信州大学工学部

学士論文

各種雑音に対する位相変調の通信路容量について

指導教員　西新 幹彦 准教授

学科　電子情報システム工学科
学籍番号　20T2141E
氏名　堀 達裕

2024 年 04 月 26 日

目次

1 はじめに

現代において, 通信技術は日常生活のあらゆる場面で使用されている. そのため, 通信技術の発展は社会に大きな利益をもたらす. 特に, 情報の確実な伝達が求められる現代において, 通信の信頼性の向上は重要となっている. このような要求に応えるために, 情報理論では, 物理通信を数学的に解析することによって問題解決を目指している. 言い換えると, 実装された通信環境を数式でモデル化することによって, 研究を行なう.

通信システムのモデル化の代表的な例として, AWGN 通信路が挙げられる. この通信路モデルは, 無線通信にて発生する雑音を, 確率を用いることによってモデル化する. この雑音はガウス分布に従って発生し, 入力信号に加算されるという特徴がある. AWGN 通信路は, 通信システムの性能解析や設計において, 雑音の影響を評価するために広く利用されている.

さらに, 通信システムの性能評価を理論的に行なうための概念として, 通信路容量がある. 通信路容量とは, 通信路にて確実に伝送できる情報の量の上限である. この量を求めることで, モデル化した通信路の伝送能力や雑音への耐性を理論的に評価することが可能になる.

このような背景を踏まえて, 本研究では, 無線通信の技術の一つである位相変調に着目して研究を行なった. 位相変調とは, 信号の位相を変化させて情報を伝送する技術である. この通信技術を, AWGN 通信路を参考にモデル化し, 通信路容量を算出する. 通信路容量は雑音の種類に応じて変化するため, 複数の雑音を考慮して通信路容量を求める. このようにして, 通信路容量と雑音の関係を理論的に示すことが本研究の目的である.

本論文では, 2 章で通信路容量の定義をし, 3 章で通信路容量を求めるための具体的な方法を示す. 4 章では, 雑音の分布関数を位相変調に適用するための方法を示す. これらの方法を用いて, 5 章, 6 章, 7 章では雑音の種類に応じて通信路容量を求め, 最後に 8 章で本論文をまとめる.

2 通信路容量

本研究では連続アルファベットを持つ通信路に対する通信路容量について考察する. 本章ではその準備として, 通信路と通信路容量の数学的表現について確認する.

入力アルファベットを $\mathcal{X}$, 出力アルファベットを $\mathcal{Y}$ とし, それぞれの要素を表す確率変数を X と Y とする. この X を入力, Y を出力とする通信路は, 条件付き確率

$$W(y|x) \triangleq \Pr\{\,Y = y \,|\, X = x\,\} \tag{1}$$

によって表される. ただし, 入力と出力は $-\pi$ から π の連続値とする. また, 入力系列 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が与えられたとき出力系列 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ の出現する条件付き確

率を,

$$W^n(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) \;=\; \prod_{i=1}^{n} W(y_i|x_i) \tag{2}$$

と表す.

送信者が送る M_n 個のメッセージの集合を $\mathcal{M}_n=\{\,1,2,\cdots,M_n\,\}$ としたとき, 符号器を $\varphi_n:\mathcal{M}_n\to\mathcal{X}^n$ とし, 復号器を $\psi_n:\mathcal{Y}^n\to\mathcal{M}_n$ とする. ここで, $\varphi_n(m)$ を $m\in\mathcal{M}_n$ の符号語という. この符号の, 符号化レート R は,

$$R \;\triangleq\; \frac{1}{n}\log M_n \tag{3}$$

と定義される. ただし, log の底は e である. また, 復号誤り確率は,

$$\varepsilon_n \;\triangleq\; \frac{1}{M_n}\sum_{m\in\mathcal{M}_n} W^n(\psi_n^{-1}(m)^c|\varphi_n(m)) \tag{4}$$

と定義する.

符号化レート R が達成可能とは,

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n \;=\; 0 \tag{5}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log M_n \geq R \tag{6}$$

を満たす, 符号 (φ_n,ψ_n) が存在することである. 通信路容量 $C(W)$ を,

$$C(W) \;\triangleq\; \sup\{R\,|\,R\text{ が達成可能 }\} \tag{7}$$

と定義する.

通信路容量を数学的に表現するために以下の量を定義する [1]. 確率密度関数 $f_X(x)$ をもつ確率変数 X の微分エントロピー $h(X)$ を,

$$h(X) \;\triangleq\; -\int_x f_X(x)\log\, f_X(x)dx \tag{8}$$

と定義する. また, 確率変数 X, Y が同時確率密度関数 $f_{XY}(x,y)$ をもつとき, 条件付き微分エントロピー $h(Y|X)$ を,

$$h(Y|X) \;=\; -\iint_{x,y} f_{XY}(x,y)\log\, f_{Y|X}(y|x)dxdy \tag{9}$$

と定義する. さらに, X と Y の間の相互情報量 $I(X;Y)$ を,

$$I(X;Y) \;\triangleq\; \iint_{x,y} f_{XY}(x,y)\log\frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)f_Y(y)}dxdy \tag{10}$$

と定義する．この定義より，

$$I(X;Y) \;=\; h(Y) \;-\; h(Y|X) \tag{11}$$

が成り立つ．

以上の定義のもとで，通信路容量は，通信路符号化定理により，

$$C(W) \;=\; \max_{X} I(X;Y) \tag{12}$$

で与えられる [2]．本論文のテーマは，与えられた通信路に対してこの右辺を計算することである．

3　雑音と通信路容量

本章では，本論文で扱う通信路に共通する特徴を設定する．まず，本論文で扱う通信路モデルを図 1 に示す．N は雑音を表す確率変数とし，入力 X と雑音 N は独立であると仮定する．このとき，出力 Y は入力 X と雑音 N の和とする．これより，式 (11) を展開すると，

$$\begin{aligned} I(X;Y) \;&=\; h(Y) \;-\; h(X+N|X) \qquad (13)\\ &=\; h(Y) \;-\; h(N|X) \qquad (14)\\ &=\; h(Y) \;-\; h(N) \qquad (15) \end{aligned}$$

が成り立つ．

よって，式 (12) は，

$$C(W) \;=\; \max_{X}(h(Y) - h(N)) \tag{16}$$

と変形することが可能である．

式 (16) より，通信路容量は，出力の微分エントロピーと雑音の微分エントロピーの差の最大値であるということが明らかになった．ただし，X と N は独立であるため，X に関わらず

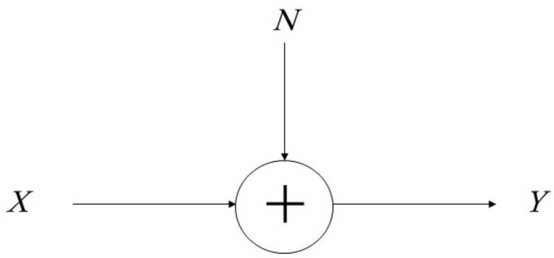


図 1: 通信路モデル

$h(N)$ は一定である．つまり, $h(Y)$ が最大になるときのエントロピーの差が通信路容量である．$h(Y)$ が最大になるのは, X が一様分布である場合である．これについては, 付録 A にて証明をする．ゆえに, 入力 X として一様分布を用いることにより, 式 (16) は,

$$C(W) = h(Y) - h(N) \tag{17}$$

となる．ここで, 位相変調の一様分布の確率密度関数は,

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\,,\ -\pi \leq x \leq \pi \tag{18}$$

である．従って, 一様分布の微分エントロピーは,

$$\begin{aligned} h(Y) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \log 2\pi dx && (19) \\ &= \log 2\pi && (20) \end{aligned}$$

