信州大学
大学院総合理工学研究科

修士論文

補助情報源を伴うレート歪み理論のランダム符号化を用いない証明

指導教員　西新 幹彦 准教授

専攻　工学専攻
分野　電子情報システム工学分野
学籍番号　23W2040H
氏名　木原 颯大

2025 年 2 月 12 日

目次

1 はじめに 1

2 1 対 1 のレート歪み問題 2

3 補助情報源を伴うレート歪み問題 4

4 上極限による符号化レートの評価 6
4.1 符号の構成 6
4.2 順定理 10
4.3 逆定理 12

5 確率的上極限による符号化レートの評価 14
5.1 符号の構成 14
5.2 順定理 19
5.3 逆定理 21

6 まとめ 25

謝辞 26

参考文献 26

付録 A 符号器が補助情報源を観測しない場合の歪みを許容しない情報源符号化問題 27

1　はじめに

現在の情報化社会では，膨大な量の情報がやり取りされているため，通信の効率化は重要課題である．通信では通常，情報源出力と受信者の間に符号器と復号器が設けられ，符号器は情報源出力を符号化し，復号器はそれをもとに情報源出力を復元する．通信の効率を向上させるということは，すなわち符号化レートを小さくするということである．

しかし，無制限に符号化レートを小さくするのでは受信者に情報を伝えらえなくなってしまう．そこで，情報理論では情報源出力と復号器の出力の間に違いが起こる確率が漸近的に 0 となるという制約の下で，符号化レートをどこまで小さくできるかを考える．その最も基本的な結果として Shannon が示した情報源符号化定理が知られている．さらに，条件を緩和して情報源出力と復号器の出力の間に違いを許容する問題設定もある．たとえば，動画を視聴する際は細かい部分が情報源出力と異なっていてもよい場合がある．一般に違いを許容した場合，それを許容しない場合と比べて，符号化レートを小さくすることができる．そこで情報理論では，情報源出力と復号器の出力の間の違いを歪みという尺度で定義し，一定の歪み以下のうちに符号化レートをどこまで小さくできるかという問題を考える．そのような問題はレート歪み問題と呼ばれ，議論されてきた．

以上の議論は通常，情報源と受信者が 1 対 1 の場合でなされるが，さらに問題を拡張することが可能である．まず，情報源と相関のある情報源である，補助情報源を想定する．そして，補助情報源を符号器や復号器が観測できるとする．たとえば，情報源を日本のある県の今日の天気予報とした場合に，予報が中部地方のどこかのものであるという補足の情報がもたらされたとき，その情報を補助情報源としてみなすことができる．

この補助情報源を伴う問題設定は符号器が補助情報源を観測できるかどうか，歪みを許容するかどうかで計 4 通りに場合分けできる．歪みを許容しない場合の符号化レートの下限は符号器が補助情報源を観測するかどうかにかかわらず，同じ量で表すことができる．符号器が補助情報源を観測しない場合のレートの下限は，符号語を一様分布に従って発生させる，Random binning と呼ばれる手法でしか示すことができていないのに対して，符号器が補助情報源を観測しない場合のレートの下限は Random binning を用いない方法でも示されている [3]．歪みを許容する場合の符号化レートの下限は符号器が補助情報源を観測するかどうかで異なる．符号器が補助情報源を観測しない場合のレートの下限は，Wyner-Ziv 符号化問題と呼ばれており，レートの下限は Wyner，Ziv[8] や岩田，村松 [5] によって示されている．しかし，この結果も Random binnning を用いて示されたもので，Random binning を用いない方法では示されていない．また，符号器が補助情報源を観測する場合のレートの下限は，1 対 1 のレート歪み問題の結果から明らかであるとされる [1],[8] が，その結果もランダム符号化と呼ばれる手法によってのみ示唆されている．

さらに，受信者を一人増やして，二名の受信者がそれぞれ異なる歪みを許容するという状況を考えることもできる．たとえば，動画配信サービスを使うとき，受信者は状況に応じて適切に画質を設定することで，符号化レートを調整したい場合がある．このような状況に対して，まず，許容する歪みが大きな受信者に対する符号語を構成し，次に許容する歪みが小さい受信者に対して追加の符号語を構成するという方法が有効である．この方法はスケーラブル符号化（階層符号化）と呼ばれ，JPEG，H.264/SVC，MPEG-2，MPEG-4 といった画像や動画の規格で採用されている．なお，許容する歪みの大きな受信者に向けた符号器を抽象的に表現すると，情報源に対する補助情報源とみなすことができる．そのため，符号器が補助情報源を観測可能なレート歪み問題は，スケーラブル符号化のレート歪み問題を単純化した問題であるといえる．スケーラブル符号化問題の二つの符号化レートの内界は El-Gamal ら [4] や松田，植松 [6] によって示されている．しかし現時点では，スケーラブル符号化のレート歪み問題も，ランダム符号化でのみ取り組まれており，ランダム符号化を用いない方法の発見が期待される．

一方，過去に行われた研究では，情報源と受信者が 1 対 1 である場合のレート歪み問題がランダム符号化を用いない方法で取り組まれている [7]．以上を踏まえて，本論文ではランダム符号化を用いない方法で，符号器が補助情報源を観測する場合について，レートと歪みを同時にどこまで小さくできるかを調べる．加えて，補助情報源の出力ごとで使用する符号語を変更できる点に注目し，符号化レートの評価として確率的上極限を採用し，従来の評価方法と比較する．

本論文は次のような章から構成される．2 章では従来議論されている，情報源に対し受信者が 1 対 1 である場合のレート歪み達成可能性を確認し，3 章では補助情報源のある問題を定式化する．4 章では 2,3 章をふまえて，符号化レートを上極限の基準で制約した際の補助情報源付きレート歪み問題を議論する．5 章では，符号化レートを確率的上極限の基準で制約した際の補助情報源付きレート歪み問題を議論する．続いて 6 章で本論文をまとめる．さらに付録では，補助情報源が符号器を観測しない通信モデルにおいて歪みを許容しない場合の符号化レートの下限を示す．

2　1 対 1 のレート歪み問題

本章では情報源と受信者が 1 対 1 である場合の基本的なレート歪み問題を定式化し，問題の拡張に備える．

情報源アルファベットを $\mathcal{X}$ としたとき，一般情報源は $\mathcal{X}^n$ 上の任意の確率分布 P_{X^n} をもつ確率変数 X^n の列として $\boldsymbol{X} = \{X^n = (X_1, X_2, ..., X_n)\}_{n=1}^{\infty}$ という記号で表される．一般情報源は全ての非定常または非エルゴードな情報源を含む情報源で，きわめて一般的な情報源である．

一般に，実数値確率変数列 $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して以下を定義する．

定義 1

$$\operatorname*{p\text{-}lim\,sup}_{n\to\infty} Z_n \triangleq \inf\Big\{\alpha\Big|\lim_{n\to\infty}\Pr\{Z_n>\alpha\}=0\Big\} \tag{1}$$

を確率的上極限という．

次に，長さ n 文字の情報源系列 $\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}^n$ と受信者 $\hat{\boldsymbol{X}}$ の間に符号を導入する．符号語数が M_n となる符号語の集合を $\mathcal{M}_n=\{1,2,...,M_n\}$ とする．このとき，情報源系列 $\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}^n$ を $\mathcal{M}_n$ のいずれかの要素に変換する操作を符号化といい，この変換を表す写像 $\varphi_n:\mathcal{X}^n\to\mathcal{M}_n$ を符号器という．また，符号語を復号アルファベット $\hat{\mathcal{X}}$ の要素からなる系列 $\hat{\boldsymbol{x}}\in\hat{\mathcal{X}}^n$ に変換する操作を復号化といい，この変換を表す写像 $\psi_n:\mathcal{M}_n\to\hat{\mathcal{X}}^n$ を復号器という．

符号語 $m\in\mathcal{M}_n$ を受信者 $\hat{X}^n$ に伝えるには，符号語 m を符号アルファベット $\mathcal{U}$ の要素からなる文字列で表す必要がある．この変換を 1 対 1 にするには，$\mathcal{U}$ の要素からなる文字列の長さを固定長にすればよい．このような符号化を固定長符号化という．

固定長符号化における符号語長は，$\mathcal{U}$ の要素数を k としたとき，$\lceil\log_k M_n\rceil$ で表すことができる．以降，数学的な解析を簡単にするため，この対数の底を e として考える．また，この量を使って以下を定義する．

定義 2　長さ n の情報源系列を符号化するために必要な 1 文字当たりの符号語長は

$$\frac{1}{n}\log M_n \tag{2}$$

で表される．この量は符号化レートといい，符号の性能を評価する基準となる．

では次に，歪みを定義する．各 n に対する歪み測度を $d_n:\mathcal{X}^n\times\hat{\mathcal{X}}^n\to[0,+\infty)$ と定め，$d_n(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{x}})$ を $\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}^n$ と $\hat{\boldsymbol{x}}\in\hat{\mathcal{X}}^n$ 間の歪みという．系列の長さ n ごとに歪み d_n が定義されていることに注意されたい．

定義 3　$\boldsymbol{X}$ と $\hat{\boldsymbol{X}}$ に対して

$$\overline{D}(\boldsymbol{X},\hat{\boldsymbol{X}})\triangleq\operatorname*{p\text{-}lim\,sup}_{n\to\infty}\frac{1}{n}d_n(X^n,\hat{X}^n) \tag{3}$$

を定義する．$\overline{D}(\boldsymbol{X},\hat{\boldsymbol{X}})$ を $\boldsymbol{X}$ と $\hat{\boldsymbol{X}}$ の間の最大歪みという．

我々は許容する最大歪みを設定し，そのうえで符号化レートをできるだけ小さくしたい．そこで，与えられたレートと歪みが同時に実現可能かどうかを次のように表す．

定義 4　(R,D) が達成可能とは

$$\operatorname*{p\text{-}lim\,sup}_{n\to\infty}\frac{1}{n}d_n(X^n,\psi_n(\varphi_n(X^n)))\le D \tag{4}$$

$$\text{かつ}\quad\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log_e M_n\le R \tag{5}$$

を満たす符号の列 $\{(\varphi_n,\psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在することである．ただし M_n は符号語数である．

そのうえで，レート歪み関数を以下のように定義する．

定義 5

$$R(D) \triangleq \inf\{R|(R,D) \text{ が達成可能 }\} \tag{6}$$

をレート歪み関数と呼ぶ．

レート歪み関数を数学的に表現することがレート歪み問題の基本的な問題である．

ここで，定理を記述するために，次を定義する．

定義 6

$$\bar{I}(\boldsymbol{X};\hat{\boldsymbol{X}}) \triangleq \text{p-}\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{P_{\hat{X}^n|X^n}(\hat{X}^n|X^n)}{P_{\hat{X}^n}(\hat{X}^n)} \tag{7}$$

とし，これを $\boldsymbol{X}$ と $\hat{\boldsymbol{X}}$ の間の相互情報量スペクトル上限と呼ぶ．

レート歪み関数は相互情報量スペクトル上限を用いて以下のように表すことができる [2]．

定理 1　レート歪み関数 $R(D)$ は

$$R(D) = \inf_{\hat{\boldsymbol{X}}:\overline{D}(\boldsymbol{X},\hat{\boldsymbol{X}})\le D} \bar{I}(\boldsymbol{X};\hat{\boldsymbol{X}}) \tag{8}$$

と表される．

3　補助情報源を伴うレート歪み問題

前章では、情報源 X^n と受信者 $\hat{X}^n$ が 1 対 1 である場合のレート歪み問題を確認した．本章では補助情報源を伴うレート歪み問題を定式化する．情報源 $\boldsymbol{X}$ と相関をもち，$\mathcal{Y}^n$ 上の任意の確率分布 P_{Y^n} をもつ確率変数列 $\boldsymbol{Y}$ を考え，これを補助情報源とよぶ．本論文では図 1 のモデルに表すように，符号器 φ_n が補助情報源 $\boldsymbol{Y}$ を観測して情報源 $\boldsymbol{X}$ を符号化する問題を考える．

