信州大学
大学院総合理工学研究科
修士論文

コスト制約付き通信路符号化定理のランダム符号化を用いた証明

指導教員　西新 幹彦 准教授

分野　電子情報システム学分野
学籍番号　23W2061A
氏名　髙丸 修一

2025 年 2 月 13 日

目次

1　はじめに

通信路符号化問題とは，送信者と受信者が誤りなく通信を行うという条件の下で，符号化レートの上限を求める問題である [1]．実際の通信システムでは，符号化レートだけでなく，電力や時間，費用など送信のためのコストも考える必要がある．そのようなコストを通信路の入力に定義し，コスト制約を課した問題をコスト制約付き通信路符号化問題といい，通信路の出力に定義した問題を着払いコスト制約付き通信路符号化問題という．この問題の拡張として，復号誤りとコスト超過をある程度許容した問題が存在する [1][2][3]．先行研究 [1][2] は通信路の入力にコストを定義した場合での通信路容量を，[3] は出力に定義した場合の通信路容量をそれぞれ明らかにした．

一方，近年では復号に必要な電力を受信した信号から得るエナジーハーベストという通信技術が存在する [4]．これは着払いコスト制約付き通信路符号化問題において，受信語にかかるコストを，受信語から得られる電力と考える事で定式化することが出来る．つまり，電力を一定値以上必要とする問題として考える事が出来る．

通信路容量は，順定理と逆定理によって示される．順定理では性能の良い符号を構成し，その符号によって符号化レートが達成可能である事を示す．順定理での符号を構成する方法として，ランダム符号化と非ランダム符号化の 2 種類が知られている．先行研究 [1][2][3] では，それぞれ非ランダムに符号を構成する手法を用いて順定理の証明がされている．

本論文では [1][2][3] で示された通信路符号化定理の順定理をランダム符号化を用いて示す．さらにエナジーハーベストにおいて，電力不足と復号誤りを許容した問題を定式化し，ランダム符号化を用いて通信路容量を求める．

加えて，コストを定義する場所が通信路の入力なのか出力なのかを区別せず，一般化した通信路符号化定理の順定理 [3] をランダム符号化を用いて示す．

ランダム符号化による順定理の証明のため，先行研究 [2] の成果である，二段階に符号を構成する方法に着目した．この手法を基に，二段階に分けてランダム符号化を用いて証明する．

2　数学的準備

復号誤りとコスト超過を許容したコスト制約付き通信路符号化問題は以下のように定式化される．通信路の入力アルファベットを $\mathcal{X}$，通信路の出力アルファベットを $\mathcal{Y}$ とする．このとき一般通信路は，入力系列 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathcal{X}^n$ と出力系列 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathcal{Y}^n$ を用いて，条件付き確率の列 $\boldsymbol{W} \triangleq \{W^n(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})\}_{n=1}^{\infty}$ で表すことができる．また，本論文では入力を $\boldsymbol{X}$ としたときの通信路出力を $\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})$ と表記する．

送信するメッセージの集合を $\mathcal{M}_n = \{1, 2, \cdots, M_n\}$ とし，M_n を符号語数とする．メッセー

ジは符号器 $\varphi_n : \mathcal{M}_n \to \mathcal{X}^n$ で符号化され，復号器 $\psi_n : \mathcal{Y}^n \to \mathcal{M}_n$ で通信路の出力 $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^n$ を復号する．そのときの $\varphi_n(m)$ をメッセージ $m \in \mathcal{M}_n$ の符号語という．

このとき，必ずしも入力メッセージと出力メッセージは一致するとは限らない．そのときの一致しない確率は

$$\varepsilon_n(\varphi_n) \triangleq \frac{1}{M_n} \sum_{m=1}^{M_n} W^n(\psi_n^{-1}(m)^{\complement} | \varphi_n(m)) \tag{1}$$

と表され，復号誤り確率と呼ばれる．ただし $\complement$ は補集合を表し，$\psi_n^{-1}(m)$ は m と復号される受信語 $\boldsymbol{y}$ 全体を表し，m に対する復号領域と呼ばれる．

定義 1　実数値確率変数列 $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty} Z_n \triangleq \inf\left\{\alpha \,\middle|\, \lim_{n\to\infty} \Pr\{Z_n > \alpha\} = 0\right\} \tag{2}$$

$$\text{p-}\liminf_{n\to\infty} Z_n \triangleq \sup\left\{\alpha \,\middle|\, \lim_{n\to\infty} \Pr\{Z_n < \alpha\} = 0\right\} \tag{3}$$

とし，式 (2) を確率的上極限，式 (3) を確率的下極限と呼ぶ．

本論文で扱う対数はすべて自然対数である．また確率変数 Z に対し，その確率分布を P_Z と表す．すなわち，$P_Z(z) = \Pr\{Z = z\}$ である．さらに $X = x$ が与えられたもとで $Y = y$ となる条件付き確率を $P_{Y|X}(y|x) = \Pr\{Y = y \mid X = x\}$ と表す．

定義 2　二つの確率変数列 $\boldsymbol{X} = \{X^n\}_{n=1}^{\infty}, \boldsymbol{Y} = \{Y^n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$\underline{I}_{\varepsilon}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) \triangleq \sup\left\{\theta \,\middle|\, \limsup_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n|X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} < \theta\right\} \le \varepsilon\right\}$$

と定義する．

3　コスト制約付き通信路符号化定理

この章では，ランダム符号化を用いてコスト制約付き通信路符号化問題の順定理を示す．3.1 節では復号誤りを許容した問題を，3.2 節では復号誤りとコスト超過を許容した問題をランダム符号化を用いて示す．尚，本章では通信路の入力 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n$ に対してコストを定義する．そのため，実数 $c_n(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{x}$ のコストと呼ぶ．

3.1　復号誤りを許容したコスト制約付き通信路符号化問題の順定理

証明に際し，以下を準備する．

定義 3　$\boldsymbol{X}$ に対して

$$\overline{c}(\boldsymbol{X}) \triangleq \text{p-}\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} c_n(X^n) \tag{4}$$

と定義する．

定義 4　任意の $\Gamma \geq 0,\, 0 \leq \varepsilon < 1$ に対し，レート R が (ε, Γ)-達成可能とは

$$\limsup_{n\to\infty} \varepsilon_n(\varphi_n) \leq \varepsilon \tag{5}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq R \tag{6}$$

$$\overline{c}(\{\varphi_n(U_{M_n})\}_{n=1}^{\infty}) \leq \Gamma \tag{7}$$

がすべて成り立つような符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する事である．M_n は符号語数とし，U_{M_n} は M_n 以下の自然数上に一様に分布する確率変数とする．

定義 5　ε, Γ に対して

$$C(\varepsilon, \Gamma) \triangleq \sup\{R | R \text{ は } (\varepsilon, \Gamma)\text{-達成可能 }\} \tag{8}$$

と定義し，これを (ε, Γ)-通信路容量と呼ぶ．このとき，次の定理が成り立つ事が知られている．

定理 [2]　一般通信路における (ε, Γ)-通信路容量は

$$C(\varepsilon, \Gamma) = \sup_{\boldsymbol{X}: \overline{c}(\boldsymbol{X}) \leq \Gamma} \underline{I}_{\varepsilon}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) \tag{9}$$

と表される．

定理 1 の順定理　(ε, Γ)-通信路容量は

$$C(\varepsilon, \Gamma) \geq \sup_{\boldsymbol{X}: \overline{c}(\boldsymbol{X}) \leq \Gamma} \underline{I}_{\varepsilon}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) \tag{10}$$

を満たす．

〔証明〕

$$R < \sup_{\boldsymbol{X}: \overline{c}(\boldsymbol{X}) \leq \Gamma} \underline{I}_{\varepsilon}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) \tag{11}$$

なる任意の R を考える．ある $\gamma > 0$ を用いて

$$R \leq \sup_{\boldsymbol{X}: \overline{c}(\boldsymbol{X}) \leq \Gamma} \underline{I}_{\varepsilon}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) - 3\gamma \tag{12}$$

となる．すると

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} c_n(X^n) \leq \Gamma \tag{13}$$

なる入力 $\boldsymbol{X}$ が存在して

$$R < \underline{I}_{\varepsilon}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) - 2\gamma \tag{14}$$

が成り立つ．ここで，

$$M_n \triangleq e^{nR} \tag{15}$$

$$\mathcal{B}_n(\boldsymbol{x}) \triangleq \left\{ \boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^n \middle| \frac{1}{n} \log \frac{W^n(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})}{P_{Y^n}(\boldsymbol{y})} \geq \frac{1}{n} \log M_n + \gamma \right\} \tag{16}$$

とおく．以後，入力が X^n である時のみ $Y^n(X^n)$ を Y^n と表記する．

次にランダム符号化を用いて符号を構成する．符号語 $\bar{\varphi}_n(1), \bar{\varphi}_n(2), \cdots, \bar{\varphi}_n(M_n) \in \mathcal{X}^n$ を分布 $P_{X^n}(\boldsymbol{x})$ に従って，互いに独立に発生させる．ここでこれらの符号語は確率変数である為，$\bar{\varphi}_n$ として区別する．復号器については次のように定める．復号器が $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^n$ を受け取ったとする．このとき $\boldsymbol{y} \in \mathcal{B}(\bar{\varphi}_n(m))$ なる m がただ一つ存在するとき，復号器はその番号 m を出力する．そのような番号 m が一つも無いときや複数個存在するときは，誤りが起こったものとする．

ここで任意の $\delta > 0$ に対して

$$Z_n(\delta) \triangleq \frac{1}{M_n} \sum_{m=1}^{M_n} \mathbb{1} \left\{ \frac{1}{n} c_n(\bar{\varphi}_n(m)) > \Gamma + \delta \right\} \tag{17}$$

