n - 1 + \varepsilon}{(1-\varepsilon)M'_n} \quad (175)$$

となるが、 $n \rightarrow \infty$ において  $M'_n \rightarrow \infty$  であることから、右辺の第2項の中身は  $\frac{1}{1-\varepsilon}$  という正の定数に収束する。したがって、これに  $\frac{1}{n}$  をかけた項は漸近的に 0 となることから、

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M'_n \quad (176)$$

$$= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \quad (177)$$

であり、式(171)、式(172)、式(177)より、 $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n|$  は  $\Gamma$ -達成可能である。よって

$$C(\Gamma) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \quad (178)$$

となる。

2) Converse part:

背理法によって  $C(\Gamma) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n|$  を示す。

そこで

$$R > \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \quad (179)$$

が  $\Gamma$ -達成可能であるとして矛盾を導く。まず

$$R - 2\gamma > \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \quad (180)$$

なる  $\gamma > 0$  をとる。ただし  $\gamma > 0$  は十分小さな定数である。 $R$  が達成可能であるから

$$\varepsilon_n \leq \varepsilon \quad (181)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq R \quad (182)$$

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(U_{M_n})) \leq \Gamma \right\} = 1 \quad (183)$$

なる符号の列  $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$  が存在することになる。ここで、式(182)より、定理6の式(61)～(62)と同様の議論を用いて無限個の  $n$  で

$$\frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| + \gamma < \frac{1}{n} \log M_n \quad (184)$$

となる。

一方、 $\varepsilon_n \leq \varepsilon$  より、正しく届くメッセージの個数を  $M'_n$  とおくと

$$\varepsilon \geq \varepsilon_n \quad (185)$$

$$= 1 - \frac{M'_n}{M_n} \quad (186)$$

$$\geq 1 - \frac{|\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n|}{M_n} \quad (187)$$

$$\therefore (1 - \varepsilon) M_n \leq |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \quad (188)$$

$$\frac{1}{n} \log M_n + \frac{1}{n} \log(1 - \varepsilon) \leq \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \quad (189)$$

となる。ただし式(187)では式(183)より、使われている符号語はすべて制約を満たし、 $M'_n \leq |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n|$  となることを用いた。

ここで  $\gamma$  に対して  $n$  が十分大きければ  $\frac{1}{n} \log(1 - \varepsilon) > -\gamma$  であるので

$$\frac{1}{n} \log M_n - \gamma \leq \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \quad (190)$$

$$\frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| + \gamma \geq \frac{1}{n} \log M_n \quad (191)$$

となるが、これは式(184)に矛盾する。よって、達成可能なレート  $R$  は  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n|$  より大きくなれない。□

### 3.3.2 コスト制約を漸近的に満たす

ここでコスト制約が漸近的な場合を考える。

**定義 10** 非負実数  $R, \Gamma$  に対し、レート  $R$  が  $\Gamma$ -達成可能とは

$$\varepsilon_n \leq \varepsilon \quad (192)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq R \quad (193)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(U_{M_n})) \leq \Gamma \right\} = 1 \quad (194)$$

を満たすような符号の列  $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$  が存在することである。

**定理 10**  $\Gamma$ -通信路容量  $C(\Gamma)$  は

$$C(\Gamma) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \quad (195)$$

で与えられる。

[証明]

1) Direct part:

コスト制約が式(194)の場合でも符号の作り方は式(165)の場合と同じなので、定理 10 と同様に順定理の証明が可能である。

2) Converse part: 背理法によって  $C(\Gamma) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n|$  を示す。

そこで

$$R > \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \quad (196)$$

が  $\Gamma$ -達成可能であるとして矛盾を導く。まず

$$R - 2\gamma > \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \quad (197)$$

なる  $\gamma > 0$  をとる。ただし  $\gamma > 0$  は十分小さな定数である。 $R$  が達成可能であるから

$$\varepsilon_n \leq \varepsilon \quad (198)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq R \quad (199)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(U_{M_n})) \leq \Gamma \right\} = 1 \quad (200)$$

なる符号の列  $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$  が存在することになる。ここで、定理 6 の式 (61)～(62) と同様の議論を用いて、無限個の  $n$  で

$$\frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| + \gamma < \frac{1}{n} \log M_n \quad (201)$$