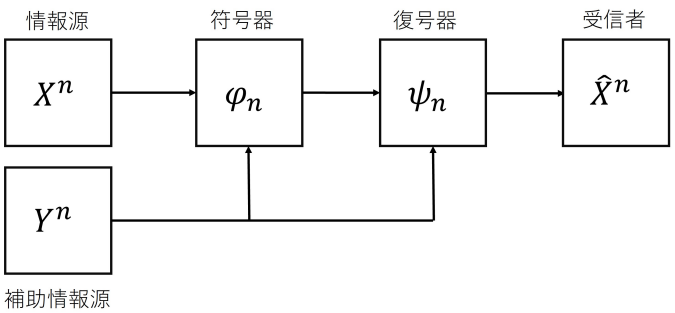

図 1　補助情報源を伴う情報源符号化の通信モデル

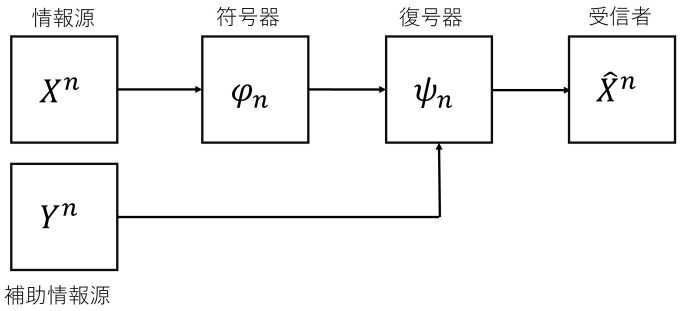

図 2　Wyner-Ziv 情報源符号化の通信モデル

これを解釈して，符号器 φ_n を $\varphi_n : \mathcal{X}^n \times \mathcal{Y}^n \to \mathcal{M}_n$，復号器 ψ_n を $\psi_n : \mathcal{M}_n \times \mathcal{Y}^n \to \hat{\mathcal{X}}^n$ と定義する．このとき，受信者 $\hat{\boldsymbol{X}}$ は形式的に $\hat{\boldsymbol{X}} \triangleq \{\psi_n(\varphi_n(X^n, Y^n), Y^n)\}_{n=1}^{\infty}$ で定義される．なお，この問題設定は，図 2 のモデルに表すような，符号器 φ_n が補助情報源 $\boldsymbol{Y}$ を観測しない場合の問題設定，すなわち Wyner-Ziv 符号化問題とは異なる問題設定である点に注意してほしい．

図 1 で表される補助情報源を伴う符号化の特徴は，符号器 φ_n が補助情報源の各出力 $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^n$ ごとで出力する符号語を変更できる点である．そこで，補助情報源の出力が $Y^n = \boldsymbol{y}$ となるとき，符号器 φ_n が出力する符号語の集合を $\mathcal{M}_n(\boldsymbol{y}) \subseteq \mathcal{M}_n$ とし，その大きさを $M_n(\boldsymbol{y})$ とする．我々は，補助情報源を伴う符号化において，与えられた歪みのもとで，確率的に決定する Y^n に対する符号化レート $\frac{1}{n}\log M_n(Y^n)$ をどこまで小さくできるかに興味がある．その定式化として，2 つの規範を定義する．

第一に定義 4 と同様に次を定義する．

定義 7　補助情報源 $\boldsymbol{Y}$ のもとで (R, D) が達成可能とは

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n, Y^n), Y^n)) \le D \tag{9}$$

$$\text{かつ} \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M_n \le R \tag{10}$$

を満たす符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在することである．ただし，M_n を任意の $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^n$ に対して，$M_n \ge M_n(\boldsymbol{y})$ となるような量とする．

定義 8　レート歪み関数を

$$R(D|\boldsymbol{Y}) \triangleq \inf\{R|\ \text{補助情報源}\ \boldsymbol{Y}\ \text{のもとで}\ (R, D)\ \text{が達成可能}\ \} \tag{11}$$

と定義する．

第二に，$\frac{1}{n}\log M_n(Y^n)$ を確率的上極限を用いて評価する場合の規範を定義する．

定義 9　補助情報源 $\boldsymbol{Y}$ のもとで (R, D) が確率的に達成可能であるとは

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n, Y^n), Y^n)) \leq D \tag{12}$$

$$\text{かつ} \quad \text{p-}\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M_n(Y^n) \leq R \tag{13}$$

を満たす符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在することである．

定義 10　レート歪み関数を

$$\overline{R}(D|\boldsymbol{Y}) \triangleq \inf\{R| \text{ 補助情報源 } \boldsymbol{Y} \text{ のもとで } (R, D) \text{ が確率的に達成可能 }\} \tag{14}$$

と定義する．

ここで，式 (13) の制約では符号化レート $\frac{1}{n}\log M_n(\boldsymbol{y})$ が R 以下にならない $\boldsymbol{y}$ の存在を許容しているのに対して，式 (10) の制約では任意の $\boldsymbol{y}$ に対して符号化レートが R 以下になることを要求していることから，定義 9 で示した規範は定義 7 で示した規範の緩和となっている点に注意してほしい．

本論文では，補助情報源を伴う符号化におけるレートと歪みの関係を調べるために，$R(D|\boldsymbol{Y})$ と $\overline{R}(D|\boldsymbol{Y})$ を導出する．

4　上極限による符号化レートの評価

本章では，定義 7 で定めた，符号化レートを上極限で評価する場合の達成可能性を議論する．文献 [7] と似た手順で次の定理を導く．

定理 2　補助情報源を伴う場合のレート歪み関数 $R(D|\boldsymbol{Y})$ は

$$R(D|\boldsymbol{Y}) = \inf_{\hat{\boldsymbol{X}}:\overline{D}(\boldsymbol{X},\hat{\boldsymbol{X}})\leq D} \bar{I}(\boldsymbol{X}; \hat{\boldsymbol{X}}|\boldsymbol{Y}) \tag{15}$$

で表される．

なお，文献 [1],[8] で触れられている結果は情報源が定常無記憶である場合であるのに対して，定理 2 は情報源が一般情報源である場合も含む．

以降では順定理と逆定理に分けて定理を示す．

4.1　符号の構成

まず，順定理を示すために，ランダム符号化を用いない方法で符号を構成し，以下の補題を示す．

補題 1 情報源 X^n に対し，それと相関のある $Y^n, \hat{X}^n$ を考える．また R, γ を任意に与えられ

た正の定数としたうえで,

$$\mathcal{B}_n(\hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}) \triangleq \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n \middle| \frac{1}{n}\log\frac{P_{X^n|\hat{X}^nY^n}(\boldsymbol{x} \mid \hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y})}{P_{X^n|Y^n}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})} \le R-\gamma \right\} \tag{16}$$

とおき，$\mathcal{S}_n(\hat{\boldsymbol{x}})$ を $\hat{\boldsymbol{x}} \in \hat{\mathcal{X}}^n$ を引数とする $\mathcal{X}^n$ の任意の部分集合とすると，ある符号の列 $\{(\varphi_n,\psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して,

$$\begin{aligned}
&\Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n(\psi_n(\varphi_n(X^n,Y^n),Y^n))\} \\
&\le \Pr\Big\{X^n \notin \mathcal{B}_n(\hat{X}^n,Y^n)\Big\} + \Pr\Big\{X^n \notin \mathcal{S}_n(\hat{X}^n)\Big\} + e^{-n\gamma}, \qquad (17)\\
&\frac{1}{n}\log M_n \le R \qquad (18)
\end{aligned}$$

を満たす．ただし，M_n を任意の $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^n$ に対して，$M_n \ge M_n(\boldsymbol{y})$ となるような量とする．

〔証明〕$\mathcal{T}_n(\hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}) \triangleq \mathcal{B}_n(\hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}) \cap \mathcal{S}_n(\boldsymbol{y})$ とおく．$\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^n$ を固定したもとで，復号語を以下のように順次選んでいく．

最初に条件

$$P_{X^n|\hat{X}^nY^n}(\mathcal{T}_n(\hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}) \mid \hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}) \ge e^{-n\gamma} \tag{19}$$

を満たす $\hat{\boldsymbol{x}} \in \hat{\mathcal{X}}^n$ を 1 つ選びこれを最初の復号語 $\psi_n(1,\boldsymbol{y})$ とする．

さらに，$\boldsymbol{x} \in \mathcal{T}_n(\psi(1,\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y})$ なる $\boldsymbol{x}$ に対して，$\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \triangleq 1$ とする．

ここで，$\boldsymbol{y}$ を固定したもとでの符号語 m の符号化領域を $\varphi_n^{-1}(m|\boldsymbol{y}) \triangleq \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n | \varphi_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = m\}$ で表す。すると，$\boldsymbol{y}$ を固定したもとでの 1 番目の符号化領域は

$$\varphi_n^{-1}(1|\boldsymbol{y}) = \mathcal{T}_n(\psi_n(1,\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}) \tag{20}$$

と表現できる．

これを踏まえて，以降 $m \ge 2$ に対し m 番目の復号語として

$$P_{X^n|\hat{X}^nY^n}\left(\mathcal{T}_n(\hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}) \setminus \bigcup_{m'<m} \varphi_n^{-1}(m'|\boldsymbol{y}) \middle| \hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}\right) \ge e^{-n\gamma} \tag{21}$$

を満たす $\hat{\boldsymbol{x}} \in \hat{\mathcal{X}}^n$ を 1 つ選び，$\psi_n(m,\boldsymbol{y})$ とする．さらに $\boldsymbol{y}$ を固定したもとでの m 番目の符号化領域を

$$\varphi_n^{-1}(m \mid \boldsymbol{y}) \triangleq \mathcal{T}_n(\psi_n(m,\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}) \setminus \bigcup_{m'<m} \varphi_n^{-1}(m' \mid \boldsymbol{y}) \tag{22}$$

と定める．可能な限りこの操作を続け，$\boldsymbol{y}$ に対して復号語を $M_n(\boldsymbol{y})$ 個取れたとする．以上の操作を各 $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^n$ に対して行う．すると符号器 φ_n と復号器 ψ_n が完成する．

また，$\varphi_n^{-1}(m \mid \boldsymbol{y})$, $m = 1, ..., M_n(\boldsymbol{y})$ が互いに素であることに注意して，

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{y}) \triangleq \bigcup_m \varphi_n^{-1}(m \mid \boldsymbol{y}) \tag{23}$$

とおくと，$M_n(\boldsymbol{y})$ の定義より任意の $\hat{\boldsymbol{x}} \in \hat{\mathcal{X}}^n$ に対して

$$P_{X^n|\hat{X}^n Y^n}(\mathcal{T}_n(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) \setminus \mathcal{D}(\boldsymbol{y}) \mid \hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) < e^{-n\gamma} \tag{24}$$

が成り立つことに注意しておく．

次に，以上のように定義された符号 (φ_n, ψ_n) の性能を評価する．第一に符号化レートを調べ，式 (18) を導く．まず，$\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^n$ を固定し，その上で $m \in \mathcal{M}_n$ を固定する．これに対して $\boldsymbol{x} \in {\varphi_n}^{-1}(m \mid \boldsymbol{y})$ を考える．すると式 (22) より $\boldsymbol{x} \in \mathcal{T}_n(\psi_n(m, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{y})$ となる．さらに $\mathcal{T}_n(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y})$ の定義より $\boldsymbol{x} \in \mathcal{B}_n(\psi_n(m, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{y})$ となるため，式 (16) より

$$\frac{1}{n} \log \frac{P_{X^n|\hat{X}^n Y^n}(\boldsymbol{x} \mid \psi_n(m, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{y})}{P_{X^n|Y^n}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})} \leq R - \gamma \tag{25}$$