で与えられ, 式 (17) は,

$$C(W) = \log 2\pi - h(N) \tag{21}$$

となる．以上より, 本論文で考える通信路容量は, 雑音の微分エントロピーを求めることによって算出出来ることが分かる．

4 雑音の適用方法

本章では, 雑音の密度関数を位相変調の通信に適用するための方法を示す．本論文の通信路は, 入力と出力が $-\pi$ から π の連続値を取るので, 雑音の密度関数の定義域も, $-\pi \leq x \leq \pi$ でなければならない．そこで, 定義域が実数全体である分布関数を, $-\pi \leq x \leq \pi$ に収めるための二種類の方法を導入する．

まず, 一つ目の方法は, 密度関数の $-\pi \leq x \leq \pi$ 以外の部分を切り捨てる方法である．密度関数を単位円一周内に収めるために, 対象の範囲外の部分は 0 とすることで, 切り捨てる．また, 切り捨てを行なった後の密度関数は, 正規化を行なう．式に表すと,

$$\bar{f}_N(x) \triangleq \frac{f_N(x)}{\int_{-\pi}^{\pi} f_N(x)dx}\,, -\pi \leq x \leq \pi \tag{22}$$

となる．

もう一つの方法は, $-\pi \leq x \leq \pi$ 以外の部分を巻き付ける方法である．具体的には, 範囲外の部分を 2π ごとに区切り, その区切った部分を n 周目の円周とする．そして, 2π ごとに区切られた部分を総和記号でまとめることによって, 巻き付ける．式に表すと,

$$\mathring{f}_N(x) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_N(x + 2n\pi) \tag{23}$$

となる．ただし, n は整数である．

このような二種類の方法を用いて, 雑音の密度関数の定義域を $-\pi \leq x \leq \pi$ に収める．

5 ラプラス分布

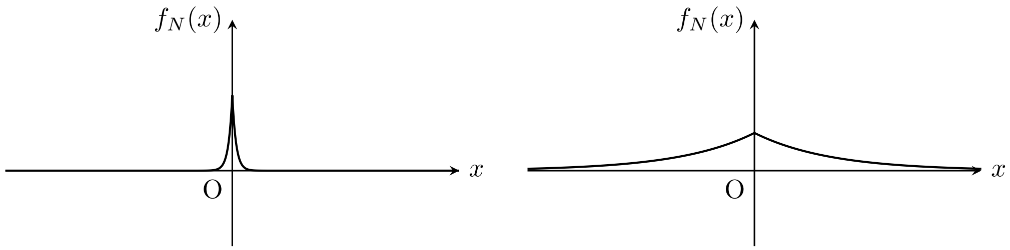
本章では, 雑音がラプラス分布に従う場合の通信路容量を算出する．ラプラス分布とは,

$$f_N(x) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x-\mu|}{\sigma}} \tag{24}$$

という密度関数を持つ確率分布である [3]．この分布の期待値は μ, 分散は $2\sigma^2$ であり, $\sigma > 0$ である．本章では, $\mu = 0$ とする．σ の値を変化させたときのグラフの比較を図 2 に示す．

まず, ラプラス分布に切り捨ての方法を適用して通信路容量を求める．このときの雑音の密度関数は,

$$\bar{f}_N(x) = \frac{e^{-\frac{|x|}{\sigma}}}{2\sigma(1 - e^{-\frac{\pi}{\sigma}})} \tag{25}$$



(a) $\sigma = 0.05$ のラプラス分布

(b) $\sigma = 1$ のラプラス分布

図 2: ラプラス分布の比較

である．雑音の微分エントロピー $h(N)$ は,

$$
\begin{aligned}
h(N) &= -\int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}_N(x)\log \bar{f}_N(x)dx && (26)\\
&= -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-\frac{|x|}{\sigma}}}{2\sigma(1-e^{-\frac{\pi}{\sigma}})}\log \frac{e^{-\frac{|x|}{\sigma}}}{2\sigma(1-e^{-\frac{\pi}{\sigma}})}dx && (27)\\
&= -2\int_{0}^{\pi} \frac{e^{-\frac{x}{\sigma}}}{2\sigma(1-e^{-\frac{\pi}{\sigma}})}(\log e^{-\frac{x}{\sigma}} - \log 2\sigma(1-e^{-\frac{\pi}{\sigma}}))dx && (28)\\
&= \frac{1}{\sigma(1-e^{-\frac{\pi}{\sigma}})}\int_{0}^{\pi} e^{-\frac{x}{\sigma}}(\log 2\sigma(1-e^{-\frac{\pi}{\sigma}}) - \log e^{-\frac{x}{\sigma}})dx && (29)\\
&= -\frac{\log 2\sigma(1-e^{-\frac{\pi}{\sigma}})}{(1-e^{-\frac{\pi}{\sigma}})}\left[e^{-\frac{x}{\sigma}}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{\sigma(1-e^{-\frac{\pi}{\sigma}})}\int_{0}^{\pi} e^{-\frac{x}{\sigma}}(-\frac{x}{\sigma})dx && (30)\\
&= \log 2\sigma(1-e^{-\frac{\pi}{\sigma}}) + \frac{1}{\sigma^2(1-e^{-\frac{\pi}{\sigma}})}\int_{0}^{\pi} xe^{-\frac{x}{\sigma}}dx && (31)\\
&= \log 2\sigma(1-e^{-\frac{\pi}{\sigma}}) - \frac{1}{\sigma(1-e^{-\frac{\pi}{\sigma}})}\left[xe^{-\frac{x}{\sigma}}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\sigma(1-e^{-\frac{\pi}{\sigma}})}\int_{0}^{\pi} e^{-\frac{x}{\sigma}}dx && (32)\\
&= \log 2\sigma(1-e^{-\frac{\pi}{\sigma}}) - \frac{\pi e^{-\frac{\pi}{\sigma}}}{\sigma(1-e^{-\frac{\pi}{\sigma}})} - \frac{1}{(1-e^{-\frac{\pi}{\sigma}})}\left[e^{-\frac{x}{\sigma}}\right]_0^{\pi} && (33)\\
&= \log 2\sigma(1-e^{-\frac{\pi}{\sigma}}) - \frac{\pi e^{-\frac{\pi}{\sigma}}}{\sigma(1-e^{-\frac{\pi}{\sigma}})} + 1 && (34)
\end{aligned}
$$

となる．この結果より, 通信路容量は,

$$
\begin{aligned}
C(W) &= \log 2\pi - \log 2\sigma(1-e^{-\frac{\pi}{\sigma}}) + \frac{\pi e^{-\frac{\pi}{\sigma}}}{\sigma(1-e^{-\frac{\pi}{\sigma}})} - 1 && (35)\\
&= \log \frac{\pi}{\sigma(1-e^{-\frac{\pi}{\sigma}})} + \frac{\pi e^{-\frac{\pi}{\sigma}}}{\sigma(1-e^{-\frac{\pi}{\sigma}})} - 1 && (36)
\end{aligned}
$$

となる．このグラフを図 3 に示す.

図 3 では, σ の値が増加すると, 雑音は大きくなる．確かに, σ の値が増加するにつれて通信路容量は単調減少していき, 漸近的に 0 に近づいていることが確認できる．一方, σ の値が減少すると, 通信路容量は増加していき, $\sigma = 0$ 付近で無限大に発散している．このことから, 雑音が大きくなると通信路容量は減少することがわかる.