となる。ここで

$$\mathcal{S}_n \triangleq \{\varphi_n(m) | m = 1, \dots, M_n\} \quad (202)$$

を定義すると

$$|\{\varphi_n(m) | m = 1, \dots, M_n\}| \leq M_n \quad (203)$$

である。そのもとで誤りなく届く  $m = 1, \dots, M'_n$  の符号語の集合を

$$\mathcal{S}'_n \triangleq \{\varphi_n(m) | m = 1, \dots, M'_n\} \quad (204)$$

$$|\{\varphi_n(m) | m = 1, \dots, M'_n\}| = M'_n \quad (205)$$

と定義すると

$$M_n = M'_n + (M_n - M'_n) \quad (206)$$

$$M'_n = |\mathcal{S}'_n| \quad (207)$$

$$= |\mathcal{S}'_n \cap \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| + |\mathcal{S}'_n \setminus \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \quad (208)$$

となり

$$\mathcal{S}'_n \setminus \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n \subset \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n \quad (209)$$

より

$$|\mathcal{S}_n \setminus \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \leq |\{m | \varphi_n(m) \in \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n\}| \quad (210)$$

$$= |\{m | \varphi_n(m) \in \mathcal{S}_n \text{かつ} \varphi_n(m) \notin \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n\}| \quad (211)$$

$$\leq |\{m | \varphi_n(m) \notin \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n\}| \quad (212)$$

$$= \left| \left\{ m \left| \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(m)) > \Gamma \right. \right\} \right| \quad (213)$$

となることから

$$M'_n \leq |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| + \left| \left\{ m \left| \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(m)) > \Gamma \right. \right\} \right| \quad (214)$$

となる。ここで式 (200) より、 $\forall \delta > 0$  に対して十分大きなすべての  $n$  で

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(U_{M_n})) \leq \Gamma \right\} > 1 - \delta \quad (215)$$

である. よって

$$\Pr\left\{\frac{1}{n}c_n(\varphi_n(U_{M_n})) \leq \Gamma\right\} = \frac{1}{M_n}\left|\left\{m \left| \frac{1}{n}c_n(\varphi_n(m)) \leq \Gamma\right.\right\}\right| > 1 - \delta \quad (216)$$

より

$$\delta > 1 - \frac{1}{M_n}\left|\left\{m \left| \frac{1}{n}c_n(\varphi_n(m)) \leq \Gamma\right.\right\}\right| \quad (217)$$

$$= \frac{1}{M_n}\left|\left\{m \left| \frac{1}{n}c_n(\varphi_n(m)) > \Gamma\right.\right\}\right| \quad (218)$$

となる. ここで符号が誤りなく届くことから, 式 (218), 式 (214) より

$$1 = \frac{M'_n}{M_n} + \frac{M_n - M'_n}{M_n} \quad (219)$$

$$\leq \frac{|\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| + \left|\left\{m \left| \frac{1}{n}c_n(\varphi_n(m)) > \Gamma\right.\right\}\right|}{M_n} + \varepsilon_n \quad (220)$$

$$\leq \frac{|\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n|}{M_n} + \frac{1}{M_n}\left|\left\{m \left| \frac{1}{n}c_n(\varphi_n(m)) > \Gamma\right.\right\}\right| + \varepsilon_n \quad (221)$$

$$\leq \frac{|\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n|}{M_n} + \delta + \varepsilon \quad (222)$$

となる. よって

$$M_n(1 - \delta - \varepsilon) \leq |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \quad (223)$$

$$\frac{1}{n} \log M_n + \frac{1}{n} \log(1 - \delta - \varepsilon) \leq \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \quad (224)$$

となる. ここで  $\gamma$  に対して  $n$  が十分に大きければ  $\frac{1}{n} \log(1 - \delta - \varepsilon) > -\gamma$  なので

$$\frac{1}{n} \log M_n - \gamma \leq \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \quad (225)$$

$$\frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| + \gamma \geq \frac{1}{n} \log M_n \quad (226)$$

となり, これは式 (201) に矛盾する. よって, 達成可能なレート  $R$  は  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n|$  より大きくなれない.  $\square$

### 3.4 小さい誤り確率を漸近的に許す場合

本節では復号誤り確率が漸近的に上から抑えられる場合を考える.