とする．$Z_n(\delta)$ の期待値を求めると

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_n(\delta)] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{M_n} \sum_{m=1}^{M_n} \mathbb{1} \left\{ \frac{1}{n} c_n(\bar{\varphi}_n(m)) > \Gamma + \delta \right\} \right] &(18)\\
&= \frac{1}{M_n} \sum_{m=1}^{M_n} \mathbb{E}\left[\mathbb{1} \left\{ \frac{1}{n} c_n(\bar{\varphi}_n(m)) > \Gamma + \delta \right\} \right] &(19)\\
&= \frac{1}{M_n} \sum_{m=1}^{M_n} \mathbb{E}\left[\mathbb{1} \left\{ \frac{1}{n} c_n(X^n) > \Gamma + \delta \right\} \right] &(20)\\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1} \left\{ \frac{1}{n} c_n(X^n) > \Gamma + \delta \right\} \right] &(21)\\
&= \Pr\left\{ \frac{1}{n} c_n(X^n) > \Gamma + \delta \right\} &(22)
\end{aligned}$$

となる．式 (13) より，

$$\mathbb{E}[Z_n(\delta)] = \Pr\left\{ \frac{1}{n} c_n(X^n) > \Gamma + \delta \right\} \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{23}$$

が成り立つ．ここでマルコフの不等式より，任意の $\lambda > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_n(\delta)] &= \sum_{\boldsymbol{z}_n} P_{Z_n(\delta)}(\boldsymbol{z}_n) &(24)\\
&\geq \sum_{\boldsymbol{z}_n \geq \lambda} P_{Z_n(\delta)}(\boldsymbol{z}_n) &(25)\\
&\geq \lambda \Pr\{Z_n(\delta) > a\} &(26)
\end{aligned}$$

となり，結局

$$\Pr\{Z_n(\delta) > \lambda\} \leq \frac{\mathbb{E}[Z_n(\delta)]}{\lambda} \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{27}$$

となる．式 (27) と，$\lambda > 0$ の任意性より

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty} Z_n(\delta) = 0 \tag{28}$$

が成り立つ．すると，任意の整数 $k > 0$ に対して

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty} Z_n\left(\frac{1}{k}\right) = 0 \tag{29}$$

となり，したがって

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left\{Z_n\left(\frac{1}{k}\right) > \frac{1}{k}\right\} = 0 \tag{30}$$

となる．さらに，十分大きな全ての n で

$$\Pr\left\{Z_n\left(\frac{1}{k}\right) > \frac{1}{k}\right\} < \frac{1}{k} \tag{31}$$

が成り立つ．このとき，各 n に対して上式を満たす最大の k が決まる．その k を用いて $\gamma_n \triangleq \dfrac{1}{k}$ とすると，$n \to \infty$ で $\gamma_n \to 0$ かつ

$$\Pr\left\{Z_n\left(\gamma_n\right) > \gamma_n\right\} < \gamma_n \tag{32}$$

となる．ここで，

$$\mathcal{T}_n \triangleq \left\{\varphi_n \,\middle|\, \frac{1}{M_n}\sum_{m=1}^{M_n} \mathbb{1}\left\{\frac{1}{n}c_n(\varphi_n(m)) > \Gamma + \gamma_n\right\} \leq \gamma_n\right\} \tag{33}$$

と定義し，$\varphi_n \in \mathcal{T}_n$ となる符号を典型的な符号と呼ぶ．$\mathcal{T}_n$ の定義より

$$\begin{aligned}
\Pr\{\bar{\varphi}_n \notin \mathcal{T}_n\} &= \Pr\left\{\frac{1}{M_n}\sum_{m=1}^{M_n} \mathbb{1}\left\{\frac{1}{n}c_n(\bar{\varphi}_n(m)) > \Gamma + \gamma_n\right\} > \gamma_n\right\} && (34)\\
&= \Pr\{Z_n(\gamma_n) > \gamma_n\} && (35)\\
&< \gamma_n \to 0 \quad (n \to \infty) && (36)
\end{aligned}$$

となる．よって

$$\Pr\{\bar{\varphi}_n \in \mathcal{T}_n\} \to 1 \quad (n \to \infty) \tag{37}$$

となる．

ここで事象 $E(m, m'|\varphi_n)$ を

$$E(m, m'|\varphi_n) = \{Y^n(\varphi_n(m)) \in \mathcal{B}_n(\varphi_n(m'))\} \tag{38}$$

とする．符号が典型的であるという条件のもとで，メッセージ m を送信したときの復号誤り確率を $\bar{\varepsilon}_n(m|\mathcal{T}_n)$ とすると

$$\bar{\varepsilon}_n(m|\mathcal{T}_n) = \Pr\left\{ E^{\complement}(m, m|\bar{\varphi}_n) \cup \bigcup_{m' \neq m} E(m, m'|\bar{\varphi}_n) \middle| \bar{\varphi}_n \in \mathcal{T}_n \right\} \tag{39}$$

$$\leq \Pr\left\{ E^{\complement}(m, m|\bar{\varphi}_n) \middle| \bar{\varphi}_n \in \mathcal{T}_n \right\} + \Pr\left\{ \bigcup_{m' \neq m} E(m, m'|\bar{\varphi}_n) \middle| \bar{\varphi}_n \in \mathcal{T}_n \right\} \tag{40}$$

$$\begin{aligned} &\leq \Pr\{Y^n(\bar{\varphi}_n(m)) \notin \mathcal{B}_n(\bar{\varphi}_n(m)) | \bar{\varphi}_n \in \mathcal{T}_n\} \\ &\quad + \sum_{m' \neq m} \Pr\{Y^n(\bar{\varphi}_n(m)) \in \mathcal{B}_n(\bar{\varphi}_n(m')) | \bar{\varphi}_n \in \mathcal{T}_n\} \end{aligned} \tag{41}$$

と表せる．式 (41) の一項目は

$$\Pr\{Y^n(\bar{\varphi}_n(m)) \notin \mathcal{B}_n(\bar{\varphi}_n(m)) | \bar{\varphi}_n \in \mathcal{T}_n\} = \frac{\Pr\{Y^n(\bar{\varphi}_n(m)) \notin \mathcal{B}_n(\bar{\varphi}_n(m)), \bar{\varphi}_n \in \mathcal{T}_n\}}{\Pr\{\bar{\varphi}_n \in \mathcal{T}_n\}} \tag{42}$$

$$\leq \frac{\Pr\{Y^n(\bar{\varphi}_n(m)) \notin \mathcal{B}_n(\bar{\varphi}_n(m))\}}{\Pr\{\bar{\varphi}_n \in \mathcal{T}_n\}} \tag{43}$$

と書ける．式 (43) の分子は

$$\Pr\{Y^n(\bar{\varphi}_n(m)) \notin \mathcal{B}_n(\bar{\varphi}_n(m))\} = \Pr\{Y^n(X^n) \notin \mathcal{B}_n(X^n)\} \tag{44}$$

$$= \Pr\left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n|X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} \leq \frac{1}{n} \log M_n + \gamma \right\} \tag{45}$$

$$= \Pr\left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n|X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} \leq R + \gamma \right\} \tag{46}$$

$$\leq \Pr\left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n|X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} \leq \underline{I}_{\varepsilon}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}) - \gamma \right\} \tag{47}$$

と書ける．よって式 (41) の一項目は

$$\Pr\{Y^n(\bar{\varphi}_n(m)) \notin \mathcal{B}_n(\bar{\varphi}_n(m)) | \bar{\varphi}_n \in \mathcal{T}_n\} \tag{48}$$

$$\leq \frac{1}{\Pr\{\bar{\varphi}_n \in \mathcal{T}_n\}} \Pr\left\{ \frac{1}{n} \log \frac{W^n(Y^n|X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} \leq \underline{I}_{\varepsilon}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}) - \gamma \right\} \tag{49}$$

となる．式 (41) の二項目は

$$\sum_{m'\neq m} \Pr\left\{Y^n(\bar{\varphi}_n(m)) \in \mathcal{B}_n(\bar{\varphi}_n(m'))|\bar{\varphi}_n \in \mathcal{T}_n\right\} \tag{50}$$

$$= \sum_{m'\neq m} \frac{\Pr\left\{Y^n(\bar{\varphi}_n(m)) \in \mathcal{B}_n(\bar{\varphi}_n(m')), \bar{\varphi}_n \in \mathcal{T}_n\right\}}{\Pr\{\bar{\varphi}_n \in \mathcal{T}_n\}} \tag{51}$$

$$\leq \sum_{m'\neq m} \frac{\Pr\left\{Y^n(\bar{\varphi}_n(m)) \in \mathcal{B}_n(\bar{\varphi}_n(m'))\right\}}{\Pr\{\bar{\varphi}_n \in \mathcal{T}_n\}} \tag{52}$$

と書ける．式 (52) の分子は

$$\Pr\left\{Y^n(\bar{\varphi}_n(m)) \in \mathcal{B}_n(\bar{\varphi}_n(m'))\right\} \tag{53}$$

$$= \sum_{\boldsymbol{x}} \Pr\left\{\bar{\varphi}_n(m') = \boldsymbol{x}\right\} \Pr\{Y^n \in \mathcal{B}_n(\bar{\varphi}_n(m'))|\bar{\varphi}_n(m') = \boldsymbol{x}\} \tag{54}$$

$$= \sum_{\boldsymbol{x}} \Pr\left\{X^n = \boldsymbol{x}\right\} \Pr\{Y^n \in \mathcal{B}_n(\boldsymbol{x})\} \tag{55}$$

$$= \sum_{\boldsymbol{x}} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) \Pr\{Y^n \in \mathcal{B}_n(\boldsymbol{x})\} \tag{56}$$

$$= \sum_{\boldsymbol{x}} \sum_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{B}_n} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) P_{Y^n}(\boldsymbol{y}) \tag{57}$$