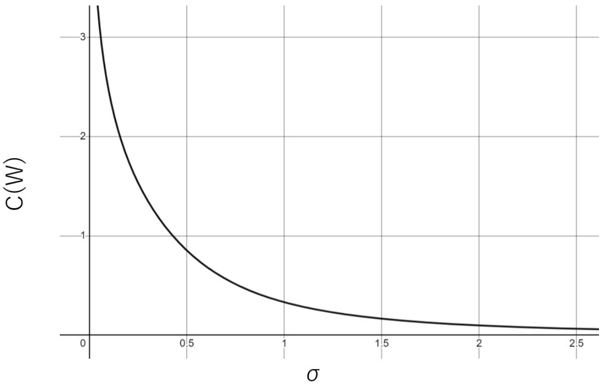


図 3: ラプラス分布に切り捨てをしたときの通信路容量

次に, ラプラス分布に巻き付けの方法を適用して通信路容量を求める. このときの雑音の分布関数は,

$$\begin{aligned}
\mathring{f}_N(x) &= f_N(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_N(x+2n\pi) + \sum_{n=1}^{\infty} f_N(x-2n\pi) && (37)\\
&= \frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sigma}e^{\frac{-(x+2n\pi)}{\sigma}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sigma}e^{\frac{x-2n\pi}{\sigma}} && (38)\\
&= \frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}} + \frac{e^{\frac{-x}{\sigma}}}{2\sigma(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1)} + \frac{e^{\frac{x}{\sigma}}}{2\sigma(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1)} && (39)\\
&= \frac{e^{\frac{-x}{\sigma}}+e^{\frac{x}{\sigma}}}{2\sigma(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1)} + \frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}} && (40)
\end{aligned}$$

である. この雑音のエントロピーは,

$$\begin{aligned}
h(N) &= -\int_{-\pi}^{\pi} \mathring{f}_N(x)\log \mathring{f}_N(x)\,dx && (41)\\
&= -\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{e^{-\frac{x}{\sigma}}+e^{\frac{x}{\sigma}}}{2\sigma(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1)}+\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}\right)\log\left(\frac{e^{-\frac{x}{\sigma}}+e^{\frac{x}{\sigma}}}{2\sigma(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1)}+\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}\right)dx && (42)\\
&= \frac{(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1)\log(2\sigma e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-2\sigma)+(1-e^{\frac{2\pi}{\sigma}})\log(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}+1)-4e^{\frac{\pi}{\sigma}}\arctan(e^{\frac{\pi}{\sigma}})}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1}\\
&\quad + \frac{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}+\pi e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1} && (43)
\end{aligned}$$

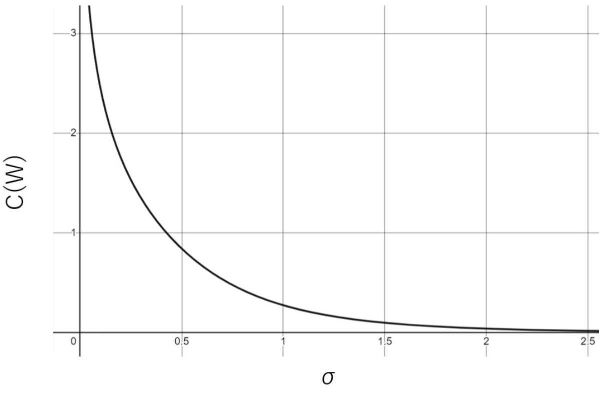


図 4: ラプラス分布に巻き付けをしたときの通信路容量

となる．この途中式は付録 B に記載する．これより, 通信路容量は,

$$
\begin{aligned}
C(W) &= \log 2\pi - \frac{(e^{\frac{2\pi}{\sigma}} - 1)\log(2\sigma e^{\frac{2\pi}{\sigma}} - 2\sigma) + (1 - e^{\frac{2\pi}{\sigma}})\log(e^{\frac{2\pi}{\sigma}} + 1)}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}} - 1} \\
&\quad - \frac{-4e^{\frac{\pi}{\sigma}}\arctan(e^{\frac{\pi}{\sigma}}) + e^{\frac{2\pi}{\sigma}} + \pi e^{\frac{\pi}{\sigma}} - 1}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}} - 1}
\end{aligned} \tag{44}
$$

となる．このグラフを図 4 に示す．

図 3 と同様に, 横軸を σ にして通信路容量の変化の様子をグラフにした．比較すると, 通信路容量の変化の仕方はほとんど同じであるということが確認できる．

6 三角分布

本章では, 密度関数が

$$
f_N(x) = \begin{cases} -\frac{4}{p^2}x + \frac{2}{p} & \text{if } 0 \leq x \leq \frac{p}{2}, \\ \frac{4}{p^2}x + \frac{2}{p} & \text{if } -\frac{p}{2} \leq x < 0. \end{cases} \tag{45}
$$

となる雑音の通信路容量を求める．この密度関数を, 本論文では三角分布と呼ぶ．なお, 関数内の p は, 雑音が分布する範囲を表す．この関数のグラフを図 5 に示す．

まず, p の範囲を $0 < p \leq 2\pi$ としたときの通信路容量を求める．これは, p の値が変化して

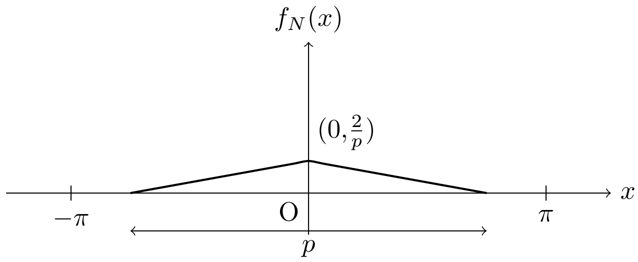


図 5: 三角分布の密度関数のグラフ

も, 密度関数が単位円の一周に収まる範囲である. このときの, 雑音のエントロピーは,

$$
\begin{aligned}
h(N) =& - \int_0^{\frac{p}{2}} \left(-\frac{4}{p^2}x + \frac{2}{p}\right) \log \left(-\frac{4}{p^2}x + \frac{2}{p}\right) dx \\
& - \int_{-\frac{p}{2}}^{0} \left(\frac{4}{p^2}x + \frac{2}{p}\right) \log \left(\frac{4}{p^2}x + \frac{2}{p}\right) dx && (46) \\
=& - 2 \int_0^{\frac{p}{2}} \left(-\frac{4}{p^2}x + \frac{2}{p}\right) \log \left(-\frac{4}{p^2}x + \frac{2}{p}\right) dx && (47) \\
=& - 2 \int_{\frac{2}{p}}^{0} t \log t \left(-\frac{p^2}{4}\right) dt \quad , \quad \left(-\frac{4}{p^2}x + \frac{2}{p} = t \text{ とおく}\right) && (48) \\
=& \frac{p^2}{2} \int_{\frac{2}{p}}^{0} t \log t dt && (49) \\
=& \frac{p^2}{2} \left[\frac{t^2}{2} \log t\right]_{\frac{2}{p}}^{0} - \frac{p^2}{2} \int_{\frac{2}{p}}^{0} \frac{t^2}{2} \frac{1}{t} dt && (50) \\
=& \frac{p^2}{4} \left[t^2 \log t\right]_{\frac{2}{p}}^{0} - \frac{p^2}{4} \left[\frac{t^2}{2}\right]_{\frac{2}{p}}^{0} && (51) \\
=& \frac{1}{2} - \log \frac{2}{p} && (52)
\end{aligned}
$$

となる. これより, 通信路容量は,

$$
\begin{aligned}
C(W) &= \log 2\pi - \frac{1}{2} + \log \frac{2}{p} && (53) \\
&= \log \frac{4\pi}{\sqrt{e}p} && (54)
\end{aligned}
$$

となる. このグラフを図 6 に示す.