### 3.4.1 コスト制約を厳密に満たす

ここでコスト制約が厳密な場合を考える。

**定義 11** 非負実数  $R, \Gamma$  に対し, レート  $R$  が  $\Gamma$ -達成可能とは

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n \leq \varepsilon \quad (227)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq R \quad (228)$$

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(U_{M_n})) \leq \Gamma \right\} = 1 \quad (229)$$

を満たすような符号の列  $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$  が存在することである。

**定理 11**  $\Gamma$ -通信路容量  $C(\Gamma)$  は

$$C(\Gamma) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \quad (230)$$

で与えられる。

[証明]

順定理・逆定理ともに, 符号の構成方法および誤り確率の評価手法自体は定理 9 の議論と共にあり, 許容される誤りの基準を  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n \leq \varepsilon$  に拡張するだけで同様に証明が可能である。  $\square$

### 3.4.2 コスト制約を漸近的に満たす

ここでコスト制約が漸近的な場合を考える。

**定義 12** 非負実数  $R, \Gamma$  に対し, レート  $R$  が  $\Gamma$ -達成可能とは

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n \leq \varepsilon \quad (231)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq R \quad (232)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(\varphi_n(U_{M_n})) \leq \Gamma \right\} = 1 \quad (233)$$

を満たすような符号の列  $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$  が存在することである。

**定理 12**  $\Gamma$ -通信路容量  $C(\Gamma)$  は

$$C(\Gamma) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \quad (234)$$

で与えられる。

[証明]

順定理・逆定理ともに, 符号の構成方法および誤り確率の評価手法自体は定理 9 の議論と共に

であり，許容される誤りの基準を  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n \leq \varepsilon$  に拡張するだけで同様に証明が可能である。  $\square$

## 4 通信路容量の関係

本章では，3章で議論した8つの条件下での通信路容量の関係を整理する。表1は，コスト制約と復号誤り確率の組み合わせに対応する通信路容量の番号を示したものである。

ここで，表中の各番号に対応する通信路容量の式を以下に定義する。

$$\textcircled{1} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \quad (235)$$

$$\textcircled{2} \quad \sup_{\mathbf{X}: \Pr\{\frac{1}{n}c_n(X^n) \leq \Gamma\} = 1} \underline{H}(\mathbf{X}) \quad (236)$$

$$\textcircled{3} \quad \sup_{\mathbf{X}: \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\{\frac{1}{n}c_n(X^n) \leq \Gamma\} = 1} \underline{H}(\mathbf{X}) \quad (237)$$

本章では，これらの通信路容量が全て同じ値であることを示す。

まず，式(235)と式(236)において以下の補題が成り立つ。

**補題2** これまで述べた二つの通信路容量に対して

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| = \sup_{\mathbf{X}: \Pr\{\frac{1}{n}c_n(X^n) \leq \Gamma\} = 1} \underline{H}(\mathbf{X}) \quad (238)$$

が成立する。

[証明]

part(1):

まず

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \leq \sup_{\mathbf{X}: \Pr\{\frac{1}{n}c_n(X^n) \leq \Gamma\} = 1} \underline{H}(\mathbf{X})$$

を示したい。

ここで  $R < \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n|$  なる任意の  $R$  を考える。すると，十分大きなすべて

表1 コスト制約と誤り確率の各条件における通信路容量

コスト制約 / 誤り確率	$\varepsilon_n = 0$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$	$\varepsilon_n \leq \varepsilon$	$\limsup_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n \leq \varepsilon$
$\Pr\left\{\frac{1}{n}c_n(\varphi_n(U_{M_n})) \leq \Gamma\right\} = 1$	(1)	(2)	(1)	(1)
$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}c_n(\varphi_n(U_{M_n})) \leq \Gamma\right\} = 1$	(1)	(3)	(1)	(1)

の  $n$  で

$$\frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| > R \quad (239)$$

となる。

いま、 $X^n$  は  $\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n$  上に一様に分布するとする。すなわち

$$P_{X^n}(x) = \begin{cases} \frac{1}{|\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n|} & (x \in \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (240)$$