といえる．すなわち，$\boldsymbol{x} \in {\varphi_n}^{-1}(m \mid \boldsymbol{y})$ ならば

$$P_{X^n|Y^n}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}) \geq P_{X^n|\hat{X}^n Y^n}(\boldsymbol{x} \mid \psi_n(m, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{y}) e^{-n(R-\gamma)} \tag{26}$$

が成り立つ．したがって

$$\begin{aligned}
1 \geq & P_{X^n|Y^n}(\mathcal{D}(\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{y}) && (27)\\
\overset{(23)}{=} & P_{X^n|Y^n}\left(\bigcup_m {\varphi_n}^{-1}(m|\boldsymbol{y}) \middle| \boldsymbol{y} \right) && (28)\\
\overset{(22)}{=} & \sum_m P_{X^n|Y^n}\left({\varphi_n}^{-1}(m|\boldsymbol{y}) \middle| \boldsymbol{y} \right) && (29)\\
= & \sum_m \sum_{\boldsymbol{x} \in {\varphi_n}^{-1}(m|\boldsymbol{y})} P_{X^n|Y^n}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}) && (30)\\
\overset{(26)}{\geq} & \sum_m \sum_{\boldsymbol{x} \in {\varphi_n}^{-1}(m|\boldsymbol{y})} P_{X^n|\hat{X}^n Y^n}(\boldsymbol{x} \mid \psi_n(m, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{y}) e^{-n(R-\gamma)} && (31)\\
= & \sum_m P_{X^n|\hat{X}^n Y^n}\left({\varphi_n}^{-1}(m|\boldsymbol{y}) \middle| \psi_n(m, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{y} \right) e^{-n(R-\gamma)} && (32)\\
\overset{(21)}{\geq} & \sum_m e^{-n\gamma} \cdot e^{-n(R-\gamma)} && (33)\\
= & \sum_m e^{-nR} && (34)\\
= & M_n(\boldsymbol{y}) e^{-nR}, && (35)
\end{aligned}$$

すなわち

$$M_n(\boldsymbol{y}) \leq e^{nR} \tag{36}$$

がいえる．これはすべての $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^n$ に対して成り立っており，$M_n(\boldsymbol{y})$ は整数値をとるため，$M_n(\boldsymbol{y})$ には最大値が存在する．そこで，$M_n \triangleq \max_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{Y}^n} M_n(\boldsymbol{y})$ とすれば，

$$\frac{1}{n}\log M_n \leq R \tag{37}$$

が導かれる．

次に式 (17) を導く．ある $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^n$ に対して $\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}(\boldsymbol{y})$ とすると，ある $m \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{y})$ に対して $\boldsymbol{x} \in {\varphi_n}^{-1}(m|\boldsymbol{y})$ となる．したがって $\boldsymbol{x} \in \mathcal{T}_n(\psi_n(m,\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y})$ となる．このとき，$\mathcal{T}_n(\hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y})$ の定義から，$\boldsymbol{x} \in \mathcal{S}_n(\psi_n(m,\boldsymbol{y}))$ となる．一方 $\varphi_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = m$ なので $\boldsymbol{x} \in \mathcal{S}_n(\psi_n(\varphi_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}))$ となる．したがって

$$\Pr\{X^n \in \mathcal{D}(\boldsymbol{y})|Y^n = \boldsymbol{y}\} \leq \Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n(\psi_n(\varphi_n(X^n,\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}))|Y^n = \boldsymbol{y}\} \tag{38}$$

といえる．一方, 任意の $\hat{\boldsymbol{x}}$ について

$$\begin{aligned} P_{X^n|\hat{X}^nY^n}(\mathcal{T}_n(\hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}) \mid \hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}) =& P_{X^n|\hat{X}^nY^n}(\mathcal{T}_n(\hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}) \cap \mathcal{D}(\boldsymbol{y}) \mid \hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}) \\ &+ P_{X^n|\hat{X}^nY^n}(\mathcal{T}_n(\hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}) \setminus \mathcal{D}(\boldsymbol{y}) \mid \hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}) && (39)\\ \overset{(24)}{\leq}& P_{X^n|\hat{X}^nY^n}(\mathcal{D}(\boldsymbol{y}) \mid \hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}) + e^{-n\gamma} && (40) \end{aligned}$$

となるので式 (38) の左辺は

$$\begin{aligned} \Pr\{X^n \in \mathcal{D}(\boldsymbol{y})|Y^n = \boldsymbol{y}\} &= \sum_{\hat{\boldsymbol{x}}} P_{X^n\hat{X}^n|Y^n}(\mathcal{D}(\boldsymbol{y}),\hat{\boldsymbol{x}}|\boldsymbol{y}) && (41)\\ &= \sum_{\hat{\boldsymbol{x}}} P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{\boldsymbol{x}}|\boldsymbol{y}) P_{X^n|\hat{X}^nY^n}(\mathcal{D}(\boldsymbol{y}) \mid \hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}) && (42)\\ &\overset{(40)}{\geq} \sum_{\hat{\boldsymbol{x}}} P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{\boldsymbol{x}}|\boldsymbol{y})(P_{X^n|\hat{X}^nY^n}(\mathcal{T}_n(\hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}) \mid \hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}) - e^{-n\gamma}) && (43)\\ &= \sum_{\hat{\boldsymbol{x}}} \Pr\Big\{X^n \in \mathcal{T}_n(\hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}), \hat{X}^n = \hat{\boldsymbol{x}}\Big|Y^n = \boldsymbol{y}\Big\} - e^{-n\gamma} && (44)\\ &= \Pr\Big\{X^n \in \mathcal{T}_n(\hat{X}^n,\boldsymbol{y})\Big|Y^n = \boldsymbol{y}\Big\} - e^{-n\gamma} && (45) \end{aligned}$$

となる．したがって式 (38)，(45) より，

$$\begin{aligned} &\Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n(\psi_n(\varphi_n(X^n,\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y})), Y^n = \boldsymbol{y}\} \\ &\geq \Pr\Big\{X^n \in \mathcal{T}_n(\hat{X}^n,\boldsymbol{y}), Y^n = \boldsymbol{y}\Big\} - P_{Y^n}(\boldsymbol{y})e^{-n\gamma} && (46) \end{aligned}$$

が導かれる．ゆえに，

$$\Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n(\psi_n(\varphi_n(X^n, Y^n), Y^n))\} \tag{47}$$
$$= \sum_{\boldsymbol{y}} \Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n(\psi_n(\varphi_n(X^n, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{y})), Y^n = \boldsymbol{y}\} \tag{48}$$
$$\geq \sum_{\boldsymbol{y}} \Big(\Pr\Big\{ X^n \in \mathcal{T}_n(\hat{X}^n, \boldsymbol{y}), Y^n = \boldsymbol{y} \Big\} - P_{Y^n}(\boldsymbol{y}) e^{-n\gamma} \Big) \tag{49}$$
$$= \Pr\Big\{ X^n \in \mathcal{T}_n(\hat{X}^n, Y^n) \Big\} - e^{-n\gamma} \tag{50}$$

となり，

$$\Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n(\psi_n(\varphi_n(X^n, Y^n), Y^n))\} \tag{51}$$
$$\leq \Pr\Big\{ X^n \notin \mathcal{T}_n(\hat{X}^n, Y^n) \Big\} + e^{-n\gamma} \tag{52}$$
$$= \Pr\Big\{ X^n \notin \mathcal{B}_n(\hat{X}^n, Y^n) \cap \mathcal{S}_n(\hat{X}^n) \Big\} + e^{-n\gamma} \tag{53}$$
$$= \Pr\Big\{ X^n \notin \mathcal{B}_n(\hat{X}^n, Y^n) \text{ または } X^n \notin \mathcal{S}_n(\hat{X}^n) \Big\} + e^{-n\gamma} \tag{54}$$
$$\leq \Pr\Big\{ X^n \notin \mathcal{B}_n(\hat{X}^n, Y^n) \Big\} + \Pr\Big\{ X^n \notin \mathcal{S}_n(\hat{X}^n) \Big\} + e^{-n\gamma} \tag{55}$$

が導かれる．以上により，

$$\Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n(\psi_n(\varphi_n(X^n, Y^n), Y^n))\}$$
$$\leq \Pr\Big\{ X^n \notin \mathcal{B}_n(\hat{X}^n, Y^n) \Big\} + \Pr\Big\{ X^n \notin \mathcal{S}_n(\hat{X}^n) \Big\} + e^{-n\gamma} \tag{56}$$

が示された．□

4.2 順定理

本節では，補題 1 で構成した符号を用いて，定理 2 の順定理を示す．

〔定理 2 の順定理の証明〕ある D に対して，

$$R > R_0 \triangleq \inf_{\hat{\boldsymbol{X}}: \overline{D}(\boldsymbol{X}, \hat{\boldsymbol{X}}) \leq D} \overline{I}(\boldsymbol{X}; \hat{\boldsymbol{X}} | \boldsymbol{Y}) \tag{57}$$

なる任意の R を考える．すると，ある $\gamma > 0$ に対して，

$$R - \gamma > \overline{I}(\boldsymbol{X}; \hat{\boldsymbol{X}} | \boldsymbol{Y}), \tag{58}$$
$$\overline{D}(\boldsymbol{X}, \hat{\boldsymbol{X}}) \leq D \tag{59}$$

を満たす $\hat{\boldsymbol{X}}$ が存在する．このとき，$\overline{D}(\boldsymbol{X}, \hat{\boldsymbol{X}})$ の定義より，任意の整数 $k > 0$ に対して

$$\lim_{n \to \infty} \Pr\left\{ \frac{1}{n} d_n(X^n, \hat{X}^n) > D + \frac{1}{k} \right\} = 0 \tag{60}$$

である．ゆえに，十分に大きなすべての n で

$$\Pr\left\{\frac{1}{n}d_n(X^n,\hat{X}^n) > D+\frac{1}{k}\right\} \le \frac{1}{k} \tag{61}$$

を満たし，各 n で最大の k が存在する．したがって，この k に対して，$\gamma_n \triangleq \frac{1}{k}$ とすると，$\gamma_n \to 0 \quad (n\to\infty)$ かつ，

$$\Pr\left\{\frac{1}{n}d_n(X^n,\hat{X}^n) > D+\gamma_n\right\} \le \gamma_n \tag{62}$$

となる．ゆえに，

$$\lim_{n\to\infty}\Pr\left\{\frac{1}{n}d_n(X^n,\hat{X}^n) > D+\gamma_n\right\} = 0 \tag{63}$$

である．つづいて，

$$\mathcal{S}_n(\hat{\boldsymbol{x}}) \triangleq \left\{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}^n \middle| \frac{1}{n}d_n(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{x}}) \le D+\gamma_n\right\} \tag{64}$$

とすると，補題 1 より，

$$\frac{1}{n}\log M_n \le R, \tag{65}$$

$$\begin{aligned}
&\Pr\left\{\frac{1}{n}d_n(X^n,\varphi_n(\psi_n(X^n,Y^n),Y^n)) > D+\gamma_n\right\}\\
&\le \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{P_{X^n|\hat{X}^nY^n}(X^n|\hat{X}^n,Y^n)}{P_{X^n|Y^n}(X^n|Y^n)} > R-\gamma\right\}\\
&\quad + \Pr\left\{\frac{1}{n}d_n(X^n,\hat{X}^n) > D+\gamma_n\right\} + e^{-n\gamma}
\end{aligned} \tag{66}$$