と書ける．ここで $\boldsymbol{y} \in \mathcal{B}_n$ ならば

$$\frac{1}{n} \log \frac{W^n(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})}{P_{Y^n}(\boldsymbol{y})} \geq R + \gamma \tag{58}$$

すなわち

$$P_{Y^n}(\boldsymbol{y}) \leq W^n(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) e^{-n(R+\gamma)} \tag{59}$$

となる．よって式 (57) は

$$\sum_{\boldsymbol{x}} \sum_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{B}_n} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) P_{Y^n}(\boldsymbol{y}) \leq \sum_{\boldsymbol{x}} \sum_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{B}_n} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) W^n(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) e^{-n(R+\gamma)} \tag{60}$$

$$= \sum_{\boldsymbol{x}} \sum_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{B}_n} P_{X^nY^n}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) e^{-n(R+\gamma)} \tag{61}$$

$$\leq e^{-n(R+\gamma)} \tag{62}$$

と書くことができ，式 (41) の二項目は

$$\sum_{m'\neq m}\Pr\left\{Y^n(\bar{\varphi}_n(m))\in\mathcal{B}_n(\bar{\varphi}_n(m'))|\bar{\varphi}_n\in\mathcal{T}_n\right\}\leq\sum_{m'\neq m}\frac{1}{\Pr\{\bar{\varphi}_n\in\mathcal{T}_n\}}e^{-n(R+\gamma)} \tag{63}$$

$$=\frac{1}{\Pr\{\bar{\varphi}_n\in\mathcal{T}_n\}}(M_n-1)e^{-n(R+\gamma)} \tag{64}$$

$$\leq\frac{1}{\Pr\{\bar{\varphi}_n\in\mathcal{T}_n\}}M_ne^{-n(R+\gamma)} \tag{65}$$

$$=\frac{1}{\Pr\{\bar{\varphi}_n\in\mathcal{T}_n\}}e^{nR}e^{-n(R+\gamma)} \tag{66}$$

$$=\frac{1}{\Pr\{\bar{\varphi}_n\in\mathcal{T}_n\}}e^{-n\gamma} \tag{67}$$

となる．以上の評価より，$\bar{\varepsilon}_n(m|\mathcal{T}_n)$ は

$$\bar{\varepsilon}_n(m|\mathcal{T}_n)\leq\frac{Pr\{Y^n(X^n)\notin\mathcal{B}_n(X^n)\}+e^{-n\gamma}}{\Pr\{\bar{\varphi}_n\in\mathcal{T}_n\}} \tag{68}$$

を満たす．ここで典型的な符号に関して，すべてのメッセージに関して平均した誤り確率を $\bar{\varepsilon}_n(\mathcal{T}_n)$ とすると，

$$\bar{\varepsilon}_n(\mathcal{T}_n)=\frac{1}{M_n}\sum_{m=1}^{M_n}\bar{\varepsilon}_n(m|\mathcal{T}_n) \tag{69}$$

$$\leq\frac{\Pr\{Y^n(X^n)\notin\mathcal{B}_n(X^n)\}+e^{-n\gamma}}{\Pr\{\bar{\varphi}_n\in\mathcal{T}_n\}} \tag{70}$$

と書ける．一方，ランダムでないある符号 $\varphi_n\in\mathcal{T}_n$ が存在し，その符号の誤り確率 $\varepsilon_n(\varphi_n)$ は

$$\varepsilon_n(\varphi_n)\leq\bar{\varepsilon}_n(\mathcal{T}_n) \tag{71}$$

を満たす．式 (71) の上極限をとると，$\underline{I}_\varepsilon(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y})$ の定義と，式 (37), $e^{-n\gamma}\to 0\quad(n\to\infty)$ より

$$\limsup_{n\to\infty}\varepsilon_n(\varphi_n)\leq\limsup_{n\to\infty}\frac{\Pr\{Y^n\notin\mathcal{B}_n(X^n)\}+e^{-n\gamma}}{\Pr\{\bar{\varphi}_n\in\mathcal{T}_n\}} \tag{72}$$

$$\leq\varepsilon \tag{73}$$

となる．またこの符号 (φ_n,ψ_n) は $\varphi_n\in\mathcal{T}_n$ なので，式 (33) より，コストは

$$\Pr\left\{\frac{1}{n}c_n(\varphi_n(U_{M_n}))>\Gamma+\gamma_n\right\}=\frac{1}{M_n}\sum_{m=1}^{M_n}\mathbb{1}\left\{\frac{1}{n}c_n(\varphi_n(m)>\Gamma+\gamma_n\right\} \tag{74}$$

$$\leq\gamma_n\to 0\quad(n\to\infty) \tag{75}$$

となる．つまり

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}c_n(\varphi_n(U_{M_n}))-\gamma_n\right)\le\Gamma \tag{76}$$

となるが，$\gamma_n\to 0 \quad (n\to\infty)$ なので

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}c_n(\varphi_n(U_{M_n}))\le\Gamma \tag{77}$$

となり，

$$\overline{c}(\{\varphi_n(U_{M_n})\}_{n=1}^{\infty})\le\Gamma \tag{78}$$

を満たす．

式 (15) より，符号化レートは，

$$\frac{1}{n}\log M_n\ge R \tag{79}$$

を満たす．したがって式 (73), (78), (79) より符号化レート R は達成可能である．式 (11) より

$$C(\varepsilon,\Gamma)\ge\sup_{\boldsymbol{X}:\overline{c}(\boldsymbol{X})\le\Gamma}\underline{I}_{\varepsilon}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) \tag{80}$$

となり，順定理が示せた．□

3.2 復号誤りとコスト超過を許容したコスト制約付き通信路符号化問題の順定理

この節では，復号誤りとコスト超過を許容した場合の順定理をランダム符号化を用いて証明する．

定義 6 $\boldsymbol{X}$ と任意の $0\le\beta<1$ に対して

$$\overline{c}_{\beta}(\boldsymbol{X})\triangleq\inf\left\{\alpha\,\middle|\,\limsup_{n\to\infty}\Pr\left\{\frac{1}{n}c_n(X^n)>\Gamma\right\}\le\beta\right\} \tag{81}$$

とおく．

定義 7 任意の $\Gamma\ge 0$, $0\le\varepsilon<1$, $0\le\beta<1$ に対し，レート R が $(\varepsilon,\beta,\Gamma)$-達成可能とは

$$\limsup_{n\to\infty}\varepsilon_n(\varphi_n)\le\varepsilon \tag{82}$$

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log M_n\ge R \tag{83}$$

$$\overline{c}_{\beta}(\{\varphi_n(U_{M_n})\}_{n=1}^{\infty})\le\Gamma \tag{84}$$

がすべて成り立つような符号の列 $\{(\varphi_n,\psi_n)\}_{n=1}^\infty$ が存在する事である．M_n は符号語数とし，U_{M_n} は M_n 以下の自然数上に一様に分布する確率変数とする．

定義 8　ε,β,Γ に対して

$$C(\varepsilon,\beta,\Gamma)\triangleq\sup\{R|R\ \text{は}\ (\varepsilon,\beta,\Gamma)\text{-達成可能}\ \} \tag{85}$$

と定義し，これを $(\varepsilon,\beta,\Gamma)$-通信路容量と呼ぶ．

このとき，次の定理が成り立つ事が知られている．

定理 2[2]　一般通信路における $(\varepsilon,\beta,\Gamma)$-通信路容量は

$$C(\varepsilon,\beta,\Gamma)=\sup_{\boldsymbol{X}:\overline{c}_\beta(\boldsymbol{X})\le\Gamma}\underline{I}_\varepsilon(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) \tag{86}$$

と表される．

定理 2 の順定理　順定理は

$$C(\varepsilon,\beta,\Gamma)\ge\sup_{\boldsymbol{X}:\overline{c}_\beta(\boldsymbol{X})\le\Gamma}\underline{I}_\varepsilon(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) \tag{87}$$

を満たす．

〔証明〕

$$R<\sup_{\boldsymbol{X}:\overline{c}_\beta(\boldsymbol{X})\le\Gamma}\underline{I}_\varepsilon(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) \tag{88}$$

なる任意の R を考える．ある $\gamma>0$ を用いて

$$R\le\sup_{\boldsymbol{X}:\overline{c}_\beta(\boldsymbol{X})\le\Gamma}\underline{I}_\varepsilon(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}))-3\gamma \tag{89}$$

となる．すると

$$\overline{c}_\beta(\boldsymbol{X})\le\Gamma \tag{90}$$

となるようなある入力 $\boldsymbol{X}=\{X^n\}_{n=1}^\infty$ が存在して，

$$R<\underline{I}_\varepsilon(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}))-2\gamma \tag{91}$$

が成り立つ．以後，入力が X^n である時のみ $Y^n(X^n)=Y^n$ と表記する．また，$\overline{c}_\beta(\boldsymbol{X})$ の定義より，任意の整数 $k>0$ に対して

$$\limsup_{n\to\infty}\Pr\left\{\frac{1}{n}c_n(X^n)>\Gamma+\frac{1}{k}\right\}\le\beta \tag{92}$$

となり，十分大きな全ての n で

$$\Pr\left\{\frac{1}{n}c_n(X^n)>\Gamma+\frac{1}{k}\right\}<\beta+\frac{1}{k} \tag{93}$$