とする。したがって

$$\frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(X^n)} = \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \quad (241)$$

より、十分大きなすべての  $n$  で

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \leq R \right\} = 0 \quad (242)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \leq R \right\} = 0 \quad (243)$$

となる。ゆえに

$$\underline{H}(\mathbf{X}) = \text{p-lim inf } \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \geq R \quad (244)$$

となる。ところが式 (240) より  $\mathbf{X}$  は

$$\Pr \{ X^n \in \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n \} = 1 \quad (245)$$

を満たすので

$$\underline{H}(\mathbf{X}) \leq \sup_{\mathbf{X}: \Pr \{ \frac{1}{n} c_n(X^n) \leq \Gamma \} = 1} \underline{H}(\mathbf{X}) \quad (246)$$

となる。したがって

$$R \leq \sup_{\mathbf{X}: \Pr \{ \frac{1}{n} c_n(X^n) \leq \Gamma \} = 1} \underline{H}(\mathbf{X}) \quad (247)$$

を得る。以上より

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \leq \sup_{\mathbf{X}: \Pr \{ \frac{1}{n} c_n(X^n) \leq \Gamma \} = 1} \underline{H}(\mathbf{X}) \quad (248)$$

が成り立つ。

part(2):

次に

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \geq \sup_{\mathbf{X}: \Pr\{\frac{1}{n} c_n(X^n) \leq \Gamma\} = 1} \underline{H}(\mathbf{X})$$

を示したい。ここで

$$R < \sup_{\mathbf{X}: \Pr\{\frac{1}{n} c_n(X^n) \leq \Gamma\} = 1} \underline{H}(\mathbf{X}) \quad (249)$$

なる任意の  $R$  を考える。すると、ある  $\mathbf{X}$  が存在して

$$\Pr\left\{\frac{1}{n} c_n(X^n) \leq \Gamma\right\} = 1 \quad (250)$$

を満たし、かつ

$$R < \underline{H}(\mathbf{X}) \quad (251)$$

$$= \text{p-lim inf}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \quad (252)$$

となる。ここで付録 A の補題 3 より

$$R < \text{p-lim inf}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \leq \text{p-lim inf}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \quad (253)$$

$$= \sup\left\{\theta \middle| \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\left\{\frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| < \theta\right\} = 0\right\} \quad (254)$$

となる。ここで

$$A \triangleq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \quad (255)$$

と定義すると、

$$\sup\left\{\theta \middle| \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\left\{\frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| < \theta\right\} = 0\right\} \leq A + \gamma \quad (256)$$

となる。また任意の  $\gamma > 0$  に対して無限個の  $n$  で

$$\frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| < A + \gamma \quad (257)$$

$$\Pr\left\{\frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| < A + \gamma\right\} = 1 \quad (258)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\left\{\frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| < A + \gamma\right\} = 0 \quad (259)$$

とはならない。したがって

$$R < A + \gamma \quad (260)$$

となるが、 $\gamma > 0$  は任意なので

$$R \leq A \quad (261)$$

$$= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \quad (262)$$

を得る。以上より

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \geq \sup_{\mathbf{X}: \Pr\{\frac{1}{n} c_n(X^n) \leq \Gamma\} = 1} \underline{H}(\mathbf{X}) \quad (263)$$

が成り立つ。  $\square$

次に、式(236)と式(237)において以下の補題が成り立つ。

**補題4** これまで述べた二つの通信路容量に対して

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| = \sup_{\mathbf{X}: \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\{\frac{1}{n} c_n(X^n) \leq \Gamma\} = 1} \underline{H}(\mathbf{X}) \quad (264)$$

が成立する。

[証明]

part(1):

まず

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \leq \sup_{\mathbf{X}: \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\{\frac{1}{n} c_n(X^n) \leq \Gamma\} = 1} \underline{H}(\mathbf{X})$$

を示したい。

ここで  $R < \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n|$  なる任意の  $R$  を考える。すると、十分大きなすべての  $n$  で

$$\frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| > R \quad (265)$$

となる。

いま、 $\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n$  上に一様に分布する  $X^n$  を考える。すると

$$\frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \stackrel{a.s.}{=} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \quad (266)$$