満たす符号の列 $\{(\varphi_n.\psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する．まず，式 (66) の右辺について，式 (58) と $\overline{I}(\boldsymbol{X};\hat{\boldsymbol{X}}|\boldsymbol{Y})$ の定義により，n を十分大きくすると第 1 項は 0 に漸近する．また，式 (63) により，n を十分大きくすると第 2 項も 0 に漸近する．したがって，

$$\lim_{n\to\infty}\Pr\left\{\frac{1}{n}d_n(X^n,\varphi_n(\psi_n(X^n,Y^n),Y^n)) > D+\gamma_n\right\} = 0 \tag{67}$$

である．ゆえに，

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}d_n(X^n,\varphi_n(\psi_n(X^n,Y^n),Y^n)) - \gamma_n\right) \le D \tag{68}$$

であり，$\gamma_n \to 0 \quad (n\to\infty)$ であるので，

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}d_n(X^n,\varphi_n(\psi_n(X^n,Y^n),Y^n)) \le D \tag{69}$$

となる．これと式 (65) により定義 7 は満たされる．つまり，$R > R_0$ とすれば，補助情報源 $\boldsymbol{Y}$ のもとで (R, D) は達成可能である．すなわち，

$$R(D|\boldsymbol{Y}) \leq \inf_{\hat{\boldsymbol{X}}:\overline{D}(\boldsymbol{X},\hat{\boldsymbol{X}})\leq D} \bar{I}(\boldsymbol{X};\hat{\boldsymbol{X}}|\boldsymbol{Y}) \tag{70}$$

が結論される．□

4.3 逆定理

本節では，定理 2 の逆定理を示す．まず，そのため次の補題を用意する．この補題は文献 [2] の補題の拡張版である．

補題 2　確率変数列 $\hat{\boldsymbol{X}}$，$\boldsymbol{Y}$ と，ある定数 $M_n > 0$ が存在して，

$$|\{\hat{\boldsymbol{x}} \in \hat{\mathcal{X}}^n | P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{\boldsymbol{x}}|\boldsymbol{y}) > 0\}| \leq M_n \tag{71}$$

を満たすならば，任意の $\gamma > 0$ に対して

$$\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{X}^n|Y^n)} \geq \frac{1}{n}\log M_n + \gamma\right\} \leq e^{-n\gamma} \tag{72}$$

が成立する．

〔証明〕

$$\mathcal{T}_n(\boldsymbol{y}) \triangleq \left\{\hat{\boldsymbol{x}} \in \hat{\mathcal{X}} \middle| P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{\boldsymbol{x}}|\boldsymbol{y}) > 0, \frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{\boldsymbol{x}}|\boldsymbol{y})} \geq \frac{1}{n}\log M_n + \gamma\right\} \tag{73}$$

とする．次に，固定した $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^n$ に対してある $\hat{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})$ を考えると，$\mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})$ の定義より $P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{\boldsymbol{x}}|\boldsymbol{y}) \leq \frac{1}{M_n e^{n\gamma}}$ である．ゆえに

$$\begin{aligned}
\Pr\left\{\hat{X}^n \in \mathcal{T}_n(\boldsymbol{y}) \middle| Y^n = \boldsymbol{y}\right\} &= \sum_{\hat{\boldsymbol{x}}\in\mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})} P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{\boldsymbol{x}}|\boldsymbol{y}) && (74)\\
&\leq \sum_{\hat{\boldsymbol{x}}\in\mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})} \frac{1}{M_n e^{n\gamma}} && (75)\\
&= \frac{|\mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})|}{M_n e^{n\gamma}} && (76)\\
&\overset{(71)}{\leq} e^{-n\gamma} && (77)
\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{X}^n|\boldsymbol{y})} \geq \frac{1}{n}\log M_n + \gamma \middle| Y^n = \boldsymbol{y}\right\} \leq e^{-n\gamma} \tag{78}$$

がいえる．ゆえに，

$$\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{X}^n|\boldsymbol{y})}\geq\frac{1}{n}\log M_n+\gamma, Y^n=\boldsymbol{y}\right\}\leq P_{Y^n}(\boldsymbol{y})e^{-n\gamma} \tag{79}$$

となり，

$$\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{X}^n\mid Y^n)}\geq\frac{1}{n}\log M_n+\gamma\right\} \tag{80}$$

$$=\sum_{\boldsymbol{y}}\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{X}^n\mid\boldsymbol{y})}\geq\frac{1}{n}\log M_n+\gamma, Y^n=\boldsymbol{y}\right\} \tag{81}$$

$$\leq\sum_{\boldsymbol{y}}P_{Y^n}(\boldsymbol{y})e^{-n\gamma} \tag{82}$$

$$=e^{-n\gamma} \tag{83}$$

が導かれる．□

続いて，この補題を用いて定理 2 の逆定理を示す．

〔定理 2 の逆定理の証明〕　最初に，補助情報源 $\boldsymbol{Y}$ のもとで (R,D) が達成可能とする．すなわち，

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}d_n(X^n,\psi_n(\varphi_n(X^n,Y^n),Y^n))\leq D \tag{84}$$

$$\text{かつ}\quad\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log M_n\leq R \tag{85}$$

を満たす符号の列 $\{(\varphi_n,\psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在するとする．

ここで，$\hat{X}^n\triangleq\psi(\varphi(X^n,Y^n),Y^n),\hat{\boldsymbol{X}}=\{\hat{X}^n\}_{n=1}^{\infty}$ とすると，

$$\overline{D}(\boldsymbol{X},\hat{\boldsymbol{X}})\leq D \tag{86}$$

が成立する．

続いて，$\hat{X}^n$ は M_n より多くの値をとらない．したがって，$\boldsymbol{y}\in\mathcal{Y}_n$ を固定しても

$$|\{\hat{\boldsymbol{x}}\in\hat{\mathcal{X}}|P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{\boldsymbol{x}}|\boldsymbol{y})>0\}|\leq M_n \tag{87}$$

であるので，補題 2 より，任意の $\gamma>0$ に対して

$$\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{X}^n|Y^n)}\geq\frac{1}{n}\log M_n+\gamma\right\}\leq e^{-n\gamma} \tag{88}$$

が成立している．加えて，$P_{\hat{X}^n|X^nY^n}(\hat{\boldsymbol{x}}|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leq 1$ より，

$$\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{P_{\hat{X}^n|X^nY^n}(\hat{X}^n|X^n,Y^n)}{P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{X}^n|Y^n)}\geq\frac{1}{n}\log M_n+\gamma\right\}\leq e^{-n\gamma} \tag{89}$$

が成立する．

ここで，任意の $\gamma > 0$ に対して，十分大きなすべての n で，

$$\frac{1}{n}\log M_n \leq \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log M_n + \gamma \tag{90}$$

$$\overset{(85)}{\leq} R + \gamma \tag{91}$$

がいえ，

$$\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{P_{\hat{X}^n|X^nY^n}(\hat{X}^n|X^n,Y^n)}{P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{X}^n|Y^n)} \geq R + 2\gamma\right\} \leq e^{-n\gamma} \tag{92}$$

が成立する．これは

$$\overline{I}(\boldsymbol{X};\hat{\boldsymbol{X}}|\boldsymbol{Y}) \leq R + 2\gamma \tag{93}$$

を意味する．ここで γ は任意だったので，

$$\overline{I}(\boldsymbol{X};\hat{\boldsymbol{X}}|\boldsymbol{Y}) \leq R \tag{94}$$

がいえる．これと，式 (86) により，

$$R(D|\boldsymbol{Y}) \geq \inf_{\hat{\boldsymbol{X}}:\overline{D}(\boldsymbol{X},\hat{\boldsymbol{X}})\leq D} \bar{I}(\boldsymbol{X};\hat{\boldsymbol{X}}|\boldsymbol{Y}) \tag{95}$$

を得る．□

5　確率的上極限による符号化レートの評価

本章では，定義 9 で定めた，符号化レートを確率的上極限で評価する場合の達成可能性を議論し，次の定理を導く．

定理 3　補助情報源を伴う場合において，符号化レートを確率的上極限で評価する場合のレート歪み関数 $\overline{R}(D|\boldsymbol{Y})$ は

$$\overline{R}(D|\boldsymbol{Y}) = \inf_{\hat{\boldsymbol{X}}:\overline{D}(\boldsymbol{X},\hat{\boldsymbol{X}})\leq D} \bar{I}(\boldsymbol{X};\hat{\boldsymbol{X}}|\boldsymbol{Y}) \tag{96}$$

で表される．なお，この結果により $\overline{R}(D|\boldsymbol{Y}) = R(D|\boldsymbol{Y})$ の関係が示される．この結果は本論文の主たる成果である．

5.1　符号の構成

本節では，定理 3 の順定理を示すために，符号を構成し，補題 3 を示す．まず，補題の記述のために以下の量を導入する．

定義 11

$$\bar{H}(\boldsymbol{Y}) \triangleq \text{p-}\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{Y^n}(Y^n)} \tag{97}$$

とし，これを $\boldsymbol{Y}$ のエントロピースペクトル上限という．

これを踏まえて，以下の補題が示される．

補題 3　情報源 X^n に対し，それと相関のある $Y^n, \hat{X}^n$ を考える．また R, γ を任意に与えられた正の定数としたうえで，

$$\mathcal{T}_n \triangleq \left\{ \boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^n \middle| \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{Y^n}(\boldsymbol{y})} < \overline{H}(\boldsymbol{Y}) + \gamma \right\}, \tag{98}$$

$$\mathcal{B}_n(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) \triangleq \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n \middle| \frac{1}{n} \log \frac{P_{X^n|\hat{X}^n Y^n}(\boldsymbol{x} \mid \hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y})}{P_{X^n|Y^n}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})} \le R - \gamma \right\} \tag{99}$$

とおき，$\mathcal{S}_n(\hat{\boldsymbol{x}})$ を $\hat{\boldsymbol{x}} \in \hat{\mathcal{X}}^n$ を引数とする $\mathcal{X}^n$ の任意の部分集合とすると，ある符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して，

$$\begin{aligned} &\Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n(\psi_n(\varphi_n(X^n, Y^n), Y^n))\} \\ &\le \Pr\Big\{X^n \notin \mathcal{B}_n(\hat{X}^n, Y^n)\Big\} + \Pr\Big\{X^n \notin \mathcal{S}_n(\hat{X}^n)\Big\} + \Pr\{Y^n \notin \mathcal{T}_n\} + e^{-n\gamma}, \end{aligned} \tag{100}$$

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M_n(Y^n) \le R \tag{101}$$

を満たす．ただし，固定した $\boldsymbol{y}$ に対する符号語数を $M_n(\boldsymbol{y})$ とする．

補題 1 ではすべての $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^n$ に対して同じように符号を構成したのに対し，補題 3 では $\boldsymbol{y} \in \mathcal{T}_n$ となるような $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^n$ に対してのみ符号を構成する．

〔証明〕$\mathcal{T}_n(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) \triangleq \mathcal{B}_n(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) \cap \mathcal{S}_n(\boldsymbol{y})$ とおく．$\boldsymbol{y} \in \mathcal{T}_n$ を固定し，復号語を以下のように順次選んでいく．

最初に条件

$$Pr\Big\{X^n \in \mathcal{T}_n(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) \Big| \hat{X}^n = \hat{\boldsymbol{x}}, Y^n = \boldsymbol{y}, Y^n \in \mathcal{T}_n\Big\} \ge e^{-n\gamma} \tag{102}$$

を満たす $\hat{\boldsymbol{x}} \in \hat{\mathcal{X}}^n$ を 1 つ選びこれを最初の復号語 $\psi_n(1, \boldsymbol{y})$ とする．