が成り立つ．この時，各 n に対して上式を満たす最大の k が決まる．その k を用いて $\gamma_n \triangleq \dfrac{1}{k}$ とすると，$n \to \infty$ で $\gamma_n \to 0$ かつ

$$\Pr\left\{\frac{1}{n}c_n(X^n) > \Gamma + \gamma_n\right\} < \beta + \gamma_n \tag{94}$$

となる．

ここで

$$\mathcal{S}_n \triangleq \left\{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n \,\middle|\, \frac{1}{n}c_n(\boldsymbol{x}) \leq \Gamma + \gamma_n\right\} \tag{95}$$

と定義し，

$$M_n \triangleq\ e^{nR} \tag{96}$$

$$\mathcal{B}_n(\boldsymbol{x}) \triangleq \left\{\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^n \,\middle|\, \frac{1}{n}\log\frac{W^n(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})}{P_{Y^n}(\boldsymbol{y})}\ \ \geq \frac{1}{n}\log M_n + \gamma\right\} \tag{97}$$

とおく．

次にランダム符号化を用いて二段階で符号を構成する．

[一段目]

確率変数 X^n を用いて

$$P_{\widehat{X}^n}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \Pr\{X^n = \boldsymbol{x} | X^n \in \mathcal{S}_n\} & (\boldsymbol{x} \in \mathcal{S}_n) \\ 0 & (\boldsymbol{x} \notin \mathcal{S}_n) \end{cases} \tag{98}$$

とし，符号語 $\bar{\varphi}_n(1), \bar{\varphi}_n(2), \cdots, \bar{\varphi}_n(M_n^1) \in \mathcal{S}^n$ を分布 $P_{\widehat{X}^n}(\boldsymbol{x})$ に従って，互いに独立に $M_n^1 = \lceil M_n \Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\}\rceil$ 個発生させる．

[二段目] 確率変数 X^n を用いて

$$P_{\widetilde{X}^n}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0 & (\boldsymbol{x} \in \mathcal{S}_n) \\ \Pr\{X^n = \boldsymbol{x} | X^n \notin \mathcal{S}_n\} & (\boldsymbol{x} \notin \mathcal{S}_n) \end{cases} \tag{99}$$

とし，この分布に従って符号語 $\bar{\varphi}_n(M_n^1 + 1), \bar{\varphi}_n(M_n^1 + 2), \cdots, \bar{\varphi}_n(M_n) \notin \mathcal{S}^n$ を互いに独立に $M_n^2 = M_n - M_n^1$ 個発生させる．尚，$\bar{\varphi}_n$ は確率変数である．復号器については次のように定める．復号器が $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^n$ を受け取ったとする．このとき $\boldsymbol{y} \in \mathcal{B}(\bar{\varphi}_n(m))$ なる m がただ一つ存在するとき，復号器はその番号 m を出力する．そのような番号 m が一つも無いときや複数個存在するときは，誤りが起こったものとする．このように二段階でランダムに定義された符号器と復号器の組 $(\bar{\varphi}_n, \bar{\psi}_n)$ に対して，以下で性能を評価する．

復号誤り確率は，m の範囲で 2 段階に分けて評価する．事象 $E(m, m')$ を

$$E(m, m') = \{Y^n(\bar{\varphi}_n(m)) \in \mathcal{B}_n(\bar{\varphi}_n(m'))\} \tag{100}$$

とする．

メッセージ m を送信したときの復号誤り確率を $\bar{\varepsilon}_n(m)$ とすると，

$$\bar{\varepsilon}_n(m) = \Pr\left\{E^{\complement}(m,m) \cup \bigcup_{m'\neq m} E(m,m')\right\} \tag{101}$$

$$\leq \Pr\left\{E^{\complement}(m,m)\right\} + \Pr\left\{\bigcup_{m'\neq m} E(m,m')\right\} \tag{102}$$

$$\leq \Pr\left\{Y^n(\bar{\varphi}_n(m)) \notin \mathcal{B}_n(\bar{\varphi}_n(m))\right\} + \sum_{m'\neq m} \Pr\left\{Y^n(\bar{\varphi}_n(m)) \in \mathcal{B}_n(\bar{\varphi}_n(m'))\right\} \tag{103}$$

と表せる．復号誤り確率 $\bar{\varepsilon}_n(m)$ の評価は，m の範囲で 2 つに分けられる．

最初に $1 \leq m \leq M_n^1$ の時について考える．まず，式 (103) の右辺の各項について評価する．第一項は，

$$\Pr\{Y^n(\bar{\varphi}_n(m)) \notin \mathcal{B}_n(\bar{\varphi}_n(m))\} = \Pr\{Y^n(\widehat{X}^n) \notin \mathcal{B}_n(\widehat{X}^n)\} \tag{104}$$

$$= \Pr\{Y^n(X^n) \notin \mathcal{B}_n(X^n) | X^n \in \mathcal{S}_n\} \tag{105}$$

となる．第二項は，

$$\sum_{m'\neq m} \Pr\left\{Y^n(\bar{\varphi}_n(m)) \in \mathcal{B}_n(\bar{\varphi}_n(m'))\right\} \tag{106}$$

$$= \sum_{m'\neq m} \sum_{\boldsymbol{x}} \Pr\{\bar{\varphi}_n(m') = \boldsymbol{x}\} \Pr\left\{Y^n(\bar{\varphi}_n(m)) \in \mathcal{B}_n(\boldsymbol{x})\right\} \tag{107}$$

と書ける．ここで m の範囲に注意すれば，式 (107) に関して

$$\Pr\left\{Y^n(\bar{\varphi}_n(m)) \in \mathcal{B}_n(\boldsymbol{x})\right\} = \sum_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{B}_n(\boldsymbol{x})} \Pr\{Y^n(\bar{\varphi}_n(m)) = \boldsymbol{y}\} \tag{108}$$

$$= \sum_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{B}_n(\boldsymbol{x})} \Pr\{Y^n(\widehat{X}^n) = \boldsymbol{y}\} \tag{109}$$

が成り立つ．さらに式 (109) に関して

$$\Pr\{Y^n(\widehat{X}^n)=\boldsymbol{y}\}=\sum_{\widehat{\boldsymbol{x}}}\Pr\{Y^n(\widehat{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{y},\widehat{X}^n=\widehat{\boldsymbol{x}}\} \tag{110}$$

$$=\sum_{\widehat{\boldsymbol{x}}}P_{\widehat{X}^n}(\widehat{\boldsymbol{x}})W^n(\boldsymbol{y}|\widehat{\boldsymbol{x}}) \tag{111}$$

$$\le\sum_{\widehat{\boldsymbol{x}}}\Pr\{X^n=\widehat{\boldsymbol{x}}|X^n\in\mathcal{S}_n\}W^n(\boldsymbol{y}|\widehat{\boldsymbol{x}}) \tag{112}$$

$$\le\frac{1}{\Pr\{X^n\in\mathcal{S}_n\}}\sum_{\widehat{\boldsymbol{x}}}P_{X^n}(\widehat{\boldsymbol{x}})W^n(\boldsymbol{y}|\widehat{\boldsymbol{x}}) \tag{113}$$

$$\le\frac{1}{\Pr\{X^n\in\mathcal{S}_n\}}P_{Y^n(X^n)}(\boldsymbol{y}) \tag{114}$$

が成り立つ．式 (112) は，$\widehat{X}^n$ を $X^n\in\mathcal{S}_n$ で書き換えている．さらに，$\boldsymbol{y}\in\mathcal{B}_n(\boldsymbol{x})$ ならば

$$\frac{1}{n}\log\frac{W^n(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})}{P_{Y^n(X^n)}(\boldsymbol{y})}\ge R+\gamma \tag{115}$$

すなわち

$$P_{Y^n(X^n)}(\boldsymbol{y})\le W^n(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})e^{-n(R+\gamma)} \tag{116}$$

となることに注意すれば，式 (114) と合わせて，式 (109) は

$$\sum_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{B}_n(\boldsymbol{x})}\Pr\{Y^n(\widehat{X}^n)=\boldsymbol{y}\}\le\frac{1}{\Pr\{X^n\in\mathcal{S}_n\}}\sum_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{B}_n(\boldsymbol{x})}P_{Y^n(X^n)}(\boldsymbol{y}) \tag{117}$$

$$\le\frac{1}{\Pr\{X^n\in\mathcal{S}_n\}}\sum_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{B}_n(\boldsymbol{x})}W^n(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})e^{-n(R+\gamma)} \tag{118}$$

$$\le\frac{1}{\Pr\{X^n\in\mathcal{S}_n\}}e^{-n(R+\gamma)} \tag{119}$$

と表せる．よって式 (107) は

$$\sum_{m'\neq m}\sum_{\boldsymbol{x}}\Pr\{\bar{\varphi}_n(m')=\boldsymbol{x}\}\Pr\left\{Y^n(\bar{\varphi}_n(m))\in\mathcal{B}_n(\boldsymbol{x})\right\} \tag{120}$$

$$\le\sum_{m'\neq m}\frac{1}{\Pr\{X^n\in\mathcal{S}_n\}}e^{-n(R+\gamma)} \tag{121}$$

$$\le\frac{M_n}{\Pr\{X^n\in\mathcal{S}_n\}}e^{-n(R+\gamma)} \tag{122}$$

$$=\frac{1}{\Pr\{X^n\in\mathcal{S}_n\}}e^{-n\gamma} \tag{123}$$

となる．以上より，$\bar{\varepsilon}_n(m)$ は

$$\bar{\varepsilon}_n(m)\le\Pr\{Y^n(X^n)\notin\mathcal{B}_n(X^n)|X^n\in\mathcal{S}_n\}+\frac{1}{\Pr\{X^n\in\mathcal{S}_n\}}e^{-n\gamma} \tag{124}$$