であるから、十分大きなすべての  $n$  で

$$\Pr\left\{ \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(X^n)} < R \right\} \leq \Pr\left\{ \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(X^n)} < \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \right\} = 0 \quad (267)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\left\{ \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(X^n)} < R \right\} = 0 \quad (268)$$

となる. したがって

$$\underline{H}(\mathbf{X}) = \text{p-lim inf}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \geq R \quad (269)$$

となる. ところが  $\mathbf{X}$  は

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} c_n(X^n) \leq \Gamma \right\} = \Pr \{ X^n \in \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n \} = 1 \quad (270)$$

を満たすので

$$R \leq \sup_{\mathbf{X}: \Pr \{ X^n \in \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n \} = 1} \underline{H}(\mathbf{X}) \quad (271)$$

$$\leq \sup_{\mathbf{X}: \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \{ X^n \in \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n \} = 1} \underline{H}(\mathbf{X}) \quad (272)$$

が成り立つ.

part(2):

次に

$$R < \sup_{\mathbf{X}: \Pr \{ X^n \in \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n \} = 1} \underline{H}(\mathbf{X})$$

なる  $\forall R$  を考える. このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \{ X^n \in \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n \} = 1 \quad (273)$$

なる  $\exists \mathbf{X}$  が存在し  $R < \underline{H}(\mathbf{X})$  である.

$R + \gamma < \underline{H}(\mathbf{X})$  なるような十分小さい  $\forall \gamma > 0$  をとる. すると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(X^n)} < R + \gamma \right\} = 0 \quad (274)$$

である. ここで

$$\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n \triangleq \left\{ \mathbf{x} \left| \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(\mathbf{x})} < \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| + \gamma \right. \right\} \quad (275)$$

とおく.  $\mathbf{x} \notin \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n$  ならば  $P_{X^n}(\mathbf{x}) \leq \frac{e^{-n\gamma}}{|\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n|}$  である. すると式 (273) を用いて

$$\Pr \{ X^n \notin \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n \} = \sum_{\mathbf{x}} P_{X^n}(\mathbf{x}) \mathbb{1}\{\mathbf{x} \notin \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n\} \quad (276)$$

$$\leq \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n} \frac{e^{-n\gamma}}{|\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n|} + \sum_{\mathbf{x} \notin \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n} P_{X^n}(\mathbf{x}) \quad (277)$$

$$= e^{-n\gamma} + \Pr \{ X^n \notin \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n \} \quad (278)$$

$$\rightarrow 0 \quad (279)$$

となる。したがって

$$\mathbb{1} \left\{ \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| < R \right\} \leq \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| < R, X^n \in \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n \right\} + \Pr \{ X^n \notin \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n \} \quad (280)$$

$$\leq \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(\mathbf{x})} < R + \gamma \right\} + \Pr \{ X^n \notin \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n \} \quad (281)$$

$$\rightarrow 0 \quad (282)$$

これは十分大きなすべての  $n$  で

$$\frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \geq R \quad (283)$$

なることを意味するので

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \geq R \quad (284)$$

を得る。よって

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \geq \sup_{\mathbf{X}: \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \{ X^n \in \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n \} = 1} H(\mathbf{X}) \quad (285)$$

$$\geq \sup_{\mathbf{X}: \Pr \{ X^n \in \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n \} = 1} H(\mathbf{X}) \quad (286)$$

が成り立つ。  $\square$

補題 2 と補題 4 から、3 章で述べた通信路容量が等価であることがわかった。

## 5 まとめ

本研究では、雑音のない一般通信路の固定長通信路符号化におけるコスト制約付き通信路容量の証明をした。

雑音がないことから送り手が送った符号シンボルが誤ることなく受け手に届くということを再定義し、証明を進めるなかで、雑音のない通信路は雑音のある通信路の特別な条件であるため、同じ証明で導けると考えたが、雑音のない通信路の特別な証明が必要だった。

本研究で定義した補題を活用して、雑音のない一般通信路の可変長通信路符号化におけるコスト制約付き通信路容量を考え、固定長通信路符号化との関係を考察するとともに、情報源のレート歪み特性と通信路のコスト制約がトレードオフの関係において、いかに効率的なリソース分配が可能かという情報源符号化と通信路符号化の双対性に基づいた新たな解析手法の確立が検討できる。

## 謝辞

本研究を進めるにあたり、丁寧なご指導を頂いた西新幹彦准教授に感謝の意を表する。

## 参考文献

- [1] 韓太舜, 情報理論における情報スペクトル的方法, 培風館, 1998.
- [2] 植松友彦, 「情報源のコスト付き符号化とその応用」, 電子情報通信学会, 論文誌, no.5, pp.558–590, May 2004.