続いて，$\boldsymbol{y}$ を固定したもとでの 1 番目の符号化領域を

$$\varphi_n^{-1}(1|\boldsymbol{y}) \triangleq \mathcal{T}_n(\psi_n(1, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{y}) \tag{103}$$

とする．

以降 $m \ge 2$ に対し m 番目の復号語として

$$Pr\left\{ X^n \in \mathcal{T}_n(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) \setminus \bigcup_{m'<m} \varphi_n^{-1}(m'|\boldsymbol{y}) \middle| \hat{X}^n = \hat{\boldsymbol{x}}, Y^n = \boldsymbol{y}, Y^n \in \mathcal{T}_n \right\} \ge e^{-n\gamma} \tag{104}$$

を満たす $\hat{\boldsymbol{x}} \in \hat{\mathcal{X}}^n$ を 1 つ選び，$\psi_n(m, \boldsymbol{y})$ とする．さらに $\boldsymbol{y}$ を固定したもとでの m 番目の符号化領域を

$$\varphi_n^{-1}(m \mid \boldsymbol{y}) \triangleq \mathcal{T}_n(\psi_n(m, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{y}) \setminus \bigcup_{m'<m} \varphi_n^{-1}(m' \mid \boldsymbol{y}) \tag{105}$$

と定める．可能な限りこの操作を続け，$\boldsymbol{y}$ に対して復号語を $M_n(\boldsymbol{y})$ 個取れたとする．以上の操作を各 $\boldsymbol{y} \in \mathcal{T}_n$ に対して行う．するとすべての $\boldsymbol{y} \in \mathcal{T}_n$ に対して符号器 φ_n と復号器 ψ_n が完成する．

ここで，$\varphi_n^{-1}(m \mid \boldsymbol{y})$, $m = 1, ..., M_n(\boldsymbol{y})$ が互いに素であることに注意して，

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{y}) \triangleq \bigcup_m \varphi_n^{-1}(m \mid \boldsymbol{y}) \tag{106}$$

とおくと，$M_n(\boldsymbol{y})$ の定義より任意の $\hat{\boldsymbol{x}} \in \hat{\mathcal{X}}^n$ に対して

$$\Pr\Big\{X^n \in \mathcal{T}_n(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) \setminus \mathcal{D}(\boldsymbol{y}) \Big| \hat{X}^n = \hat{\boldsymbol{x}}, Y^n = \boldsymbol{y}, Y^n \in \mathcal{T}_n\Big\} < e^{-n\gamma} \tag{107}$$

が成り立つことに注意しておく．

一方で，$\boldsymbol{y} \notin \mathcal{T}_n$ に対しては，符号語数が有限個であるようないかなる符号を用いてもよいものとする．

続いて，符号化レートを調べ，式 (101) を導く．まず，$\boldsymbol{y} \in \mathcal{T}_n$ を固定し，その上で $m \in \mathcal{M}_n$ を固定する．これに対して $\boldsymbol{x} \in {\varphi_n}^{-1}(m \mid \boldsymbol{y})$ を考える．すると式 (105) より $\boldsymbol{x} \in \mathcal{T}_n(\psi_n(m, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{y})$ となる．さらに $\mathcal{T}_n(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y})$ の定義より $\boldsymbol{x} \in \mathcal{B}_n(\psi_n(m, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{y})$ となるため，式 (16) より

$$\frac{1}{n} \log \frac{\Pr\Big\{X^n = \boldsymbol{x} \Big| \hat{X}^n = \psi_n(m, \boldsymbol{y}), Y^n = \boldsymbol{y}, Y^n \in \mathcal{T}_n\Big\}}{\Pr\{X^n = \boldsymbol{x} | Y^n = \boldsymbol{y}, Y^n \in \mathcal{T}_n\}} \leq R - \gamma \tag{108}$$

といえる．すなわち $\boldsymbol{x} \in {\varphi_n}^{-1}(m \mid \boldsymbol{y})$ ならば

$$\begin{aligned} &\Pr\{X^n = \boldsymbol{x} | Y^n = \boldsymbol{y}, Y^n \in \mathcal{T}_n\} \\ &\geq \Pr\Big\{X^n = \boldsymbol{x} \Big| \hat{X}^n = \psi_n(m, \boldsymbol{y}), Y^n = \boldsymbol{y}, Y^n \in \mathcal{T}_n\Big\} e^{-n(R-\gamma)} \end{aligned} \tag{109}$$

が成り立つ．したがって

$$1 \geq \Pr\{X^n \in \mathcal{D}(\boldsymbol{y}) | Y^n = \boldsymbol{y}, Y^n \in \mathcal{T}_n\} \tag{110}$$

$$\overset{(106)}{=} \Pr\left\{ X^n \in \bigcup_m {\varphi_n}^{-1}(m|\boldsymbol{y}) \middle| Y^n = \boldsymbol{y}, Y^n \in \mathcal{T}_n \right\} \tag{111}$$

$$\overset{(105)}{=} \sum_m \Pr\left\{ X^n \in {\varphi_n}^{-1}(m|\boldsymbol{y}) \middle| Y^n = \boldsymbol{y}, Y^n \in \mathcal{T}_n \right\} \tag{112}$$

$$= \sum_m \sum_{\boldsymbol{x} \in {\varphi_n}^{-1}(m|\boldsymbol{y})} \Pr\{X^n = \boldsymbol{x} | Y^n = \boldsymbol{y}, Y^n \in \mathcal{T}_n\} \tag{113}$$

$$\overset{(109)}{\geq} \sum_m \sum_{\boldsymbol{x} \in {\varphi_n}^{-1}(m|\boldsymbol{y})} \Pr\left\{ X^n = \boldsymbol{x} \middle| \hat{X}^n = \psi_n(m, \boldsymbol{y}), Y^n = \boldsymbol{y}, Y^n \in \mathcal{T}_n \right\} e^{-n(R-\gamma)} \tag{114}$$

$$= \sum_m \Pr\left\{ X^n \in {\varphi_n}^{-1}(m|\boldsymbol{y}) \middle| \hat{X}^n = \psi_n(m, \boldsymbol{y}), Y^n = \boldsymbol{y}, Y^n \in \mathcal{T}_n \right\} e^{-n(R-\gamma)} \tag{115}$$

$$\overset{(104)}{\geq} \sum_m e^{-n\gamma} \cdot e^{-n(R-\gamma)} \tag{116}$$

$$= \sum_m e^{-nR} \tag{117}$$

$$= M_n(\boldsymbol{y}) e^{-nR} \tag{118}$$

となる．これは任意の $\boldsymbol{y} \in \mathcal{T}_n$ に対して成り立っている．すなわち，$\boldsymbol{y} \in \mathcal{T}_n$ ならば

$$\frac{1}{n} \log M_n(\boldsymbol{y}) \leq R \tag{119}$$

である．したがって，

$$\Pr\left\{ \frac{1}{n} \log M_n(Y^n) > R \right\} \tag{120}$$

$$= \Pr\left\{ \frac{1}{n} \log M_n(Y^n) > R, Y^n \in \mathcal{T}_n \right\} + \Pr\left\{ \frac{1}{n} \log M_n(Y^n) > R, Y^n \notin \mathcal{T}_n \right\} \tag{121}$$

$$\overset{(119)}{\leq} 0 + \Pr\{Y^n \notin \mathcal{T}_n\} \tag{122}$$

であり，$\mathcal{T}_n$ の定義より $\Pr\{\frac{1}{n} \log M_n(Y^n) > R\} \to 0 \quad (n \to \infty)$ であるといえる．これによりただちに式 (101) は導かれる．

次に式 (100) を導く．$\boldsymbol{y} \in \mathcal{T}_n$ を固定して $\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}(\boldsymbol{y})$ とすると，ある $m \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{y})$ に対して $\boldsymbol{x} \in {\varphi_n}^{-1}(m|\boldsymbol{y})$ となる．したがって $\boldsymbol{x} \in \mathcal{T}_n(\psi_n(m, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{y})$ となる．このとき，$\mathcal{T}_n(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y})$ の定義から，$\boldsymbol{x} \in \mathcal{S}_n(\psi_n(m, \boldsymbol{y}))$ となる．一方，$\varphi_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = m$ なので $\boldsymbol{x} \in \mathcal{S}_n(\psi_n(\varphi_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{y}))$ となる．したがって

$$\begin{aligned} &\Pr\{X^n \in \mathcal{D}(\boldsymbol{y}) | Y^n = \boldsymbol{y}, Y^n \in \mathcal{T}_n\} \\ &\leq \Pr\{X^n \in \mathcal{S}_n(\psi_n(\varphi_n(X^n, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{y})) | Y^n = \boldsymbol{y}, Y^n \in \mathcal{T}_n\} \end{aligned} \tag{123}$$

といえる．一方, 任意の $\hat{\boldsymbol{x}}$ について

$$\Pr\Big\{X^n \in \mathcal{T}_n(\hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y})\Big|\hat{X}^n=\hat{\boldsymbol{x}},Y^n=\boldsymbol{y},Y^n\in\mathcal{T}_n\Big\} \tag{124}$$

$$=\Pr\Big\{X^n \in \mathcal{T}_n(\hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y})\cap\mathcal{D}(\boldsymbol{y})\Big|\hat{X}^n=\hat{\boldsymbol{x}},Y^n=\boldsymbol{y},Y^n\in\mathcal{T}_n\Big\}$$

$$+\Pr\Big\{X^n \in \mathcal{T}_n(\hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y})\setminus\mathcal{D}(\boldsymbol{y})\Big|\hat{X}^n=\hat{\boldsymbol{x}},Y^n=\boldsymbol{y},Y^n\in\mathcal{T}_n\Big\} \tag{125}$$

$$\overset{(109)}{\leq}\Pr\Big\{X^n \in \mathcal{D}(\boldsymbol{y})\Big|\hat{X}^n=\hat{\boldsymbol{x}},Y^n=\boldsymbol{y},Y^n\in\mathcal{T}_n\Big\}+e^{-n\gamma} \tag{126}$$

となるので式 (123) の左辺は

$$\Pr\{X^n\in\mathcal{D}(\boldsymbol{y})|Y^n=\boldsymbol{y},Y^n\in\mathcal{T}_n\} \tag{127}$$

$$=\sum_{\hat{\boldsymbol{x}}}\Pr\Big\{X^n\in\mathcal{D}(\boldsymbol{y}),\hat{X}^n=\hat{\boldsymbol{x}}\Big|Y^n=\boldsymbol{y},Y^n\in\mathcal{T}_n\Big\} \tag{128}$$

$$=\sum_{\hat{\boldsymbol{x}}}\Pr\Big\{\hat{X}^n=\hat{\boldsymbol{x}}\Big|Y^n=\boldsymbol{y},Y^n\in\mathcal{T}_n\Big\}$$

$$\times\Pr\Big\{X^n\in\mathcal{D}(\boldsymbol{y})\Big|\hat{X}^n=\hat{\boldsymbol{x}},Y^n=\boldsymbol{y},Y^n\in\mathcal{T}_n\Big\} \tag{129}$$

$$\overset{(126)}{\geq}\sum_{\hat{\boldsymbol{x}}}\Pr\Big\{\hat{X}^n=\hat{\boldsymbol{x}}\Big|Y^n=\boldsymbol{y},Y^n\in\mathcal{T}_n\Big\}$$

$$\times\Big(\Pr\Big\{X^n\in\mathcal{T}_n(\hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y})\Big|\hat{X}^n=\hat{\boldsymbol{x}},Y^n=\boldsymbol{y},Y^n\in\mathcal{T}_n\Big\}-e^{-n\gamma}\Big) \tag{130}$$

$$=\sum_{\hat{\boldsymbol{x}}}\Pr\Big\{X^n\in\mathcal{T}_n(\hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}),\hat{X}^n=\hat{\boldsymbol{x}}\Big|Y^n=\boldsymbol{y},Y^n\in\mathcal{T}_n\Big\}-e^{-n\gamma} \tag{131}$$

$$=\Pr\Big\{X^n\in\mathcal{T}_n(\hat{X}^n,\boldsymbol{y})\Big|Y^n=\boldsymbol{y},Y^n\in\mathcal{T}_n\Big\}-e^{-n\gamma} \tag{132}$$