と書ける．このときの右辺を

$$\bar{\varepsilon}_n^1 \triangleq \Pr\{Y^n(X^n) \notin \mathcal{B}_n(X^n) | X^n \in \mathcal{S}_n\} + \frac{1}{\Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\}} e^{-n\gamma} \tag{125}$$

とおく．

m の範囲が $M_n^1 + 1 \le m \le M_n$ の場合も，$1 \le m \le M_n^1$ の時と同様に $\bar{\varepsilon}_n(m)$ を評価すると

$$\bar{\varepsilon}_n(m) \le \bar{\varepsilon}_n^2 \triangleq \Pr\{Y^n(X^n) \notin \mathcal{B}_n(X^n) | X^n \notin \mathcal{S}_n\} + \frac{1}{\Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n\}} e^{-n\gamma}$$

を得る．

以上を用いて，全てのメッセージに関して平均した誤り確率 $\bar{\varepsilon}_n$ を求める．m の範囲に注意して計算すると

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}_n &= \frac{1}{M_n} \sum_{m=1}^{M_n} \bar{\varepsilon}_n(m) && (126)\\
&= \frac{1}{M_n} \left(\sum_{m=1}^{M_n^1} \bar{\varepsilon}_n(m) + \sum_{m=M_n^1+1}^{M_n} \bar{\varepsilon}_n(m) \right) && (127)\\
&\le \frac{1}{M_n} \left(\sum_{m=1}^{M_n^1} \bar{\varepsilon}_n^1 + \sum_{m=M_n^1+1}^{M_n} \bar{\varepsilon}_n^2 \right) && (128)\\
&= \frac{1}{M_n} \left\{ \lceil M_n \Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\} \rceil \bar{\varepsilon}_n^1 + (M_n - \lceil M_n \Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\} \rceil) \bar{\varepsilon}_n^2 \right\} && (129)\\
&\le \frac{1}{M_n} \left\{ (M_n \Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\} + 1) \bar{\varepsilon}_n^1 + M_n \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n\} \bar{\varepsilon}_n^2 \right\} && (130)\\
&= \Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\} \bar{\varepsilon}_n^1 + \frac{\bar{\varepsilon}_n^1}{M_n} + \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n\} \bar{\varepsilon}_n^2 && (131)
\end{aligned}$$

となる．式 (131) の右辺第一項は，

$$\begin{aligned}
&\Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\} \bar{\varepsilon}_n^1 && (132)\\
\le& \Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\} \left\{ \Pr\{Y^n(X^n) \notin \mathcal{B}_n(X^n) | X^n \in \mathcal{S}_n\} + \frac{1}{\Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\}} e^{-n\gamma} \right\} && (133)\\
\le& \Pr\{Y^n(X^n) \notin \mathcal{B}_n(X^n), X^n \in \mathcal{S}_n\} + e^{-n\gamma} && (134)
\end{aligned}$$

となる．

式 (131) の右辺第二項は，

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{\varepsilon}_n^1}{M_n} &\le \frac{1}{M_n} \left\{ \Pr\{Y^n(X^n) \notin \mathcal{B}_n(X^n) | X^n \in \mathcal{S}_n\} + \frac{1}{\Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\}} e^{-n\gamma} \right\} && (135)\\
&= \Pr\{Y^n(X^n) \notin \mathcal{B}_n(X^n) | X^n \in \mathcal{S}_n\} e^{-nR} + \frac{1}{\Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\}} e^{-n(R+\gamma)} && (136)
\end{aligned}$$

となり，式 (131) の右辺第三項は

$$
\begin{aligned}
&\Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n\}\bar{\varepsilon}_n^2 && (137)\\
\leq &\Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n\}\left\{\Pr\{Y^n(X^n) \notin \mathcal{B}_n(X^n) | X^n \notin \mathcal{S}_n\} + \frac{1}{\Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n\}}e^{-n\gamma}\right\} && (138)\\
= &\Pr\{Y^n(X^n) \notin \mathcal{B}_n(X^n), X^n \notin \mathcal{S}_n\} + e^{-n\gamma} && (139)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．式 (134), (136), (139) より，$\bar{\varepsilon}_n$ は

$$
\bar{\varepsilon}_n \leq \Pr\{Y^n(X^n) \notin \mathcal{B}_n(X^n)\} + \frac{1}{\Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\}}e^{-n(R+\gamma)} + 2e^{-n\gamma} + e^{-nR} \tag{140}
$$

と書ける．$\liminf_{n\to\infty} \Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\} \neq 0$ と仮定し，式 (140) の両辺の上極限をとると，$\mathcal{B}_n$ の定義より

$$
\limsup_{n\to\infty} \bar{\varepsilon}_n \leq \varepsilon \tag{141}
$$

となる．一方，$\bar{\varepsilon}_n$ は全ての符号についての平均値であったので，少なくとも 1 つのある符号 (φ_n, ψ_n) が存在してその符号の復号誤り確率 $\varepsilon_n(\varphi_n)$ は，式 (141) より

$$
\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \varepsilon_n(\varphi_n) &\leq \limsup_{n\to\infty} \bar{\varepsilon}_n && (142)\\
&\leq \varepsilon && (143)
\end{aligned}
$$

を満たす．

また，この符号のコストについて評価すると，任意の $\lambda > 0$ に対し

$$
\begin{aligned}
\Pr\left\{\frac{1}{n}c_n(\varphi_n(U_{M_n})) > \Gamma + \lambda\right\} \leq &\Pr\left\{\frac{1}{n}c_n(\varphi_n(U_{M_n})) > \Gamma + \gamma_n\right\} && (144)\\
= &\frac{1}{M_n}\sum_{m=1}^{M_n} \mathbb{1}\left\{\frac{1}{n}c_n(\varphi_n(U_{M_n})) > \Gamma + \gamma_n\right\} && (145)\\
= &\frac{1}{M_n}\sum_{m=1}^{M_n} \mathbb{1}\left\{\varphi_n(m) \notin \mathcal{S}_n\right\} && (146)\\
= &\frac{1}{M_n}(M_n - \lceil M_n \Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n\}\rceil) && (147)\\
\leq &\Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n\} && (148)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．さらに，十分大きな全ての n で式 (94) が成り立ち，$\gamma_n \to 0$ なので

$$
\limsup_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}c_n(\varphi_n(U_{M_n})) > \Gamma + \lambda\right\} \leq \beta \tag{149}
$$

となり

$$
\overline{c}_\beta(\{\varphi_n(U_{M_n})\}_{n=1}^{\infty}) \leq \Gamma + \lambda \tag{150}
$$

が成り立つが，λ は任意だったので

$$\overline{c}_\beta(\{\varphi_n(U_{M_n})\}_{n=1}^\infty) \le \Gamma \tag{151}$$

となる．式 (96) より，符号化レートは，

$$\frac{1}{n}\log M_n \ge R \tag{152}$$

が成り立つ．

式 (143), (151), (152) より，符号化レート R は $(\varepsilon,\delta,\Gamma)$-達成可能である．すなわち

$$C(\varepsilon,\beta,\Gamma) \ge \sup_{\boldsymbol{X}:\overline{c}_\beta(\boldsymbol{X})\le\Gamma} \underline{I}_\varepsilon(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) \tag{153}$$

となり，順定理が示せた．□

4 着払いコスト制約付き通信路符号化定理

本章では着払いコスト制約付き通信路符号化問題の順定理をランダム符号化を用いて示す．4.1 節では復号誤りを許容し，4.2 節では復号誤りとコスト超過を許容した問題の順定理を示す．なお，本章では通信路の出力 $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^n$ に対してコストを定義する．そのため，実数 $c_n(\boldsymbol{y})$ を $\boldsymbol{y}$ のコストと呼ぶ．

4.1 復号誤りを許容した着払いコスト制約付き通信路符号化問題の順定理

証明に際し，以下を準備する．

定義 9 任意の実数 $\theta > 0$ に対して

$$\mathcal{Y}^n_{>\theta} \triangleq \left\{\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^n \,\middle|\, \frac{1}{n}c_n(\boldsymbol{y}) > \theta\right\} \tag{154}$$

とおく．

定義 10 通信路の出力 $\boldsymbol{Y}$ に対して

$$\overline{c}(\boldsymbol{Y}) \triangleq \text{p-}\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}c_n(Y^n) \tag{155}$$

とおく．

定義 11 任意の実数 $\Gamma \ge 0$, $0 \le \varepsilon < 1$ に対し，レート R が (ε,Γ)-達成可能とは

$$\limsup_{n\to\infty} \varepsilon_n(\varphi_n) \le \varepsilon \tag{156}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log M_n \ge R \tag{157}$$

$$\overline{c}(\{Y^n(\varphi_n(U_{M_n}))\}_{n=1}^\infty) \le \Gamma \tag{158}$$

がすべて成り立つような符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する事である．M_n は符号語数とし，U_{M_n} は M_n 以下の自然数上に一様に分布する確率変数とする．

定義 12　ε, Γ に対して

$$C(\varepsilon, \Gamma) \triangleq \sup\{R | R \text{ は } (\varepsilon, \Gamma)\text{-達成可能 }\} \tag{159}$$

と定義し，これを (ε, Γ)-通信路容量と呼ぶ.

このとき，次の定理が成り立つ事が知られている．

定理 3[3]　一般通信路における (ε, Γ)-通信路容量は

$$C(\varepsilon, \Gamma) = \sup_{\boldsymbol{X}:\overline{c}(\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}))\leq\Gamma} \underline{I}_{\varepsilon}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) \tag{160}$$

と表される．

定理 3 の順定理　順定理は

$$C(\varepsilon, \Gamma) \geq \sup_{\boldsymbol{X}:\overline{c}(\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}))\leq\Gamma} \underline{I}_{\varepsilon}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) \tag{161}$$

を満たす.