図 6 では, p の値が増加すると, 雑音は大きくなる. 確かに, p の値が増加するにつれて通信路容量は単調減少し, 漸近的に 0 に近づいている. 一方, p の値が 0 に近づくと通信路容量は無限大に発散するこということが確認できる.

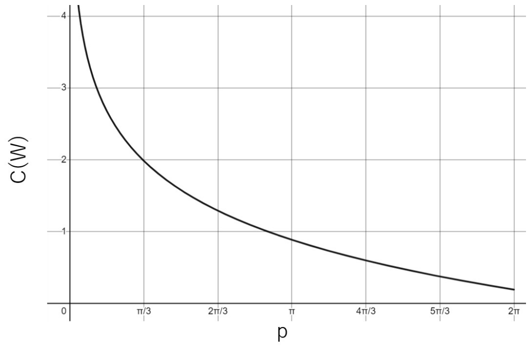


図 6: 三角分布 $(0 \leq p \leq 2\pi)$ の通信路容量

次に, $2\pi \leq p \leq 4\pi$ のとき, 三角分布に巻き付けの方法を用いて, 通信路容量を求める．このときの雑音の密度関数は,

$$\mathring{f}_N(x) = \begin{cases} -\frac{4}{p^2}x + \frac{2}{p} & \text{if } 0 \leq x \leq 2\pi - \frac{p}{2}, \\ \frac{4}{p^2}x + \frac{2}{p} & \text{if } -2\pi + \frac{p}{2} \leq x < 0, \\ -\frac{8\pi}{p^2} + \frac{4}{p} & \text{if } -\pi < x < -2\pi + \frac{p}{2}, 2\pi - \frac{p}{2} < x < \pi. \end{cases} \tag{55}$$

となる．特に, $p = 4\pi$ のときは, 雑音は一様分布になる．

この雑音のエントロピーは,

$$
\begin{aligned}
h(N) =& -\int_{-\pi}^{-2\pi+\frac{p}{2}} \left(-\frac{8\pi}{p^2}+\frac{4}{p}\right)\log\left(-\frac{8\pi}{p^2}+\frac{4}{p}\right)dx \\
& -\int_{-2\pi+\frac{p}{2}}^{0} \left(\frac{4}{p^2}x+\frac{2}{p}\right)\log\left(\frac{4}{p^2}x+\frac{2}{p}\right)dx \\
& -\int_{0}^{2\pi-\frac{p}{2}} \left(-\frac{4}{p^2}x+\frac{2}{p}\right)\log\left(-\frac{4}{p^2}x+\frac{2}{p}\right)dx \\
& -\int_{2\pi-\frac{p}{2}}^{\pi} \left(-\frac{8\pi}{p^2}+\frac{4}{p}\right)\log\left(-\frac{8\pi}{p^2}+\frac{4}{p}\right)dx && (56)\\
=& -2\int_{0}^{2\pi-\frac{p}{2}} \left(-\frac{4}{p^2}x+\frac{2}{p}\right)\log\left(-\frac{4}{p^2}x+\frac{2}{p}\right)dx \\
& -2\int_{2\pi-\frac{p}{2}}^{\pi} \left(-\frac{8\pi}{p^2}+\frac{4}{p}\right)\log\left(-\frac{8\pi}{p^2}+\frac{4}{p}\right)dx && (57)\\
=& -2\int_{\frac{2}{p}}^{-\frac{8\pi}{p^2}+\frac{4}{p}} t\log t\left(-\frac{p^2}{4}\right)dt \quad , \quad \left(-\frac{4}{p^2}x+\frac{2}{p}=t\text{ とおく}\right) \\
& -2\left(-\frac{8\pi}{p^2}+\frac{4}{p}\right)\log\left(-\frac{8\pi}{p^2}+\frac{4}{p}\right)[x]_{2\pi-\frac{p}{2}}^{\pi} && (58)\\
=&\frac{p^2}{2}\left[\frac{t^2}{2}\log t\right]_{\frac{2}{p}}^{-\frac{8\pi}{p^2}+\frac{4}{p}} - \frac{p^2}{2}\int_{\frac{2}{p}}^{-\frac{8\pi}{p^2}+\frac{4}{p}} \frac{t^2}{2}\frac{1}{t}dt \\
& -2\left(-\frac{8\pi}{p^2}+\frac{4}{p}\right)\log\left(-\frac{8\pi}{p^2}+\frac{4}{p}\right)\left(\pi-2\pi+\frac{p}{2}\right) && (59)\\
=&\frac{4p^2-16\pi p+16\pi^2}{p^2}\log\left(\frac{4p-8\pi}{p^2}\right)-\log\left(\frac{2}{p}\right)-\frac{p^2}{4}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{\frac{2}{p}}^{-\frac{8\pi}{p^2}+\frac{4}{p}} \\
& -\frac{4p^2-16\pi p+16\pi^2}{p^2}\log\left(\frac{4p-8\pi}{p^2}\right) && (60)\\
=& -\log\left(\frac{2}{p}\right)-\frac{2p^2-8\pi p+8\pi^2}{p^2}+\frac{1}{2} && (61)
\end{aligned}
$$

となる. これより, 通信路容量は,

$$
\begin{aligned}
C(W) &= \log 2\pi+\log\left(\frac{2}{p}\right)+\frac{2p^2-8\pi p+8\pi^2}{p^2}-\frac{1}{2} && (62)\\
&= \log\left(\frac{4\pi}{p}\right)+\frac{3p^2-16\pi p+16\pi^2}{2p^2} && (63)\\
& && (64)
\end{aligned}
$$

となる. このグラフを図 7 に示す.

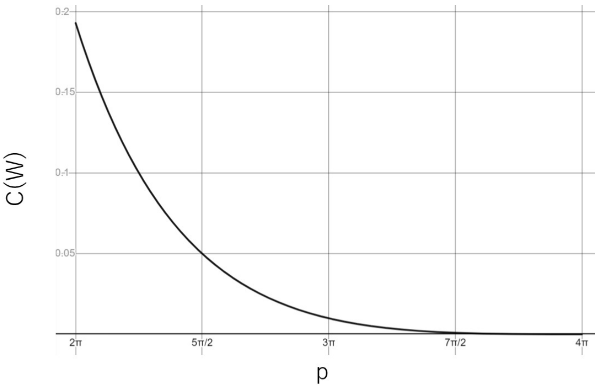


図 7: 三角分布 $(2\pi \leq p \leq 4\pi)$ の巻き付けの通信路容量

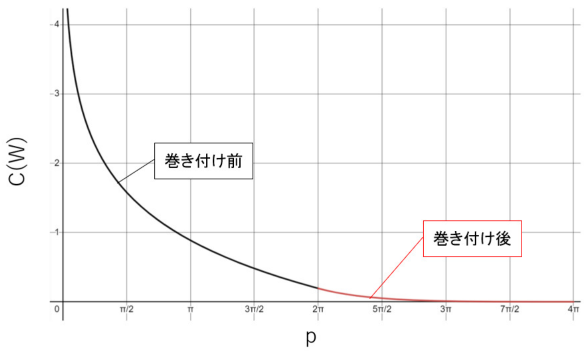


図 8: 三角分布 $(0 \leq p \leq 4\pi)$ の通信路容量

図 7 より, 定義域は $2\pi \leq p \leq 4\pi$ なので, p の値が減少しても通信路容量が発散することはない. また, $p = 4\pi$ のときに通信路容量が 0 になるということも確認できる.

また, 図 6 と図 7 のグラフを一つにまとめたものを図 8 に示す. 図 8 より, 雑音が $p = 4\pi$ のときに一様分布になるまで, 通信路容量は単調減少していることが確認できる.