となる．したがって式 (123)，(132) より，

$$\Pr\{X^n\in\mathcal{S}_n(\psi_n(\varphi_n(X^n,\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}))|Y^n=\boldsymbol{y},Y^n\in\mathcal{T}_n\}$$

$$\geq\Pr\Big\{X^n\in\mathcal{T}_n(\hat{X}^n,\boldsymbol{y})\Big|Y^n=\boldsymbol{y},Y^n\in\mathcal{T}_n\Big\}-e^{-n\gamma} \tag{133}$$

となる．すなわち，

$$\Pr\{X^n\notin\mathcal{S}_n(\psi_n(\varphi_n(X^n,\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}))|Y^n=\boldsymbol{y},Y^n\in\mathcal{T}_n\}$$

$$\leq\Pr\Big\{X^n\notin\mathcal{T}_n(\hat{X}^n,\boldsymbol{y})\Big|Y^n=\boldsymbol{y},Y^n\in\mathcal{T}_n\Big\}+e^{-n\gamma} \tag{134}$$

である．ゆえに，

$$\Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n(\psi_n(\varphi_n(X^n,Y^n),Y^n))\} \tag{135}$$

$$\Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n(\psi_n(\varphi_n(X^n,Y^n),Y^n)), Y^n \in \mathcal{T}_n\} + \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n(\psi_n(\varphi_n(X^n,Y^n),Y^n)), Y^n \notin \mathcal{T}_n\} \tag{136}$$

$$\leq \sum_{\boldsymbol{y}} \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n(\psi_n(\varphi_n(X^n,\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y})), Y^n = \boldsymbol{y}, Y^n \in \mathcal{T}_n\} + \Pr\{Y^n \notin \mathcal{T}_n\} \tag{137}$$

$$= \sum_{\boldsymbol{y}} \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n(\psi_n(\varphi_n(X^n,\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}))|Y^n = \boldsymbol{y}, Y^n \in \mathcal{T}_n\} \Pr\{Y^n = \boldsymbol{y}, Y^n \in \mathcal{T}_n\} + \Pr\{Y^n \notin \mathcal{T}_n\} \tag{138}$$

$$\overset{(134)}{\leq} \sum_{\boldsymbol{y}} \Big(\Pr\Big\{X^n \notin \mathcal{T}_n(\hat{X}^n,\boldsymbol{y})\Big|Y^n = \boldsymbol{y}, Y^n \in \mathcal{T}_n\Big\} + e^{-n\gamma}\Big) \Pr\{Y^n = \boldsymbol{y}, Y^n \in \mathcal{T}_n\} + \Pr\{Y^n \notin \mathcal{T}_n\} \tag{139}$$

$$= \sum_{\boldsymbol{y}} \Pr\Big\{X^n \notin \mathcal{T}_n(\hat{X}^n,\boldsymbol{y}), Y^n = \boldsymbol{y}, Y^n \in \mathcal{T}_n\Big\} + \Pr\{Y^n = \boldsymbol{y}, Y^n \in \mathcal{T}_n\} e^{-n\gamma} + \Pr\{Y^n \notin \mathcal{T}_n\} \tag{140}$$

$$= \Pr\Big\{X^n \notin \mathcal{T}_n(\hat{X}^n,Y^n), Y^n \in \mathcal{T}_n\Big\} + \Pr\{Y^n \in \mathcal{T}_n\} e^{-n\gamma} + \Pr\{Y^n \notin \mathcal{T}_n\} \tag{141}$$

$$\leq \Pr\Big\{X^n \notin \mathcal{T}_n(\hat{X}^n,Y^n)\Big\} + \Pr\{Y^n \notin \mathcal{T}_n\} + e^{-n\gamma} \tag{142}$$

$$= \Pr\Big\{X^n \notin \mathcal{B}_n(\hat{X}^n,Y^n) \cap \mathcal{S}_n(\hat{X}^n)\Big\} + \Pr\{Y^n \notin \mathcal{T}_n\} + e^{-n\gamma} \tag{143}$$

$$= \Pr\Big\{X^n \notin \mathcal{B}_n(\hat{X}^n,Y^n) \text{ または } X^n \notin \mathcal{S}_n(\hat{X}^n)\Big\} + \Pr\{Y^n \notin \mathcal{T}_n\} + e^{-n\gamma} \tag{144}$$

$$\leq \Pr\Big\{X^n \notin \mathcal{B}_n(\hat{X}^n,Y^n)\Big\} + \Pr\Big\{X^n \notin \mathcal{S}_n(\hat{X}^n)\Big\} + \Pr\{Y^n \notin \mathcal{T}_n\} + e^{-n\gamma} \tag{145}$$

となる．すなわち，

$$\Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n(\psi_n(\varphi_n(X^n,Y^n),Y^n))\} \leq \Pr\Big\{X^n \notin \mathcal{B}_n(\hat{X}^n,Y^n)\Big\} + \Pr\Big\{X^n \notin \mathcal{S}_n(\hat{X}^n)\Big\} + \Pr\{Y^n \notin \mathcal{T}_n\} + e^{-n\gamma} \tag{146}$$

が示された．□

5.2 順定理

本節では，補題 3 で構成した符号を用いて，定理 3 の順定理を示す．

〔定理 3 の順定理の証明〕ある D に対して，

$$R > R_0 \triangleq \inf_{\hat{\boldsymbol{X}}:\overline{D}(\boldsymbol{X},\hat{\boldsymbol{X}})\leq D} \overline{I}(\boldsymbol{X};\hat{\boldsymbol{X}}|\boldsymbol{Y}) \tag{147}$$

なる任意の R を考える．すると，ある $\gamma > 0$ に対して，

$$R - \gamma > \overline{I}(\boldsymbol{X}; \hat{\boldsymbol{X}}|\boldsymbol{Y}), \tag{148}$$

$$\overline{D}(\boldsymbol{X}, \hat{\boldsymbol{X}}) \leq D \tag{149}$$

を満たす $\hat{\boldsymbol{X}}$ が存在する．このとき，$\overline{D}(\boldsymbol{X}, \hat{\boldsymbol{X}})$ の定義より，任意の整数 $k > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n} d_n(X^n, \hat{X}^n) > D + \frac{1}{k}\right\} = 0 \tag{150}$$

である．ゆえに，十分に大きなすべての n で

$$\Pr\left\{\frac{1}{n} d_n(X^n, \hat{X}^n) > D + \frac{1}{k}\right\} \leq \frac{1}{k} \tag{151}$$

を満たし，各 n で最大の k が存在する．したがって，この k に対して，$\gamma_n \triangleq \frac{1}{k}$ とすると，$\gamma_n \to 0 \quad (n \to \infty)$ かつ，

$$\Pr\left\{\frac{1}{n} d_n(X^n, \hat{X}^n) > D + \gamma_n\right\} \leq \gamma_n \tag{152}$$

となる．ゆえに，

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n} d_n(X^n, \hat{X}^n) > D + \gamma_n\right\} = 0 \tag{153}$$

である．つづいて，

$$\mathcal{S}_n(\hat{\boldsymbol{x}}) \triangleq \left\{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n \middle| \frac{1}{n} d_n(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{x}}) \leq D + \gamma_n\right\} \tag{154}$$

とすると，補題 3 より，

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M_n(Y^n) \leq R, \tag{155}$$

$$\begin{aligned}
&\Pr\left\{\frac{1}{n} d_n(X^n, \varphi_n(\psi_n(X^n, Y^n), Y^n)) > D + \gamma_n\right\} \\
&\leq \Pr\left\{\frac{1}{n} \log \frac{P_{X^n|\hat{X}^n Y^n}(X^n|\hat{X}^n, Y^n)}{P_{X^n|Y^n}(X^n|Y^n)} > R - \gamma\right\} + \Pr\left\{\frac{1}{n} d_n(X^n, \hat{X}^n) > D + \gamma_n\right\} \\
&\quad + \Pr\left\{\frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{Y^n}(Y^n)} \geq \overline{H}(\boldsymbol{Y}) + \gamma\right\} + e^{-n\gamma}
\end{aligned} \tag{156}$$

満たす符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する．

ここで，式 (156) の右辺について，式 (148) と $\overline{I}(\boldsymbol{X}; \hat{\boldsymbol{X}}|\boldsymbol{Y})$ の定義により，n を十分大きくすると，第 1 項は 0 に漸近する．また，式 (153) により，n を十分大きくすると，第 2 項も 0

に漸近する．さらに，$\overline{H}(\boldsymbol{Y})$ の定義より，n を十分大きくすると，第 3 項も 0 に漸近する．したがって，

$$\lim_{n\to\infty}\Pr\left\{\frac{1}{n}d_n(X^n,\varphi_n(\psi_n(X^n,Y^n),Y^n))>D+\gamma_n\right\}=0 \tag{157}$$

である．ゆえに，

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}d_n(X^n,\varphi_n(\psi_n(X^n,Y^n),Y^n))-\gamma_n\right)\le D \tag{158}$$

であり，$\gamma_n\to 0\quad(n\to\infty)$ であるので，

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}d_n(X^n,\varphi_n(\psi_n(X^n,Y^n),Y^n))\le D \tag{159}$$

となる．これと (155) により定義 9 は満たされる．つまり，$R>R_0$ とすれば，補助情報源 $\boldsymbol{Y}$ のもとで，(R,D) は確率的に達成可能である．すなわち，

$$\overline{R}(D|\boldsymbol{Y})\le\inf_{\hat{\boldsymbol{X}}:\overline{D}(\boldsymbol{X},\hat{\boldsymbol{X}})\le D}\bar{I}(\boldsymbol{X};\hat{\boldsymbol{X}}|\boldsymbol{Y}) \tag{160}$$

が結論される．□

5.3 逆定理

本節では，定理 3 の逆定理を示す．まず，そのため次の補題を用意する．補題 2 とは内容が異なるが，それと同じく文献 [2] の補題の拡張版である．

補題 4　確率変数列 $\hat{\boldsymbol{X}}$，$\boldsymbol{Y}$ と，$\boldsymbol{y}\in\mathcal{Y}^n$ によって定まる整数 $M_n(\boldsymbol{y})>0$ が存在して，

$$|\{\hat{\boldsymbol{x}}\in\hat{\mathcal{X}}^n|P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{\boldsymbol{x}}|\boldsymbol{y})>0\}|\le M_n(\boldsymbol{y}) \tag{161}$$

を満たすならば，任意の $\gamma>0$ に対して

$$\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{\boldsymbol{x}}|\boldsymbol{y})}>\frac{1}{n}\log M_n(\boldsymbol{y})+\gamma\middle|Y^n=\boldsymbol{y}\right\}\le e^{-n\gamma} \tag{162}$$

が成立する．

〔証明〕

$$\mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})\triangleq\left\{\hat{\boldsymbol{x}}\in\hat{\mathcal{X}}\middle|P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{\boldsymbol{x}}|\boldsymbol{y})>0,\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{\boldsymbol{x}}|\boldsymbol{y})}>\frac{1}{n}\log M_n(\boldsymbol{y})+\gamma\right\} \tag{163}$$