〔証明〕

$$R < \sup_{\boldsymbol{X}:\overline{c}(\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}))\leq\Gamma} \underline{I}_{\varepsilon}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) \tag{162}$$

なる任意の R を考える．任意の $\gamma > 0$ を用いて

$$R \leq \sup_{\boldsymbol{X}:\overline{c}(\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}))\leq\Gamma} \underline{I}_{\varepsilon}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) - 3\gamma \tag{163}$$

となる．すると

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} c_n(Y^n(X^n)) \leq \Gamma \tag{164}$$

なる入力 $\boldsymbol{X}$ が存在して

$$R < \underline{I}_{\varepsilon}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) - 2\gamma \tag{165}$$

が成り立つ．以後，入力が X^n である時のみ $Y^n(X^n) = Y^n$ と表記する．

ここでランダム符号化を用いて符号を構成する．符号語 $\bar{\varphi}_n(1), \bar{\varphi}_n(2), \cdots, \bar{\varphi}_n(M_n) \in \mathcal{X}^n$ を分布 $P_{X^n}(\boldsymbol{x})$ に従って，互いに独立に発生させる．ここで，これらの符号語は確率変数である為，$\bar{\varphi}_n$ として区別する．復号器については次のように定める．復号器が $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^n$ を受け取ったとする．このとき $\boldsymbol{y} \in \mathcal{B}(\bar{\varphi}_n(m))$ なる m がただ一つ存在するとき，復号器はその番号 m を出力する．そのような番号 m が一つも無いときや複数個存在するときは，誤りが起こったものとする．

ここで任意の $\delta > 0$ に対して

$$Z_n(\delta) = \frac{1}{M_n} \sum_{m=1}^{M_n} W^n(\mathcal{Y}^n_{>\Gamma+\delta} | \bar{\varphi}_n(m)) \tag{166}$$

とする．$Z_n(\delta)$ の期待値を計算すると

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_n(\delta)] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{M_n} \sum_{m=1}^{M_n} W^n(\mathcal{Y}^n_{>\Gamma+\delta} | \bar{\varphi}_n(m)) \right] && (167)\\
&= \frac{1}{M_n} \sum_{m=1}^{M_n} \mathbb{E}[W^n(\mathcal{Y}^n_{>\Gamma+\delta} | \bar{\varphi}_n(m))] && (168)\\
&= \frac{1}{M_n} \sum_{m=1}^{M_n} \mathbb{E}[W^n(\mathcal{Y}^n_{>\Gamma+\delta} | X^n)] && (169)\\
&= \sum_{\boldsymbol{x}} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) W^n(\mathcal{Y}^n_{>\Gamma+\delta} | \boldsymbol{x}) && (170)\\
&= \sum_{\boldsymbol{x}} P_{X^n}(\boldsymbol{x}) \Pr\left\{ \frac{1}{n} c_n(Y^n(\boldsymbol{x})) > \Gamma + \delta \,\middle|\, X^n = \boldsymbol{x} \right\} && (171)\\
&= \Pr\left\{ \frac{1}{n} c_n(Y^n(X^n)) > \Gamma + \delta \right\} && (172)
\end{aligned}$$

となる．式 (164) より

$$\Pr\left\{ \frac{1}{n} c_n(Y^n(X^n)) > \Gamma + \delta \right\} \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{173}$$

となる．よって

$$\mathbb{E}[Z_n(\delta)] \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{174}$$

が成り立つ．ここでマルコフの不等式より，任意の $\lambda > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_n(\delta)] &= \sum_{\boldsymbol{z}_n} P_{Z_n(\delta)}(\boldsymbol{z}_n) && (175)\\
&\geq \sum_{\boldsymbol{z}_n \geq \lambda} P_{Z_n(\delta)}(\boldsymbol{z}_n) && (176)\\
&\geq \lambda \Pr\{Z_n(\delta) > \lambda\} && (177)
\end{aligned}$$

となり，結局

$$\Pr\{Z_n(\delta) > \lambda\} \leq \frac{\mathbb{E}[Z_n(\delta)]}{\lambda} \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{178}$$

となる．式 (178) より

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty} Z_n(\delta) = 0 \tag{179}$$

が成り立つ．ここで，任意の整数 $k>0$ に対して

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty} Z_n\left(\frac{1}{k}\right)=0 \tag{180}$$

となり，したがって

$$\lim_{n\to\infty}\Pr\left\{Z_n\left(\frac{1}{k}\right)>\frac{1}{k}\right\}=0 \tag{181}$$

となる．さらに，十分大きな全ての n で

$$\Pr\left\{Z_n\left(\frac{1}{k}\right)>\frac{1}{k}\right\}<\frac{1}{k} \tag{182}$$

が成り立つ．このとき，各 n に対して上式を満たす最大の k が決まる．その k を用いて $\gamma_n \triangleq \dfrac{1}{k}$ とすると，$n\to\infty$ で $\gamma_n\to 0$ かつ

$$\Pr\left\{Z_n\left(\gamma_n\right)>\gamma_n\right\}<\gamma_n \tag{183}$$

となる．ここで，

$$\mathcal{T}_n \triangleq \left\{\varphi_n \,\middle|\, \frac{1}{M_n}\sum_{m=1}^{M_n} W^n(\mathcal{Y}^n_{>\Gamma+\gamma_n}|\varphi_n(m)) \le \gamma_n\right\} \tag{184}$$

と定義し，$\varphi_n\in\mathcal{T}_n$ となる符号を典型的な符号と呼ぶ．ここで $\mathcal{T}_n$ の定義より

$$\begin{aligned}
\Pr\{\bar{\varphi}_n\notin\mathcal{T}_n\} &= \Pr\left\{\frac{1}{M_n}\sum_{m=1}^{M_n} W^n(\mathcal{Y}^n_{>\Gamma+\gamma_n}|\bar{\varphi}_n(m)) > \gamma_n\right\} && (185)\\
&= \Pr\{Z_n(\gamma_n)>\gamma_n\} && (186)\\
&< \gamma_n \to 0 \quad (n\to\infty) && (187)
\end{aligned}$$

となる．つまり

$$\Pr\{\bar{\varphi}_n\in\mathcal{T}_n\}\to 1 \quad (n\to\infty) \tag{188}$$

が成り立つ．

以降 3 章 3.1 と同様の手順で示すことが出来る．

4.2 復号誤りとコスト超過を許容した着払いコスト制約付き通信路符号化問題の順定理

定義 13 $\boldsymbol{X}$ と任意の $\delta\ge 0, 0\le\alpha<1$ に対して

$$\bar{c}_\delta(\boldsymbol{X}) \triangleq \inf\left\{\alpha \,\middle|\, \text{p-}\limsup_{n\to\infty} W^n(\mathcal{Y}^n_{>\alpha}|X^n)\le\delta\right\} \tag{189}$$

と定義する．

定義 14　任意の実数 $\Gamma \geq 0,\ \delta \geq 0,\ 0 \leq \varepsilon < 1$ に対し，レート R が $(\varepsilon, \delta, \Gamma)$-達成可能とは

$$\limsup_{n\to\infty} \varepsilon_n(\varphi_n) \leq \varepsilon \tag{190}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq R \tag{191}$$

$$\overline{c}_\delta(\{Y^n(\varphi_n(U_{M_n}))\}_{n=1}^\infty) \leq \Gamma \tag{192}$$

がすべて成り立つような符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^\infty$ が存在する事である．

定義 15　$\varepsilon, \delta, \Gamma$ に対して

$$C(\varepsilon, \delta, \Gamma) \triangleq \sup\{R | R \text{ は } (\varepsilon, \delta, \Gamma)\text{-達成可能 }\} \tag{193}$$

と定義し，これを $(\varepsilon, \delta, \Gamma)$-通信路容量と呼ぶ．このとき，次の定理が成り立つ事が知られている．

定理 4[2]　一般通信路における $(\varepsilon, \delta, \Gamma)$-通信路容量は

$$C(\varepsilon, \delta, \Gamma) = \sup_{\boldsymbol{X}:\overline{c}_\delta(\boldsymbol{X}) \leq \Gamma} \underline{I}_\varepsilon(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) \tag{194}$$

と表される．

定理 4 の順定理　$(\varepsilon, \delta, \Gamma)$-通信路容量は

$$C(\varepsilon, \delta, \Gamma) \geq \sup_{\boldsymbol{X}:\overline{c}_\delta(\boldsymbol{X}) \leq \Gamma} \underline{I}_\varepsilon(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) \tag{195}$$

を満たす．

〔証明〕

$$R < \sup_{\boldsymbol{X}:\overline{c}_\delta(\boldsymbol{X}) \leq \Gamma} \underline{I}_\varepsilon(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) \tag{196}$$

なる任意の R を考える．ある $\gamma > 0$ を用いて

$$R \leq \sup_{\boldsymbol{X}:\overline{c}_\delta(\boldsymbol{X}) \leq \Gamma} \underline{I}_\varepsilon(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) - 3\gamma \tag{197}$$

となる．すると

$$\overline{c}_\delta(\boldsymbol{X}) \leq \Gamma \tag{198}$$

となるようなある入力 $\boldsymbol{X} = \{X^n\}_{n=1}^\infty$ が存在して，

$$R < \underline{I}_\varepsilon(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) - 2\gamma \tag{199}$$