7 ピークが二つある雑音

前章までに扱った雑音は, x が 0 のときにピークになるものであった. それに対して本章では, x が 0 と π の二つのところでピークになる場合を考える. これは, 信号点が円周の 180 度反対側にも同じ確率で移ってしまう雑音を意味している. ラプラス分布と三角分布の二種類の分布を, ピークが二つになるように密度関数を設定し, 通信路容量を求める.

7.1 ピークが二つあるラプラス分布

まず, $-\pi$ から π の範囲にラプラス分布のピークが二つになるように密度関数を考える. 具体的には, 巻き付けを行なったときの式 (40) を用いて,

$$\mathring{F}_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathring{f}_N(x) + \frac{1}{2}\mathring{f}_N(x-\pi) & \text{if } 0 < x \leq \pi \\ \frac{1}{2}\mathring{f}_N(x) + \frac{1}{2}\mathring{f}_N(x+\pi) & \text{if } -\pi \leq x \leq 0 \end{cases} \tag{65}$$

$$= \begin{cases} \frac{e^{-\frac{x}{\sigma}}+e^{\frac{x}{\sigma}}}{4\sigma(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1)} + \frac{1}{4\sigma}e^{-\frac{x}{\sigma}} + \frac{e^{-\frac{x-\pi}{\sigma}}+e^{\frac{x-\pi}{\sigma}}}{4\sigma(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1)} + \frac{1}{4\sigma}e^{\frac{x-\pi}{\sigma}} & \text{if } 0 < x \leq \pi \\ \frac{e^{-\frac{x}{\sigma}}+e^{\frac{x}{\sigma}}}{4\sigma(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1)} + \frac{1}{4\sigma}e^{\frac{x}{\sigma}} + \frac{e^{-\frac{x+\pi}{\sigma}}+e^{\frac{x+\pi}{\sigma}}}{4\sigma(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1)} + \frac{1}{4\sigma}e^{-\frac{x+\pi}{\sigma}} & \text{if } -\pi \leq x \leq 0 \end{cases} \tag{66}$$

と表す. $\sigma = 1$ のときの式 (66) のグラフを図 9 に示す.

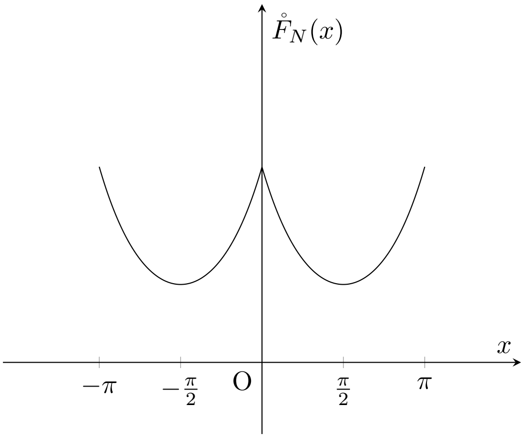


図 9: ピークが二つある場合のラプラス分布

この雑音のエントロピーは,

$$
\begin{aligned}
h(N) =& -\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}\mathring{f}_N(x)+\frac{1}{2}\mathring{f}_N(x-\pi)\right)\log\left(\frac{1}{2}\mathring{f}_N(x)+\frac{1}{2}\mathring{f}_N(x-\pi)\right)dx \\
&-\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{1}{2}\mathring{f}_N(x)+\frac{1}{2}\mathring{f}_N(x+\pi)\right)\log\left(\frac{1}{2}\mathring{f}_N(x)+\frac{1}{2}\mathring{f}_N(x+\pi)\right)dx \qquad (67)\\
=& -\int_0^{\pi}\left(\frac{e^{\frac{-x}{\sigma}}+e^{\frac{x-\pi}{\sigma}}}{2\sigma}+\frac{(1+e^{\frac{\pi}{\sigma}})e^{\frac{-x}{\sigma}}+(1+e^{\frac{-\pi}{\sigma}})e^{\frac{x}{\sigma}}}{2\sigma(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1)}\right) \\
&\times\log\left(\frac{e^{\frac{-x}{\sigma}}+e^{\frac{x-\pi}{\sigma}}}{4\sigma}+\frac{(1+e^{\frac{\pi}{\sigma}})e^{\frac{-x}{\sigma}}+(1+e^{\frac{-\pi}{\sigma}})e^{\frac{x}{\sigma}}}{4\sigma(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1)}\right)dx \qquad (68)\\
=&\frac{\left(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1\right)\log\left(4\sigma e^{\frac{\pi}{\sigma}}-4\sigma\right)+\left(1-e^{\frac{\pi}{\sigma}}\right)\log\left(e^{\frac{\pi}{\sigma}}+1\right)}{e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1} \\
&+\frac{-2e^{\frac{\pi}{2\sigma}}\arctan\left(e^{\frac{\pi}{2\sigma}}\right)+2e^{\frac{\pi}{2\sigma}}\arctan\left(e^{-\frac{\pi}{2\sigma}}\right)+e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1}{e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1} \qquad (69)
\end{aligned}
$$

となる. この途中式は付録 C に記載する. これより, 通信路容量は,

$$
\begin{aligned}
C(W) =& \log 2\pi-\frac{\left(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1\right)\log\left(4\sigma e^{\frac{\pi}{\sigma}}-4\sigma\right)+\left(1-e^{\frac{\pi}{\sigma}}\right)\log\left(e^{\frac{\pi}{\sigma}}+1\right)}{e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1} \\
&-\frac{-2e^{\frac{\pi}{2\sigma}}\arctan\left(e^{\frac{\pi}{2\sigma}}\right)+2e^{\frac{\pi}{2\sigma}}\arctan\left(e^{-\frac{\pi}{2\sigma}}\right)+e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1}{e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1} \qquad (70)
\end{aligned}
$$

となる. このグラフを図 10 に示す.

図 10 より, ピークの数が増えても, σ の値が増加するにつれて通信路容量が単調減少していることが確認できる.

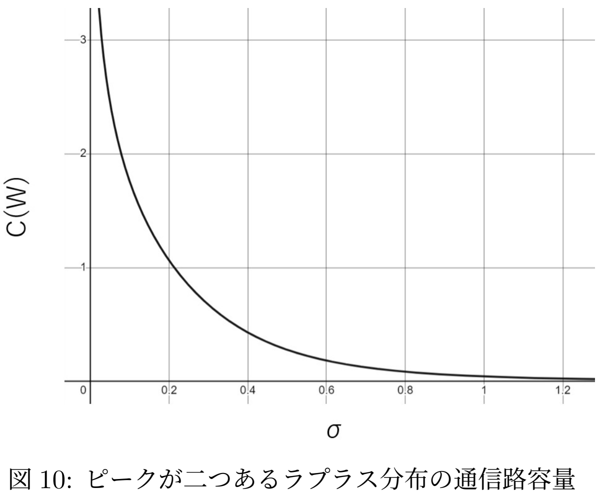


図 10: ピークが二つあるラプラス分布の通信路容量

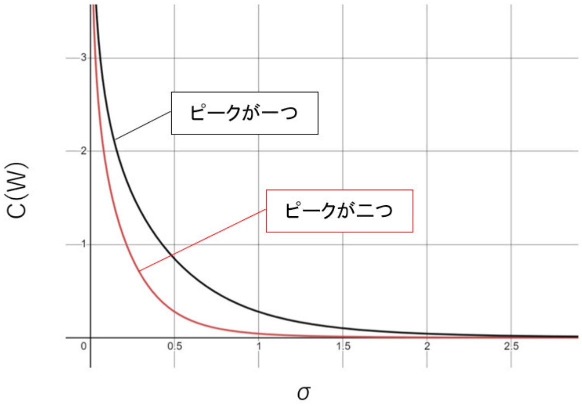


図 11: ラプラス分布のピークの数が違うときの通信路容量の比較

ここで, 巻き付けを行なってピークが一つのグラフと巻き付けを行ってピークが二つあるときのグラフの比較を図 11 に示す.