とする．次に，固定した $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^n$ に対してある $\hat{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})$ を考えると，$\mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})$ の定義より $P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{\boldsymbol{x}}|\boldsymbol{y}) < \frac{1}{M_n(\boldsymbol{y})e^{n\gamma}}$ である．ゆえに

$$\Pr\left\{\hat{X}^n \in \mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})\middle|Y^n = \boldsymbol{y}\right\} = \sum_{\hat{\boldsymbol{x}}^n \in \mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})} P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{\boldsymbol{x}}|\boldsymbol{y}) \tag{164}$$

$$< \sum_{\hat{\boldsymbol{x}}^n \in \mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})} \frac{1}{M_n(\boldsymbol{y})e^{n\gamma}} \tag{165}$$

$$= \frac{|\mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})|}{M_n(\boldsymbol{y})e^{n\gamma}} \tag{166}$$

$$\leq e^{-n\gamma} \tag{167}$$

となる．したがって，

$$\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{X}^n|\boldsymbol{y})} > \frac{1}{n}\log M_n(\boldsymbol{y}) + \gamma\middle|Y^n = \boldsymbol{y}\right\} < e^{-n\gamma} \tag{168}$$

がいえる．ゆえに，

$$\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{X}^n|\boldsymbol{y})} > \frac{1}{n}\log M_n(\boldsymbol{y}) + \gamma, Y^n = \boldsymbol{y}\right\} < P_{Y^n}(\boldsymbol{y})e^{-n\gamma} \tag{169}$$

となり，

$$\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{X}^n \mid Y^n)} > \frac{1}{n}\log M_n(Y^n) + \gamma\right\} \tag{170}$$

$$= \sum_{\boldsymbol{y}} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{X}^n \mid \boldsymbol{y})} > \frac{1}{n}\log M_n(\boldsymbol{y}) + \gamma, Y^n = \boldsymbol{y}\right\} \tag{171}$$

$$< \sum_{\boldsymbol{y}} P_{Y^n}(\boldsymbol{y})e^{-n\gamma} \tag{172}$$

$$= e^{-n\gamma} \tag{173}$$

が導かれる．□

続いて，この補題を用いて定理 3 の逆定理を示す．

〔定理 3 の逆定理の証明〕　最初に，補助情報源 $\boldsymbol{Y}$ のもとで (R, D) が確率的に達成可能とする．すなわち，

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} d_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n, Y^n), Y^n)) \leq D \tag{174}$$

$$\text{かつ} \quad \text{p-}\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log M_n(Y^n) \leq R \tag{175}$$

を満たす符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在するとする．

ここで，$\hat{X}^n \triangleq \psi(\varphi(X^n, Y^n), Y^n), \hat{\boldsymbol{X}} = \{\hat{X}^n\}_{n=1}^{\infty}$ とすると，

$$\overline{D}(\boldsymbol{X}, \hat{\boldsymbol{X}}) \leq D \tag{176}$$

が成立する．

次に，式 (176) より，任意の整数 $k > 0$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left\{ \frac{1}{n} \log M_n(Y^n) > R + \frac{1}{k} \right\} = 0 \tag{177}$$

ゆえに，十分大きな全ての n で，

$$\Pr\left\{ \frac{1}{n} \log M_n(Y^n) > R + \frac{1}{k} \right\} \leq \frac{1}{k} \tag{178}$$

ここで，各 n に対して最大の k が存在して，この k について，$\gamma_n \triangleq \frac{1}{k}$ とすると，$\gamma_n \to 0 \quad (n \to \infty)$ かつ，

$$\Pr\left\{ \frac{1}{n} \log M_n(Y^n) > R + \gamma_n \right\} \leq \gamma_n \tag{179}$$

が成り立つ．さらに，$\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^n$ を固定したとき，$\hat{X}^n$ は $M_n(\boldsymbol{y})$ より多くの値をとらない．すなわち，

$$|\{\hat{\boldsymbol{x}} \in \hat{\mathcal{X}} | P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{\boldsymbol{x}}|\boldsymbol{y}) > 0\}| \leq M_n(\boldsymbol{y}) \tag{180}$$

であるので，補題 4 より，任意の $\gamma > 0$ に対して

$$\Pr\left\{ \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{X}^n|Y^n)} > \frac{1}{n} \log M_n(Y^n) + \gamma \right\} < e^{-n\gamma} \tag{181}$$

が成立している．ゆえに，

$$\Pr\left\{ \frac{1}{n} \log M_n(Y^n) \leq R + \gamma_n \text{かつ} \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{X}^n|Y^n)} > \frac{1}{n} \log M_n(Y^n) + \gamma \right\} \tag{182}$$

$$\leq \Pr\left\{ \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{X}^n|Y^n)} > \frac{1}{n} \log M_n(Y^n) + \gamma \right\} \tag{183}$$

$$< e^{-n\gamma} \tag{184}$$

が成り立つ．また，

$$\Pr\left\{ \frac{1}{n} \log M_n(Y^n) \leq R + \gamma_n \text{かつ} \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{X}^n|Y^n)} > R + \gamma + \gamma_n \right\}$$

$$\leq \Pr\left\{ \frac{1}{n} \log M_n(Y^n) \leq R + \gamma_n \text{かつ} \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{X}^n|Y^n)} > \frac{1}{n} \log M_n(Y^n) + \gamma \right\} \tag{185}$$

より，

$$\Pr\left\{\frac{1}{n}\log M_n(Y^n) \le R+\gamma_n \text{かつ} \frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{X}^n|Y^n)} > R+\gamma+\gamma_n\right\} < e^{-n\gamma} \quad (186)$$

となる．したがって，

$$\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{X}^n|Y^n)} > R+\gamma+\gamma_n\right\} \quad (187)$$

$$< e^{-n\gamma}$$

$$+\Pr\left\{\frac{1}{n}\log M_n(Y^n) > R+\gamma_n \text{かつ} \frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{X}^n|Y^n)} > R+\gamma+\gamma_n\right\} \quad (188)$$

$$\le e^{-n\gamma}+\Pr\left\{\frac{1}{n}\log M_n(Y^n) > R+\gamma_n\right\} \quad (189)$$

$$\overset{(179)}{\le} e^{-n\gamma}+\gamma_n \quad (190)$$

が成り立つ．加えて，$P_{\hat{X}^n|X^nY^n}(\hat{\boldsymbol{x}}|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \le 1$ より，

$$\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{P_{\hat{X}^n|X^nY^n}(\hat{X}^n|X^n,Y^n)}{P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{X}^n|Y^n)} > R+\gamma+\gamma_n\right\} < e^{-n\gamma}+\gamma_n \quad (191)$$

となる．

したがって，$\gamma_n \to 0 \quad (n\to\infty)$ により，

$$\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{P_{\hat{X}^n|X^nY^n}(\hat{X}^n|X^n,Y^n)}{P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{X}^n|Y^n)} > R+\gamma+\gamma_n\right\} \to 0 \quad (n\to\infty) \quad (192)$$

がいえる．これは，

$$\text{p-}\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\log\frac{P_{\hat{X}^n|X^nY^n}(\hat{X}^n|X^n,Y^n)}{P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{X}^n|Y^n)}-\gamma_n\right) \le R+\gamma \quad (193)$$

を意味する．ここで γ は任意かつ $\gamma_n \to 0 \quad (n\to\infty)$ より，

$$\overline{I}(\boldsymbol{X};\hat{\boldsymbol{X}}|\boldsymbol{Y}) = \text{p-}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{P_{\hat{X}^n|X^nY^n}(\hat{X}^n|X^n,Y^n)}{P_{\hat{X}^n|Y^n}(\hat{X}^n|Y^n)} \le R \quad (194)$$

がいえる．これと，式 (176) により，

$$\overline{R}(D|\boldsymbol{Y}) \ge \inf_{\hat{\boldsymbol{X}}:\overline{D}(\boldsymbol{X},\hat{\boldsymbol{X}})\le D}\bar{I}(\boldsymbol{X};\hat{\boldsymbol{X}}|\boldsymbol{Y}) \quad (195)$$

を得る．□

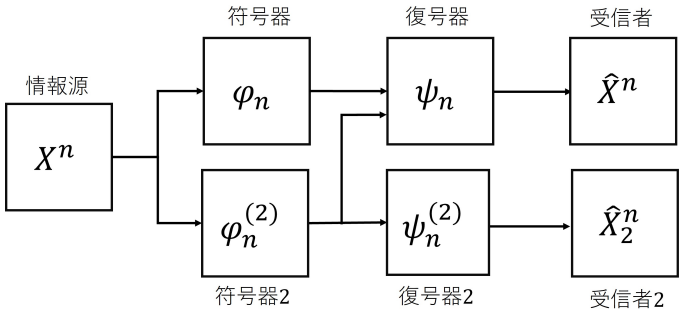

図 3　スケーラブル符号化の通信モデル

6　まとめ

本論文では，一般情報源を補助情報源を伴って符号化する通信モデルのレート歪み達成可能性について調べた．まず，ランダム符号化を用いない方法で，任意の補助情報源出力 $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^n$ に対して符号化レートが R 以下となる，すなわち (R, D) が達成可能となるような符号のレートの下限を調べた．その結果は，情報源が定常無記憶である場合に知られている結果 [1],[8] と同様に，定理 1 に示した 1 対 1 通信におけるレート歪み関数と対応しているといえる．この問題に引き続き，符号器が補助情報源 Y^n を観測できない場合の問題 (Wyner-Ziv 符号化問題) もランダム符号化を用いない方法で解決することが今後の課題である．さらに，補助情報源の出力 Y^n ごとで符号化レートを変化してもよい場合は，条件の緩和により，(R, D) が確率的に達成可能となるような符号のレートの下限は (R, D) が達成可能となるような符号のレートの下限より小さくなることが予想されたが，それぞれのレートの下限は同じであることが確認できた．今後は，この結果を応用することにより，様々な問題にとって都合の良い符号を作れるかもしれない．例えば，歪みを許容しない補助情報源を伴う情報源符号化問題や，Wyner-Ziv 符号化問題においても確率的上極限を用いたレートの評価を導入した場合の符号化レートの下限について調べることは，今後の研究課題である．

それとはまた別に，補助情報源 Y^n を別の受信者 $\hat{X}_2^n$ に向けた新たな符号器 $\varphi_n^{(2)} : \mathcal{X}^n \to \mathcal{M}_n^{(2)}$ を用いて $Y^n \triangleq \varphi_n^{(2)}(X^n)$ と解釈することにより，図 3 のモデルに表されるようなスケーラブル符号化の問題に拡張できる．しかしその場合の達成可能なレートは，文献 [4],[6] により分布 $P_{\hat{X}_2^n}$ にも依存することが示されている．本論文の結論がランダム符号化を用いないスケーラブル符号化のレート歪み理論の証明とどのように関係してるのかについては検討の余地がある．

謝辞

本研究を進めるにあたり，丁寧なご指導を頂いた西新幹彦准教授に感謝の意を表する．

参考文献

[1] 大濱靖匡，「多端子情報源符号化の研究と未解決問題」，Fundamentals Review，Vol.2，No.2，pp40-52，Oct. 2008.

[2] 韓太舜, 情報理論における情報スペクトル的方法, 培風館, 1998.

[3] 米沢英昭，植松友彦，松本隆太郎，「副情報源を伴う一般情報源に対する情報源符号化定理」，第 25 回情報理論とその応用シンポジウム（SITA2002），pp263-266，2002.

[4] Abbas El Gamal, Young-Han Kim, Network Information Theory, Cambridge University Press, San Diego, 2011.

[5] Ken-ichi Iwata, Jun Muramatsu, “An Information-Spectrum Approach to Rate-Distortion Function with Side Information,” IEICE Trans. Fundamentals, Vol.E8-A, no.6, 2002.

[6] Tetsunao Matsuta, Tomohiko Uyematsu, “Non-Asymptotic Bounds and a General Formula forthe Rate-Distortion Region of the Successive Refinement Problem,” IEICE Trans. Fundamentals, vol.E101-A, no12.3, pp.2110-2125, 2018.