## 付録 A 構成の証明

ここでは次の補題を証明する。

**補題 1** 符号  $\varphi_n(\mathcal{M}_n)$  上の一様分布に従う確率変数を  $X^n$  とし、各  $n = 1, 2, \dots$  に対して

$$\varepsilon_n \geq \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \leq \frac{1}{n} \log M_n - \gamma \right\} - e^{-n\gamma} \quad (287)$$

が成立する。

[証明] 証明を始めるにあたり

$$L_n \triangleq \left\{ \mathbf{x} \left| \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(\mathbf{x})} \leq \frac{1}{n} \log M_n - \gamma \right. \right\} \quad (288)$$

とおく。これらを用いると、式 (287) は

$$\varepsilon_n \geq \Pr\{X^n \in L_n\} - e^{-n\gamma} \quad (289)$$

と書き換える。これを示すために、正しく復号されるメッセージの集合を  $D = \{m \in \mathcal{M}_n | \psi_n(\varphi_n(m)) = m\}$  とすると、

$$\Pr\{X^n \in L_n\} = \sum_{m=1}^{M_n} \Pr\{X^n \in L_n, U_{M_n} = m\} \quad (290)$$

$$= \sum_{m=1}^{M_n} \Pr\{\varphi_n(U_{M_n}) \in L_n, U_{M_n} = m\} \quad (291)$$

$$= \sum_{m=1}^{M_n} \Pr\{\varphi_n(m) \in L_n, U_{M_n} = m\} \quad (292)$$

$$= \sum_{m=1}^{M_n} \mathbb{1}\{\varphi_n(m) \in L_n\} \cdot \Pr\{U_{M_n} = m\} \quad (293)$$

$$= \frac{1}{M_n} \sum_{m=1}^{M_n} \mathbb{1}\{\varphi_n(m) \in L_n\} \quad (294)$$

$$= \frac{1}{M_n} \sum_{m=1}^{M_n} \mathbb{1}\{\varphi_n(m) \in L_n, m \notin D\} + \frac{1}{M_n} \sum_{m=1}^{M_n} \mathbb{1}\{\varphi_n(m) \in L_n, m \in D\} \quad (295)$$

となる. ここで, 第 1 項は,

$$\frac{1}{M_n} \sum_{m=1}^{M_n} \mathbb{1}\{\varphi_n(m) \in L_n, m \notin D\} \leq \frac{1}{M_n} \sum_{m=1}^{M_n} \mathbb{1}\{m \notin D\} \quad (296)$$

$$= \frac{1}{M_n} \sum_{m=1}^{M_n} \mathbb{1}\{\psi_n(\varphi_n(m)) \neq m\} \quad (297)$$

$$= \varepsilon_n \quad (298)$$

となる. また, 第 2 項は,

$$\frac{1}{M_n} \sum_{m=1}^{M_n} \mathbb{1}\{\varphi_n(m) \in L_n, m \in D\} = \sum_{m=1}^{M_n} \frac{1}{M_n} \mathbb{1}\{\varphi_n(m) \in L_n, m \in D\} \quad (299)$$