が成り立つ．以後，入力が X^n である時のみ $Y^n(X^n) = Y^n$ と表記する．

また，$\overline{c}_\delta(\boldsymbol{X})$ の定義より，任意の整数 $k > 0$ に対して

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty} W^n(\mathcal{Y}^n_{>\Gamma+\frac{1}{k}}|X^n) \leq \delta \tag{200}$$

となり，

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left\{W^n(\mathcal{Y}^n_{>\Gamma+\frac{1}{k}}|X^n) > \delta + \frac{1}{k}\right\} = 0 \tag{201}$$

が成り立ち，十分大きな全ての n で

$$\Pr\left\{W^n(\mathcal{Y}^n_{>\Gamma+\frac{1}{k}}|X^n) > \delta + \frac{1}{k}\right\} < \frac{1}{k} \tag{202}$$

となる．

この時，各 n に対して上式を満たす最大の k が決まる．その k を用いて $\gamma_n \triangleq \dfrac{1}{k}$ とすると，$n \to \infty$ で $\gamma_n \to 0$ かつ

$$\Pr\left\{W^n(\mathcal{Y}^n_{>\Gamma+\gamma_n}|X^n) > \delta + \gamma_n\right\} < \gamma_n \tag{203}$$

となる．

ここで

$$\mathcal{S}_n \triangleq \left\{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n \,\middle|\, W^n(\mathcal{Y}^n_{>\Gamma+\gamma_n}|\boldsymbol{x}) \leq \delta + \gamma_n\right\} \tag{204}$$

と定義する．以降 3 章 3.2 の証明と同様に示すことが出来る．

5　エナジーハーベスト

ここまで，符号のコストをある値以下に抑える事を考えていた．一方，復号に必要な電力を受信した信号から得るエナジーハーベストという通信技術も存在する [4]．この通信においては，受信語の電力をある一定値以上確保する事が求められる．そこで，この章では着払いコスト制約付き通信路符号化問題におけるコストを，受信語から得られる電力として考える．この問題の定式化をするためには，コストを制約する式 (192) を，電力を確保する条件の式に差し替えればよい．

受信語から得られる電力を次のように表す．

定義 16　$\boldsymbol{X}$ と任意の $0 \leq \delta < 1$ に対して

$$\underline{c}_\delta(\boldsymbol{X}) \triangleq \sup\left\{\Gamma \,\middle|\, \text{p-}\limsup_{n\to\infty} W^n(\mathcal{Y}^n_{<\Gamma}|X^n) \leq \delta\right\} \tag{205}$$

と定義する．

これを用いて，エナジーハーベストの達成可能性を次のように表す．

定義 17　任意の $\Gamma \geq 0$, $0 \leq \delta < 1$, $0 \leq \varepsilon < 1$ に対し，レート R が $(\varepsilon, \delta, \Gamma)$-達成可能とは

$$\limsup_{n\to\infty} \varepsilon_n(\varphi_n) \leq \varepsilon \tag{206}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq R \tag{207}$$

$$\underline{c}_\delta(\{Y^n(\varphi_n(U_{M_n}))\}_{n=1}^\infty) \geq \Gamma \tag{208}$$

がすべて成り立つような符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^\infty$ が存在する事である．

定義 18　$\varepsilon, \delta, \Gamma,$ に対して

$$C'(\varepsilon, \delta, \Gamma) \triangleq \sup\{R | R \text{ は } (\varepsilon, \delta, \Gamma)\text{-達成可能 }\} \tag{209}$$

と定義し，これを $(\varepsilon, \delta, \Gamma)$-通信路容量と呼ぶ．通信路容量は順定理と逆定理によって示される．特に順定理は，4 章と同様にランダム符号化を用いる事で証明が可能である．

定理 5　エナジーハーベストにおける $(\varepsilon, \delta, \Gamma)$-通信路容量は

$$C'(\varepsilon, \delta, \Gamma) = \sup_{\boldsymbol{X}:\underline{c}_\delta(\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}))\geq\Gamma} \underline{I}_\varepsilon(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) \tag{210}$$

と表される．

5.1　順定理

順定理は

$$C'(\varepsilon, \delta, \Gamma) \geq \sup_{\boldsymbol{X}:\underline{c}_\delta(\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}))\geq\Gamma} \underline{I}_\varepsilon(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) \tag{211}$$

を満たす．

〔定理 5 の順定理の証明〕

$$R < \sup_{\boldsymbol{X}:\underline{c}_\delta(\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}))\geq\Gamma} \underline{I}_\varepsilon(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) \tag{212}$$

なる任意の R を考える．ある $\gamma > 0$ を用いて

$$R < \sup_{\boldsymbol{X}:\underline{c}_\delta(\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}))\geq\Gamma} \underline{I}_\varepsilon(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) - 3\gamma \tag{213}$$

となる．すると

$$\underline{c}_\delta(\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) \geq \Gamma \tag{214}$$

となるようなある入力 $\boldsymbol{X} = \{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して，

$$R < \underline{I}_{\varepsilon}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) - 2\gamma \tag{215}$$

が成り立つ．以後，入力が X^n である時のみ $Y^n(X^n)$ を Y^n と表記する．ここで $\underline{c}_{\delta}(\boldsymbol{Y})$ の定義より，任意の整数 $k > 0$ に対して

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty} W^n(\mathcal{Y}^n_{<\Gamma-\frac{1}{k}}|X^n) \leq \delta \tag{216}$$

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left\{W^n(\mathcal{Y}^n_{<\Gamma-\frac{1}{k}}|X^n) > \delta + \frac{1}{k}\right\} = 0 \tag{217}$$

十分大きな全ての n で

$$\Pr\left\{W^n(\mathcal{Y}^n_{<\Gamma-\frac{1}{k}}|X^n) > \delta + \frac{1}{k}\right\} < \frac{1}{k} \tag{218}$$

が成り立つ．このとき，各 n に対して上式を満たす最大の k が決まる．その k を用いて $\frac{1}{k} \triangleq \gamma_n$ とすると，$n \to \infty$ で $\gamma_n \to 0$ かつ

$$\Pr\left\{W^n(\mathcal{Y}^n_{<\Gamma-\gamma_n}|X^n) > \delta + \gamma_n\right\} < \gamma_n \tag{219}$$

となる．ここで

$$\mathcal{S}_n \triangleq \left\{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n \middle| W^n(\mathcal{Y}^n_{<\Gamma-\gamma_n}|\boldsymbol{x}) \leq \delta + \gamma_n\right\} \tag{220}$$

と定義する．以降 4 章 4.2 節と同様の手順で証明する事が出来る．

5.2 逆定理

逆定理は

$$C'(\varepsilon,\delta,\Gamma) \leq \sup_{\boldsymbol{X}:\underline{c}_{\delta}(\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}))\geq\Gamma} \underline{I}_{\varepsilon}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) \tag{221}$$

を満たす．逆定理の証明には，次の補題を利用する．

補題 1[5]　メッセージの集合 $\mathcal{M}_n$ のサイズが M_n, 復号誤り確率が ε_n である符号 (φ_n, ψ_n) に対し，$X^n \triangleq \varphi_n(U_{M_n})$ とし，X^n を入力とする通信路 W^n の出力を $Y^n = Y^n(X^n)$ とすると，任意の定数 $\gamma > 0$ に対して

$$\varepsilon_n \geq \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n|X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} \leq \frac{1}{n}\log M_n - \gamma\right\} - e^{-n\gamma} \tag{222}$$

が成り立つ．

〔定理 5 の逆定理の証明〕

符号化レート R が $(\varepsilon, \delta, \Gamma)$-達成可能であると仮定する．すなわち，定義 17 を満たすような符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在したとする．$X^n \triangleq \varphi_n(U_{M_n})$ とし，X^n を入力とする通信路 W^n の出力を $Y^n = Y^n(X^n)$ とすると，補題 1 より

$$\varepsilon_n \geq \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n|X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} \leq \frac{1}{n}\log M_n - \gamma\right\} - e^{-n\gamma} \tag{223}$$

を満たす．また，式 (207) より，十分大きな全ての n で

$$\frac{1}{n}\log M_n \geq R - \gamma \tag{224}$$

が成り立ち

$$\varepsilon_n \geq \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n|X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} \leq R - 2\gamma\right\} - e^{-n\gamma} \tag{225}$$

と表せる．両辺の上極限をとると

$$\limsup_{n\to\infty}\varepsilon_n \geq \limsup_{n\to\infty}\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n|X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} \leq R - 2\gamma\right\} \tag{226}$$

となり，R は達成可能である為，式 (206) より

$$\varepsilon \geq \limsup_{n\to\infty}\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{W^n(Y^n|X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} \leq R - 2\gamma\right\} \tag{227}$$

が成り立つ．さらに $\underline{I}_{\varepsilon}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}))$ の定義より

$$\underline{I}_{\varepsilon}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) \geq R - 2\gamma \tag{228}$$

となり，$\gamma > 0$ は任意なので

$$\underline{I}_{\varepsilon}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) \geq R \tag{229}$$

となる．ここで入力 X^n は $\underline{c}_{\delta}(\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) \geq \Gamma$ を満たすので

$$R \leq \sup_{\boldsymbol{X}:\underline{c}_{\delta}(\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}))\geq\Gamma}\underline{I}_{\varepsilon}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) \tag{230}$$

が成り立ち，R は $(\varepsilon, \delta, \Gamma)$-達成可能なので，結局

$$C'(\varepsilon, \delta, \Gamma) \leq \sup_{\boldsymbol{X}:\underline{c}_{\delta}(\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}))\geq\Gamma}\underline{I}_{\varepsilon}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) \tag{231}$$