図 11 より, ピークが増えると通信路容量が減少していることがわかる. これより, 雑音のピークを減らすことで, 通信の安定性の向上につながるといえる.

7.2 ピークが二つある三角分布

次に, $-\pi$ から π の範囲に三角分布のピークが二つになるように密度関数を考える. 具体的な密度関数は,

$$f_N(x) = \begin{cases} (\frac{2}{\pi^2} - \frac{4h}{\pi})x + 3h - \frac{1}{\pi} & \text{if } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \\ (\frac{4h}{\pi} - \frac{2}{\pi^2})x + \frac{1}{\pi} - h & \text{if } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ (\frac{2}{\pi^2} - \frac{4h}{\pi})x + \frac{1}{\pi} - h & \text{if } -\frac{\pi}{2} < x \leq 0 \\ (\frac{4h}{\pi} - \frac{2}{\pi^2})x + 3h - \frac{1}{\pi} & \text{if } -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2} \end{cases} \tag{71}$$

とする. ただし, h は $x = \frac{\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}$ のときの y 座標であり, $0 \leq h \leq \frac{1}{2\pi}$ とする. このグラフを図 12 に示す.

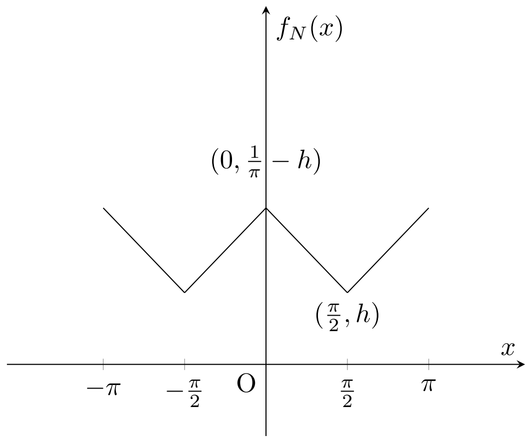


図 12: ピークが二つある場合の三角分布

この雑音のエントロピーは,

$$
\begin{aligned}
h(N) =& -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left((\frac{2}{\pi^2}-\frac{4h}{\pi})x+3h-\frac{1}{\pi}\right)\log\left((\frac{2}{\pi^2}-\frac{4h}{\pi})x+3h-\frac{1}{\pi}\right)dx \\
& -\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left((\frac{4h}{\pi}-\frac{2}{\pi^2})x+\frac{1}{\pi}-h\right)\log\left((\frac{4h}{\pi}-\frac{2}{\pi^2})x+\frac{1}{\pi}-h\right)dx \\
& -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left((\frac{2}{\pi^2}-\frac{4h}{\pi})x+\frac{1}{\pi}-h\right)\log\left((\frac{2}{\pi^2}-\frac{4h}{\pi})x+\frac{1}{\pi}-h\right)dx \\
& -\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}\left((\frac{4h}{\pi}-\frac{2}{\pi^2})x+3h-\frac{1}{\pi}\right)\log\left((\frac{4h}{\pi}-\frac{2}{\pi^2})x+3h-\frac{1}{\pi}\right)dx \qquad (72) \\
=& -4\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left((\frac{2}{\pi^2}-\frac{4h}{\pi})x+3h-\frac{1}{\pi}\right)\log\left((\frac{2}{\pi^2}-\frac{4h}{\pi})x+3h-\frac{1}{\pi}\right)dx \qquad (73) \\
=& -4\int_{h}^{\frac{1}{\pi}-h} t\log t\left(\frac{\pi^2}{2-4\pi h}\right)dt \quad , \quad \left(\left(\frac{2}{\pi^2}-\frac{4h}{\pi}\right)x+3h-\frac{1}{\pi}=t\text{ とおく}\right) \qquad (74) \\
=& -\frac{4\pi^2}{2-4\pi h}\left[\frac{t^2}{2}\log t\right]_{h}^{\frac{1}{\pi}-h}+\frac{4\pi^2}{2-4\pi h}\int_{h}^{\frac{1}{\pi}-h}\frac{t^2}{2}\frac{1}{t}dt \qquad (75) \\
=& -\frac{2\pi^2}{2-4\pi h}\left(\frac{1-2\pi h+\pi^2h^2}{\pi^2}\right)\log\left(\frac{1-\pi h}{\pi}\right)+\frac{2\pi^2}{2-4\pi h}h^2\log h \\
& +\frac{2\pi^2}{2-4\pi h}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{h}^{\frac{1}{h}-h} \qquad (76) \\
=& \frac{1}{2}-\log\left(\frac{1-\pi h}{\pi}\right)+\left(\frac{\pi^2h^2}{1-2\pi h}\right)\log\left(\frac{\pi h}{1-\pi h}\right) \qquad (77)
\end{aligned}
$$

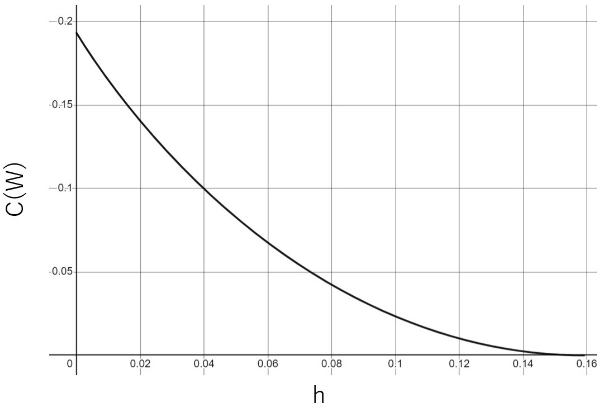


図 13: ピークが二つある三角分布の通信路容量

となる．このときの通信路容量は,

$$C(W) = \log 2\pi - \frac{1}{2} + \log\left(\frac{1-\pi h}{\pi}\right) - \left(\frac{\pi^2 h^2}{1-2\pi h}\right)\log\left(\frac{\pi h}{1-\pi h}\right) \tag{78}$$

となる．このグラフを図 13 に示す.

この図では, h の値が増加すると, 雑音は大きくなる．確かに, h の値の増加に伴って通信路容量は減少していることが確認できる．一方, 雑音が小さくなると通信路容量は増加している. ただし, この密度関数は, $h = 0$ のときに雑音は 0 にならないため, 通信路容量は発散しない. また, この密度関数は $h = \frac{1}{2\pi}$ のときに一様分布になる．$\frac{1}{2\pi}$ の近似値は, 0.159 である．図 11 確認すると, $h = 0.159$ のときに, 通信路容量は 0 になることが確認できる.

8 まとめ

本研究では，位相変調の通信路容量を, 雑音の種類ごとに算出した．その結果, 位相変調でも, 雑音が大きくなると通信路容量は小さくなるということを理論的に示すことが出来た．今後は, 本研究の結果を活用して, 符号器と復号器の設計を検討している.

謝辞

本研究を行うにあたり，多大なるご指導とご鞭撻を賜りました指導教員の西新幹彦准教授に心より感謝の意を表する.

参考文献

[1] Thomas M. Cover, Joy A.Thomas, Elements of Information Theory 2nd ed., Wiley, 2006.

[2] 韓太舜, 情報理論における情報スペクトル的方法, 培風館, 1998.

[3] 蓑谷千凰彦, 統計分布ハンドブック, 朝倉書店, 2003.