となる. ここで  $\mathbf{x} \in L_n$  のとき

$$\frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(\mathbf{x})} \leq \frac{1}{n} \log M_n - \gamma \quad (300)$$

$$\log \frac{1}{P_{X^n}(\mathbf{x})} \leq \log M_n - n\gamma \quad (301)$$

$$\log \frac{1}{P_{X^n}(\mathbf{x}) \cdot M_n} \leq -n\gamma \quad (302)$$

$$\frac{1}{P_{X^n}(\mathbf{x}) \cdot M_n} \leq e^{-n\gamma} \quad (303)$$

$$\frac{1}{M_n} \leq P_{X^n}(\mathbf{x}) \cdot e^{-n\gamma} \quad (304)$$

であるが,  $\varphi_n(m) \in L_n$  なので

$$\frac{1}{M_n} \leq P_{X^n}(\varphi_n(m)) \cdot e^{-n\gamma} \quad (305)$$

である. よって, 式 (299) は

$$\frac{1}{M_n} \sum_{m=1}^{M_n} \mathbb{1}\{\varphi_n(m) \in L_n, m \in D\} = \sum_{m=1}^{M_n} \frac{1}{M_n} \mathbb{1}\{\varphi_n(m) \in L_n, m \in D\} \quad (306)$$

$$\leq \sum_{m=1}^{M_n} P_{X^n}(\varphi_n(m)) e^{-n\gamma} \mathbb{1}\{\varphi_n(m) \in L_n, m \in D\} \quad (307)$$

$$\leq e^{-n\gamma} \sum_{m=1}^{M_n} P_{X^n}(\varphi_n(m)) \mathbb{1}\{m \in D\} \quad (308)$$

$$= e^{-n\gamma} \sum_{m \in D} P_{X^n}(\varphi_n(m)) \quad (309)$$

$$\leq e^{-n\gamma} \quad (310)$$

となる. ただし最後の不等式は,  $m \in D$  に対して  $\varphi_n(m)$  はすべて異なるためである. したがって

$$\Pr\{X^n \in L_n\} \leq \varepsilon_n + e^{-n\gamma} \quad (311)$$

となる. よって式 (287) が示された.  $\square$

**補題 3** ある  $\mathbf{X}$  が存在して  $\Pr\left\{\frac{1}{n}c_n(X^n) \leq \Gamma\right\} = 1$  を満たすとき

$$\underline{H}(\mathbf{X}) \leq \text{p-lim inf}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \quad (312)$$

が成立する.

[証明] 確率的下極限の定義より

$$\Pr\left\{\frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(X^n)} > \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| + \gamma\right\} \quad (313)$$

$$= \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n} P_{X^n}(\mathbf{x}) \mathbb{1}\left\{\frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(\mathbf{x})} > \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| + \gamma\right\} \quad (314)$$

$$= \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n} P_{X^n}(\mathbf{x}) \mathbb{1}\left\{P_{X^n}(\mathbf{x}) < \frac{1}{|\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n|} e^{-n\gamma}\right\} \quad (315)$$

$$\leq \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n} \frac{1}{|\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n|} e^{-n\gamma} \quad (316)$$

$$= e^{-n\gamma} \quad (317)$$

となり, 式 (317) は 0 に収束する. したがって

$$\Pr\left\{\frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| < \theta - \gamma\right\} \leq \Pr\left\{\frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| < \theta - \gamma, X^n \in \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n\right\} + \Pr\{X^n \notin \mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n\} \quad (318)$$

$$\leq \Pr\left\{\frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(X^n)} < \theta\right\} + e^{-n+\gamma} \quad (319)$$

となる. すなわち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\left\{\frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(X^n)} < \theta\right\} = 0 \quad (320)$$

ならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\left\{\frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| < \theta - \gamma\right\} = 0 \quad (321)$$

である. ここで

$$B < \text{p-lim inf}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \quad (322)$$

$$= \sup \left\{ \theta \left| \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(X^n)} < \theta \right\} = 0 \right. \right\} \quad (323)$$

とおく. このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(X^n)} < B \right\} = 0 \quad (324)$$

であるため, 任意の  $\gamma > 0$  に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| < B - \gamma \right\} = 0 \quad (325)$$

となる. したがって

$$B - \gamma \leq \text{p-lim inf}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \quad (326)$$

となり, 任意の  $\gamma > 0$  に対して

$$B < \underline{H}(\mathbf{X}) \quad (327)$$

であるならば

$$B \leq \text{p-lim inf}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| + \gamma \quad (328)$$

となる. ゆえに

$$\underline{H}(\mathbf{X}) \leq \text{p-lim inf}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{X}_{\leq \Gamma}^n| \quad (329)$$

を得る. □