となり，逆定理が示せた．□

6 コストの一般化

これまで通信路の入力と出力に分けてコスト関数を定義し，コストがとる値は実数としてきた．先行研究 [3] では，コストを通信路の入力に相関のある確率変数として定義し，コストがとる値を実数に限定するのではなく，任意の集合内の値と定義することでコストの一般化をした．その通信路モデルを図 1 に示す．一般化のために，以下の準備をする．

Θ を任意の集合とし，通信路の入力を $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n$ とする．この時，入力 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n$ に対するコストの分布を条件付き確率 $V_n(\cdot|\boldsymbol{x})$ で表す．ここで制約を満たすコストの領域 $\Gamma \subset \Theta$ に対して次の定義をする．

定義 19　入力 $\boldsymbol{X}$ と領域 $\Gamma \subset \Theta$ に対して

$$\overline{c}_\Gamma(\boldsymbol{X}) \triangleq \text{p-}\liminf_{n\to\infty} V_n(\Gamma|X^n) \tag{232}$$

とおく．

定義 20　任意の実数 $\delta \geq 0$, $0 \leq \varepsilon < 1$, 領域 $\Gamma \subset \Theta$ に対し，レート R が $(\varepsilon, \delta, \Gamma)$-達成可能とは

$$\limsup_{n\to\infty} \varepsilon_n(\varphi_n) \leq \varepsilon \tag{233}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log M_n \geq R \tag{234}$$

$$\overline{c}_\Gamma(\{\varphi_n(U_{M_n})\}_{n=1}^\infty) \geq 1-\delta \tag{235}$$

がすべて成り立つような符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^\infty$ が存在する事である．

定義 21　$\varepsilon, \delta, \Gamma$ に対して

$$C(\varepsilon, \delta, \Gamma) \triangleq \sup\{R | R \text{ は } (\varepsilon, \delta, \Gamma)\text{-達成可能 }\} \tag{236}$$

と定義し，これを $(\varepsilon, \delta, \Gamma)$-通信路容量と呼ぶ.

定理 6[3]　$(\varepsilon, \delta, \Gamma)$-通信路容量は

$$C(\varepsilon, \delta, \Gamma) = \sup_{\boldsymbol{X}:\overline{c}_\Gamma(\boldsymbol{X})\geq 1-\delta} \underline{I}_\varepsilon(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) \tag{237}$$

と表される．

コストを一般化しているため，V_n の定義を具体的に与えることで，4 章で扱った通信路符号化問題に帰着させる事が出来る．$\Theta = \mathbb{R}$ とし，4 章のように通信路の出力のコスト関数を $c_n(\cdot)$ とする．次のように V_n に具体的な定義を与える．

定義 22　入力 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ と任意の実数 Γ に対して

$$V_n((-\infty, \Gamma]|\boldsymbol{x}) \triangleq \Pr\left\{\frac{1}{n}c_n(Y^n(\boldsymbol{x})) \leq \Gamma\right\} \tag{238}$$

とおく．

すると，式 (235) は式 (192) に帰着し，ゆえに定義 20 は定義 14 に帰着する．その時の通信路モデルを図 2 に示す．ここで図 2 における 2 つの一般通信路は同一のものとし，その通信路の出力のコストを測ればよい．

先行研究 [3] では，定理 6 は非ランダム符号化を用いて示されているが，以下ではランダム符号化を用いて順定理を示す．

定理 6 の順定理

順定理は

$$C(\varepsilon,\delta,\Gamma) \geq \sup_{\boldsymbol{X}:\overline{c}_\Gamma(\boldsymbol{X})\geq 1-\delta} \underline{I}_\varepsilon(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) \tag{239}$$

を満たす．

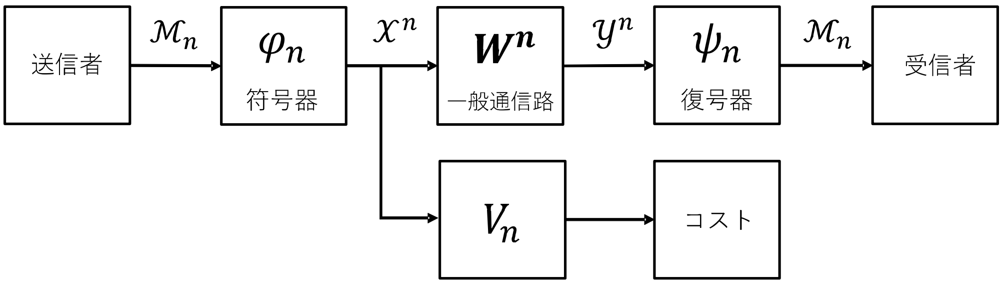

図 1　コストの一般化

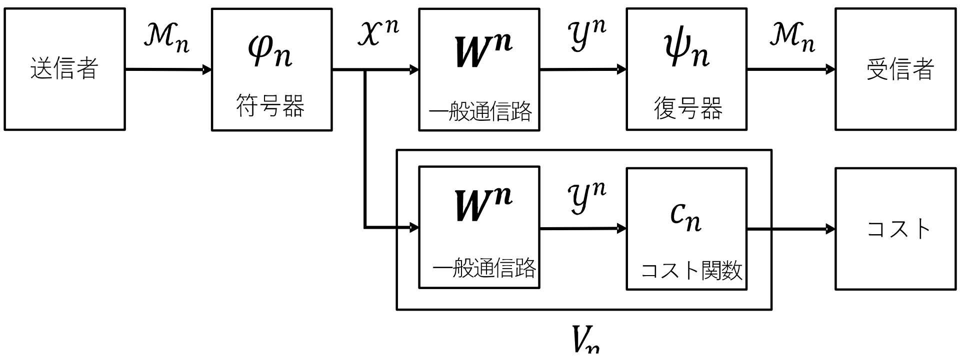

図 2　着払いコスト制約付き通信路符号化問題

〔証明〕

$$R < \sup_{\boldsymbol{X}:\overline{c}_\Gamma(\boldsymbol{X})\geq 1-\delta} \underline{I}_\varepsilon(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) \tag{240}$$

なる任意の R を考える．ある $\gamma > 0$ を用いて

$$R < \sup_{\boldsymbol{X}:\overline{c}_\Gamma(\boldsymbol{X})\geq 1-\delta} \underline{I}_\varepsilon(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) - 3\gamma \tag{241}$$

となる．すると

$$\overline{c}_\Gamma(\boldsymbol{X}) \geq 1-\delta \tag{242}$$

となるようなある入力 $\boldsymbol{X} = \{X^n\}_{n=1}^\infty$ が存在して，

$$R < \underline{I}_\varepsilon(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})) - 2\gamma \tag{243}$$

が成り立つ．ここで $\overline{c}_\Gamma(\boldsymbol{X})$ の定義より，任意の整数 $k > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left\{V_n(\Gamma|X^n) < 1-\delta-\frac{1}{k}\right\} = 0 \tag{244}$$

となる．さらに，十分大きな全ての n で

$$\Pr\left\{V_n(\Gamma|X^n) < 1-\delta-\frac{1}{k}\right\} < \frac{1}{k} \tag{245}$$

が成り立つ．このとき，各 n に対して上式を満たす最大の k が決まる．その k を用いて $\dfrac{1}{k} \triangleq \gamma_n$ とすると，$n\to\infty$ で $\gamma_n \to 0$ かつ

$$\Pr\left\{V_n(\Gamma|X^n) < 1-\delta-\gamma_n\right\} < \gamma_n \tag{246}$$

となる．ここで

$$\mathcal{S}_n \triangleq \left\{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}^n \middle| V_n(\Gamma|\boldsymbol{x}) < 1-\delta-\gamma_n\right\} \tag{247}$$

と定義する．以降，4 章 4.2 節と同様に証明する事が出来る．

7 まとめ

ランダム符号化を用いて定理を示すことができた．復号誤りを許容した問題では，典型的な符号という概念を用いる点が証明の要である．一方，復号誤りとコスト超過を許容した問題では，集合 $\mathcal{S}_n$ に入る符号とそうでない符号の割合はあらかじめ決めておき，そのもとで二段階でランダム符号化を用いる点が証明の要である．ただし二段目の $\mathcal{S}_n$ に入らない確率は，対角

線論法により結局 0 に収束する為，$\Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n\} = 0$ とし，二段目を省略しても証明が可能である．

本論文の 3 章と 4 章ではコストを制限する問題設定だったが，エナジーハーベストのように復号に使用する電力を受信した信号から確保する場面を考える事が出来る．そのような問題も，ランダム符号化を用いて通信路容量を示すことが出来た．

本研究はコストの分布の確率的上極限を評価したが，期待値で評価する問題設定も考えることが出来る．また，集合 $\mathcal{S}_n$ を適切に定義する事で，他の問題設定にも応用が可能である．

謝辞 本研究を行うにあたり，丁寧なご指導を賜りました指導教員の西新幹彦准教授に感謝の意を表する．

参考文献

[1] 韓 太舜，情報理論における情報スペクトル的方法，培風館，1998.

[2] Masaki Hori and Mikihiko Nishiara, “Channel Capacity with Cost Constraint Allowing Cost Overrun,” IEICE Trans. Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, Vol.E107-A, No.3, pp.458–463, March 2024.

[3] Mikihiko Nishiara,“Channel Coding with Cost Paid on Delivery,” IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, Vol.E105-A, No.3, pp.345–352, March 2022.

[4] Sennur Ulukus, et al. “Energy Harvesting Wireless Communications: A Review of Recent Advances,” IEEE Journal on Selected Areas in Communications, Vol.33, No.3, pp.360–381, March 2015.

[5] S.Verdú and T.S.Han, “A general formula for channel capacity,” IEEE Transactions on Information Theory, vol.IT-40, no.4, pp.1147–1157, July 1994.