付録 A　微分エントロピーの最大化

3 章にて用いた, 一様分布の微分エントロピーが最大になるということを示す.

まず, $\mathcal{X} \triangleq [-\pi, \pi]$ とおく. 確率密度関数 $f_X(x)$ をもつ $\mathcal{X}$ 上の任意の確率変数 X を考える. さらに, $\mathcal{X}$ 上に一様に分布する確率密度変数 U を考える. この確率密度関数は $f_U(x) = \frac{1}{2\pi}$ である. この二つの確率密度関数の間の相対エントロピー

$$D(f_X||f_U) \triangleq \int_{-\pi}^{\pi} f_X(x) \log\left(\frac{f_X(x)}{f_U(x)}\right) dx \tag{79}$$

を考える. すると, 相対エントロピーの非負性 [1] を利用して,

$$\begin{aligned}
0 &\leq D(f_X||f_U) &(80)\\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f_X(x) \log\left(\frac{f_X(x)}{f_U(x)}\right) dx &(81)\\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f_X(x) \left(\log f_X(x) - \log f_U(x)\right) dx &(82)\\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f_X(x) \log \frac{1}{f_U(x)} dx - h(X) &(83)\\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f_X(x) \log (2\pi) dx - h(X) &(84)\\
&= \log 2\pi - h(X) &(85)
\end{aligned}$$

となる. 一方, 一様分布の微分エントロピーは,

$$\begin{aligned}
h(U) &= \int_{-\pi}^{\pi} f_U(x) \log\left(\frac{1}{f_U(x)}\right) dx &(86)\\
&= \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi \log (2\pi)\, dx &(87)\\
&= \log 2\pi &(88)
\end{aligned}$$

である. この結果を式 (85) に代入すると,

$$\begin{aligned}
0 \leq h(U) - h(X) \qquad (89)\\
\therefore h(X) \leq h(U) \qquad (90)
\end{aligned}$$

となる.

以上より, 有限の分布の中で微分エントロピーを最大化するのは一様分布である.

付録 B　ラプラス分布に巻き付けをしたときの微分エントロピーの導出

5 章の, 巻き付けを行ったときのラプラス分布の微分エントロピーの導出を示す.

$$h(N) = -\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{e^{-\frac{x}{\sigma}} + e^{\frac{x}{\sigma}}}{2\sigma(e^{\frac{2\pi}{\sigma}} - 1)} + \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}} \right) \log \left(\frac{e^{-\frac{x}{\sigma}} + e^{\frac{x}{\sigma}}}{2\sigma(e^{\frac{2\pi}{\sigma}} - 1)} + \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}} \right) dx \tag{91}$$

$$= -\frac{1}{\sigma\left(e^{\frac{2\pi}{\sigma}} - 1\right)} \int_0^{\pi} \left(e^{\frac{2\pi - x}{\sigma}} + e^{\frac{x}{\sigma}} \right) \log \left(\frac{e^{-\frac{x}{\sigma}} + e^{\frac{x}{\sigma}}}{2\sigma(e^{\frac{2\pi}{\sigma}} - 1)} + \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{x}{\sigma}} \right) dx \tag{92}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{\sigma\left(e^{\frac{2\pi}{\sigma}} - 1\right)} \int_0^{\pi} e^{\frac{x}{\sigma}} \log \left(\frac{e^{-\frac{x}{\sigma}} + e^{\frac{x}{\sigma}}}{2\sigma(e^{\frac{2\pi}{\sigma}} - 1)} + \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{x}{\sigma}} \right) dx \\ &\quad - \frac{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}}{\sigma\left(e^{\frac{2\pi}{\sigma}} - 1\right)} \int_0^{\pi} e^{\frac{-\pi}{\sigma}} \log \left(\frac{e^{-\frac{x}{\sigma}} + e^{\frac{x}{\sigma}}}{2\sigma(e^{\frac{2\pi}{\sigma}} - 1)} + \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{x}{\sigma}} \right) dx \end{aligned} \tag{93}$$

ここで, 式 (93) を第一項の $h_1(N)$ と第二項 $h_2(N)$ に分けて計算を行う. まず, $h_1(N)$ は,

$$\begin{aligned} h_1(N) &= -\frac{1}{\sigma\left(e^{\frac{2\pi}{\sigma}} - 1\right)} \left[\sigma e^{\frac{x}{\sigma}} \log \left(\frac{e^{-\frac{x}{\sigma}} + e^{\frac{x}{\sigma}}}{2\sigma(e^{\frac{2\pi}{\sigma}} - 1)} + \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{x}{\sigma}} \right) \right]_0^{\pi} \\ &\quad + \frac{1}{\sigma\left(e^{\frac{2\pi}{\sigma}} - 1\right)} \int_0^{\pi} \frac{\sigma e^{\frac{x}{\sigma}} \left(\frac{\frac{e^{\frac{x}{\sigma}}}{\sigma} - \frac{e^{\frac{-x}{\sigma}}}{\sigma}}{2\sigma\left(e^{\frac{2\pi}{\sigma}} - 1\right)} - \frac{e^{\frac{-x}{\sigma}}}{2\sigma^2} \right)}{\left(\frac{e^{-\frac{x}{\sigma}} + e^{\frac{x}{\sigma}}}{2\sigma(e^{\frac{2\pi}{\sigma}} - 1)} + \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{x}{\sigma}} \right)} dx \end{aligned} \tag{94}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{e^{\frac{\pi}{\sigma}}}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}} - 1} \log \left(\frac{e^{\frac{\pi}{\sigma}}}{\sigma\left(e^{\frac{2\pi}{\sigma}} - 1\right)} \right) + \frac{1}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}} - 1} \log \left(\frac{e^{\frac{2\pi}{\sigma}} + 1}{2\sigma\left(e^{\frac{2\pi}{\sigma}} - 1\right)} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\sigma\left(e^{\frac{2\pi}{\sigma}} - 1\right)} \int_0^{\pi} \frac{e^{\frac{x}{\sigma}} \left(e^{\frac{2x}{\sigma}} - e^{\frac{2\pi}{\sigma}} \right)}{e^{\frac{2x}{\sigma}} + e^{\frac{2\pi}{\sigma}}} dx \end{aligned} \tag{95}$$

となる．さらに, 式 (95) の第三項を $h_3(N)$ として, 引き続き計算を行うと,

$$
\begin{aligned}
h_3(N) =& \frac{1}{\sigma\left(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1\right)}(-\sigma)\int_0^{\frac{\pi}{\sigma}} \frac{e^{-u}(e^{-2u}-e^{\frac{2\pi}{\sigma}})}{e^{-2u}+e^{\frac{2\pi}{\sigma}}}du \quad , \quad \left(-\frac{x}{\sigma}=u \text{ とおく}\right) && (96)\\
=& -\frac{1}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1}\int_{-\frac{\pi}{\sigma}}^{0} \frac{e^{-u}\left(e^{2u+\frac{2\pi}{\sigma}}-1\right)}{e^{2u+\frac{2\pi}{\sigma}}+1}du && (97)\\
=& -\frac{1}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1}\int_{e^{\frac{-\pi}{\sigma}}}^{1} \frac{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}v^2-1}{v^2\left(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}v^2+1\right)}dv \quad , \quad (e^u=v \text{ とおく}) && (98)\\
=& -\frac{1}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1}\int_{e^{\frac{-\pi}{\sigma}}}^{1} \left(\frac{2e^{\frac{2\pi}{\sigma}}}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}v^2+1}-\frac{1}{v^2}\right)dv && (99)\\
=& -\frac{2e^{\frac{2\pi}{\sigma}}}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1}\int_{e^{\frac{-\pi}{\sigma}}}^{1} \frac{1}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}v^2+1}dv+\frac{1}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1}\int_{e^{\frac{-\pi}{\sigma}}}^{1}\frac{1}{v^2}dv && (100)\\
=& -\frac{2e^{\frac{2\pi}{\sigma}}}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1}\int_{1}^{e^{\frac{\pi}{\sigma}}} \frac{e^{\frac{-\pi}{\sigma}}}{w^2+1}dw+\frac{1}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1}\left[-\frac{1}{v}\right]_{e^{\frac{1\pi}{\sigma}}}^{1} \quad , \quad \left(e^{\frac{\pi}{\sigma}}v=w \text{ とおく}\right) && (101)\\
=& -\frac{2e^{\frac{2\pi}{\sigma}}}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1}\left[\arctan(w)\right]_1^{e^{\frac{\pi}{\sigma}}}+\frac{e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1} && (102)\\
=& -\frac{2e^{\frac{2\pi}{\sigma}}}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1}\arctan(e^{\frac{\pi}{\sigma}})+\frac{\frac{\pi}{2}e^{\frac{\pi}{\sigma}}+e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1} && (103)
\end{aligned}
$$