[7] Mikihiko Nishiara, Yuki Ito, “Proof of Achievability Part of Rate-Distortion Theorem without Random Coding,” IEICE Trans. Fundamentals, vol.E107-A, no.3, pp.404-408, 2024.

[8] Aaron D. Wyner, Jacob Ziv, “The Rate-Distortion Function for Source Coding with Side Information at the Decoder,” IEEE Trans. Information Theory, Vol.IT-22, No.1, Jan. 1976.

付録 A　符号器が補助情報源を観測しない場合の歪みを許容しない情報源符号化問題

本章では図 2 に示した通信モデルにおいて歪みを許容しない場合には，符号化レートをどこまで小さくできるかを議論する．

最初に，問題の定式化を行う．本章では情報源をできるだけ誤りなく復号できるような符号化を考えたい．そこで，情報源アルファベット $\mathcal{X}^n$ と復号アルファベット $\hat{\mathcal{X}}^n$ が同一であるとし，符号器 φ_n を $\varphi_n : \mathcal{X}^n \to \mathcal{M}_n$，復号器 ψ_n を $\psi_n : \mathcal{M}_n \times \mathcal{Y}^n \to \mathcal{X}^n$ と定義する．さらに，誤りを調べるために，以下の尺度を定義する．

定義 12

$$\varepsilon_n \triangleq \Pr\{X^n \neq \psi_n(\varphi_n(X^n), Y^n)\} \tag{196}$$

と定義し，ε_n を誤り確率と呼ぶ．

次に，符号を制約する規範を次のように定める．

定義 13　補助情報源 $\boldsymbol{Y}$ のもとで R が達成可能であるとは

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0 \tag{197}$$

$$\text{かつ} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M_n \leq R \tag{198}$$

を満たす符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在することである．ただし，M_n は符号語数である．

定義 14

$$R_f(\boldsymbol{Y}) \triangleq \inf\{R|\ \text{補助情報源}\ \boldsymbol{Y}\ \text{のもとで}\ R\ \text{が達成可能}\ \} \tag{199}$$

と定義し，$R_f(\boldsymbol{Y})$ を最小許容固定長符号化レートとよぶ．

すると $R_f(\boldsymbol{Y})$ は次のように表すことができる．

定理 4

補助情報源を伴う場合の最小許容固定長符号化レート $R_f(\boldsymbol{Y})$ は

$$R_f(\boldsymbol{Y}) = \overline{H}(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y}) \tag{200}$$

で表される．

なお，定理 4 は補助情報源 Y^n を符号器 φ_n が観測できない場合のレートの下限であるが，補助情報源を補助情報源 Y^n を符号器 φ_n が観測できる場合のレートの下限も同じである [3]．これに対して，歪みを許容する場合の問題では，定理 2 と文献 [5] を比較すると，補助情報源 Y^n を符号器 φ_n が観測するかどうかでレートの下限が異なる点に注意されたい．

続いて，定理 4 の順定理を導く．なお，定理 4 の逆定理の証明は文献 [3] と同じであるため，本稿では省略する．

〔定理 4 の順定理の証明〕まず，任意の $R > \overline{H}(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y})$ を考える．すると，ある $\gamma > 0$ が存在して，$R > \overline{H}(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y}) + \gamma$ を満たす．符号語数を $M_n \triangleq e^{nR}$ とすると，式 (198) を満たす．

次に，固定した $\boldsymbol{y}$ に対して，

$$\mathcal{T}_n(\boldsymbol{y}) \triangleq \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n \middle| \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n|Y^n}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})} \leq \frac{1}{n} \log M_n - \gamma \right\} \tag{201}$$

とする．

さらに，ランダム符号器 $\overline{\varphi}_n : \mathcal{X}^n \to \mathcal{M}_n$ は，各 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n$ に対して，$m \in \mathcal{M}_n$ を等確率に発生させ，$\overline{\varphi}_n(\boldsymbol{x}) = m$ とする．(Random binning)

また，ランダム復号器 $\overline{\psi}_n : \mathcal{M}_n \times \mathcal{Y}^n \to \mathcal{X}_n$ を次のように定める．ある $(m, \boldsymbol{y})$ の組に対して，$\boldsymbol{x} \in \mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})$ が唯一であれば，$\overline{\psi}_n(m, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}$ とする．そうでない場合は $\overline{\psi}_n(m, \boldsymbol{y})$ は $\mathcal{X}^n$ の任意に定められた要素とする．

したがって，$\boldsymbol{y}$ を固定したとき，$\boldsymbol{x} \in \mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})$ かつ，$\overline{\varphi}_n(\boldsymbol{x}') = \overline{\varphi}_n(\boldsymbol{x})$ なる任意の $\boldsymbol{x}' \neq \boldsymbol{x}$ に対して $\boldsymbol{x}' \notin \mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})$ であれば，$\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^n$ は正しく復号される．

ゆえに，$X^n = \boldsymbol{x}, Y^n = \boldsymbol{y}$ のときの，ランダム符号の誤り確率を $\overline{\varepsilon}_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \triangleq \Pr\{\boldsymbol{x} \neq \overline{\psi}_n(\overline{\varphi}_n(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y})\}$ とすると，

$$\begin{aligned}
&\overline{\varepsilon}_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) && (202)\\
&\leq \Pr\{\boldsymbol{x} \notin \mathcal{T}_n(\boldsymbol{y}) \text{ またはある } \boldsymbol{x}' \neq \boldsymbol{x} \text{ に対して} \overline{\varphi}_n(\boldsymbol{x}') = \overline{\varphi}_n(\boldsymbol{x}) \text{ かつ } \boldsymbol{x}' \in \mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})\} && (203)\\
&\leq \Pr\{\boldsymbol{x} \notin \mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})\} + \Pr\{ \text{ある } \boldsymbol{x}' \neq \boldsymbol{x} \text{ に対して} \overline{\varphi}_n(\boldsymbol{x}') = \overline{\varphi}_n(\boldsymbol{x}) \text{ かつ } \boldsymbol{x}' \in \mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})\} && (204)\\
&= \mathbb{1}\{\boldsymbol{x} \notin \mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})\} + \Pr\{ \text{ある } \boldsymbol{x}' \neq \boldsymbol{x} \text{ に対して} \overline{\varphi}_n(\boldsymbol{x}') = \overline{\varphi}_n(\boldsymbol{x}) \text{ かつ } \boldsymbol{x}' \in \mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})\} && (205)
\end{aligned}$$

がいえる．ここで，第 2 項について，

$$\begin{aligned}
&\Pr\{ \text{ある } \boldsymbol{x}' \neq \boldsymbol{x} \text{ に対して} \overline{\varphi}_n(\boldsymbol{x}') = \overline{\varphi}_n(\boldsymbol{x}) \text{ かつ } \boldsymbol{x}' \in \mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})\} && (206)\\
=&\Pr\{\boldsymbol{x}' \neq \boldsymbol{x} \text{ となるようなある } \boldsymbol{x}' \in \mathcal{T}_n(\boldsymbol{y}) \text{ が存在して} \overline{\varphi}_n(\boldsymbol{x}') = \overline{\varphi}_n(\boldsymbol{x})\} && (207)\\
\leq& \sum_{\boldsymbol{x}' \in \mathcal{T}_n : \boldsymbol{x}' \neq \boldsymbol{x}} \Pr\{\overline{\varphi}_n(\boldsymbol{x}') = \overline{\varphi}_n(\boldsymbol{x})\} && (208)\\
=& \sum_{\boldsymbol{x}' \in \mathcal{T}_n : \boldsymbol{x}' \neq \boldsymbol{x}} \frac{1}{M_n} && (209)\\
\leq& \frac{|\mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})|}{M_n} && (210)
\end{aligned}$$

となる．次に，固定した $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^n$ に対して $\boldsymbol{x} \in \mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})$ であれば，$\mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})$ の定義より，

$$P_{X^n|Y^n}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) \geq \frac{1}{M_n e^{-n\gamma}} \tag{211}$$

が成り立つので，

$$1 \geq P_{X^n|Y^n}(\mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})|\boldsymbol{y}) \tag{212}$$
$$= \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})} P_{X^n|Y^n}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) \tag{213}$$
$$\overset{(211)}{\geq} \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})} \frac{1}{M_n e^{-n\gamma}} \tag{214}$$
$$= \frac{|\mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})|}{M_n e^{-n\gamma}} \tag{215}$$

が成り立つ．すなわち，

$$|\mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})| \leq M_n e^{-n\gamma} \tag{216}$$

がいえる．したがって，

$$\bar{\varepsilon}_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \overset{(210)}{\leq} \mathbb{1}\{\boldsymbol{x} \notin \mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})\} + \frac{|\mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})|}{M_n} \tag{217}$$
$$\leq \mathbb{1}\{\boldsymbol{x} \notin \mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})\} + e^{-n\gamma} \tag{218}$$

となる．続いて，$\bar{\varepsilon}_n(\boldsymbol{x}) \triangleq \mathbb{E}[\bar{\varepsilon}_n(\boldsymbol{x}, Y^n)|X^n = \boldsymbol{x}]$ とすると，

$$\bar{\varepsilon}_n(\boldsymbol{x}) \overset{(218)}{\leq} \sum_{\boldsymbol{y}} P_{Y^n|X^n}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})(\mathbb{1}\{\boldsymbol{x} \notin \mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})\} + e^{-n\gamma}) \tag{219}$$
$$= \sum_{\boldsymbol{y}} \frac{P_{X^nY^n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathbb{1}\{\boldsymbol{x} \notin \mathcal{T}_n(\boldsymbol{y})\}}{P_{X^n}(\boldsymbol{x})} + e^{-n\gamma} \tag{220}$$
$$= \sum_{\boldsymbol{y}} \frac{\Pr\{X^n = \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \notin \mathcal{T}_n(\boldsymbol{y}), Y^n = \boldsymbol{y}\}}{P_{X^n}(\boldsymbol{x})} + e^{-n\gamma} \tag{221}$$
$$= \Pr\{\boldsymbol{x} \notin \mathcal{T}_n(Y^n)|X^n = \boldsymbol{x}\} + e^{-n\gamma} \tag{222}$$

となる．さらに，$\bar{\varepsilon}_n \triangleq \mathbb{E}[\bar{\varepsilon}_n(X^n, Y^n)]$ とすると，

$$\bar{\varepsilon}_n = \mathbb{E}[\bar{\varepsilon}_n(X^n)] \tag{223}$$
$$\overset{(222)}{\leq} \sum_{\boldsymbol{x}} P_{X^n}(\boldsymbol{x})(\Pr\{\boldsymbol{x} \notin \mathcal{T}_n(Y^n)|X^n = \boldsymbol{x}\} + e^{-n\gamma}) \tag{224}$$
$$= \Pr\{X^n \notin \mathcal{T}_n(Y^n)\} + e^{-n\gamma} \tag{225}$$
$$= \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n|Y^n}(X^n|Y^n)} > \frac{1}{n}\log M_n - \gamma\right\} + e^{-n\gamma} \tag{226}$$
$$= \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n|Y^n}(X^n|Y^n)} > R - \gamma\right\} + e^{-n\gamma} \tag{227}$$

がいえ，$R-\gamma > \overline{H}(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y})$ と $\overline{H}(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y})$ の定義より，n を十分大きくすると，右辺は 0 に漸近する．ここで，誤り確率 ε_n が $\varepsilon_n \leq \bar{\varepsilon}_n$ となるような符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在することに注意すると，

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0 \tag{228}$$

を満たす符号の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在しているといえる．

以上により，$R > \overline{H}(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y})$ とすれば，補助情報源 $\boldsymbol{Y}$ のもとで R は達成可能である．□