となる．よって, $h_1(N)$ は,

$$
\begin{aligned}
h_1(N) = & -\frac{e^{\frac{\pi}{\sigma}}}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1}\log\left(\frac{e^{\frac{\pi}{\sigma}}}{\sigma\left(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1\right)}\right)+\frac{1}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1}\log\left(\frac{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}+1}{2\sigma\left(e^{\frac{2\pi}{\sigma}-1}\right)}\right)\\
& -\frac{2e^{\frac{2\pi}{\sigma}}}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1}\arctan(e^{\frac{\pi}{\sigma}})+\frac{\frac{\pi}{2}e^{\frac{\pi}{\sigma}}+e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1} && (104)
\end{aligned}
$$

となる．

次に, $h_2(N)$ は,

$$h_2(N) = -\frac{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}}{\sigma\left(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1\right)}\left[-\sigma e^{\frac{-\pi}{\sigma}}\log\left(\frac{e^{-\frac{x}{\sigma}}+e^{\frac{x}{\sigma}}}{2\sigma(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1)}+\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{x}{\sigma}}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$+\frac{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}}{\sigma\left(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1\right)}\int_0^{\pi}\frac{\sigma e^{\frac{x}{\sigma}}\left(\frac{e^{\frac{-x}{\sigma}}}{2\sigma^2}-\frac{\frac{e^{\frac{x}{\sigma}}}{\sigma}-\frac{e^{\frac{-x}{\sigma}}}{\sigma}}{2\sigma\left(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1\right)}\right)}{\left(\frac{e^{-\frac{x}{\sigma}}+e^{\frac{x}{\sigma}}}{2\sigma(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1)}+\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{x}{\sigma}}\right)}dx \tag{105}$$

$$=\frac{e^{\frac{\pi}{\sigma}}}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1}\log\left(\frac{e^{\frac{\pi}{\sigma}}}{\sigma\left(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1\right)}\right)-\frac{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1}\log\left(\frac{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}+1}{2\sigma\left(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1\right)}\right)$$

$$-\frac{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}}{\sigma\left(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1\right)}\int_0^{\pi}\frac{e^{\frac{x}{\sigma}}\left(e^{\frac{2x}{\sigma}}-e^{\frac{2\pi}{\sigma}}\right)}{e^{\frac{2x}{\sigma}}+e^{\frac{2\pi}{\sigma}}}dx \tag{106}$$

となる. さらに, 式 (106) の第三項を $h_4(N)$ として, 引き続き計算を行うと,

$$h_4(N) = -\frac{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}}{\sigma\left(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1\right)}(-\sigma)\int_0^{\frac{\pi}{\sigma}}\frac{e^u(e^{-2u}-e^{\frac{2\pi}{\sigma}})}{e^{-2u}+e^{\frac{2\pi}{\sigma}}}du \quad , \quad \left(-\frac{x}{\sigma}=u \text{ とおく}\right) \tag{107}$$

$$=\frac{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1}\int_{-\frac{\pi}{\sigma}}^{0}\frac{e^u\left(e^{2u+\frac{2\pi}{\sigma}}-1\right)}{e^{2u+\frac{2\pi}{\sigma}}+1}du \tag{108}$$

$$=\frac{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1}\int_{e^{\frac{-\pi}{\sigma}}}^{1}\frac{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}v^2-1}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}v^2+1}dv \quad , \quad (e^u=v \text{ とおく}) \tag{109}$$

$$=\frac{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1}\int_{e^{\frac{-\pi}{\sigma}}}^{1}\left(1-\frac{2}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}v^2+1}\right)dv \tag{110}$$

$$=\frac{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1}[v]_{e^{\frac{-\pi}{\sigma}}}^{1}-\frac{2e^{\frac{2\pi}{\sigma}}}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1}\int_{e^{\frac{-\pi}{\sigma}}}^{1}\frac{1}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}v^2+1}dv \tag{111}$$

$$=\frac{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-e^{\frac{\pi}{\sigma}}}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1}-\frac{2e^{\frac{2\pi}{\sigma}}}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1}\left[e^{\frac{-\pi}{\sigma}}\arctan(e^{\frac{\pi}{\sigma}}v)\right]_{e^{\frac{-\pi}{\sigma}}}^{1} \tag{112}$$

$$=\frac{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-e^{\frac{\pi}{\sigma}}}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1}-\frac{2e^{\frac{2\pi}{\sigma}}}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1}\arctan(e^{\frac{\pi}{\sigma}})+\frac{\frac{\pi}{2}e^{\frac{\pi}{\sigma}}}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1} \tag{113}$$

となる. よって, $h_2(N)$ は,

$$h_2(N) =\frac{e^{\frac{\pi}{\sigma}}}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1}\log\left(\frac{e^{\frac{\pi}{\sigma}}}{\sigma\left(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1\right)}\right)-\frac{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1}\log\left(\frac{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}+1}{2\sigma\left(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1\right)}\right)$$

$$+\frac{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-e^{\frac{\pi}{\sigma}}}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1}-\frac{2e^{\frac{2\pi}{\sigma}}}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1}\arctan(e^{\frac{\pi}{\sigma}})+\frac{\frac{\pi}{2}e^{\frac{\pi}{\sigma}}}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1} \tag{114}$$

となる. 従って, 式 (104) と式 (114) の結果より, 微分エントロピーは,

$$
\begin{aligned}
h(N) =& -\frac{e^{\frac{\pi}{\sigma}}}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1}\log\left(\frac{e^{\frac{\pi}{\sigma}}}{\sigma\left(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1\right)}\right)+\frac{1}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1}\log\left(\frac{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}+1}{2\sigma\left(e^{\frac{2\pi}{\sigma}-1}\right)}\right)\\
&-\frac{2e^{\frac{2\pi}{\sigma}}}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1}\arctan\left(e^{\frac{\pi}{\sigma}}\right)+\frac{\frac{\pi}{2}e^{\frac{\pi}{\sigma}}+e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1}\\
&+\frac{e^{\frac{\pi}{\sigma}}}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1}\log\left(\frac{e^{\frac{\pi}{\sigma}}}{\sigma\left(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1\right)}\right)-\frac{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1}\log\left(\frac{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}+1}{2\sigma\left(e^{\frac{2\pi}{\sigma}-1}\right)}\right)\\
&+\frac{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-e^{\frac{\pi}{\sigma}}}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1}-\frac{2e^{\frac{2\pi}{\sigma}}}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1}\arctan\left(e^{\frac{\pi}{\sigma}}\right)+\frac{\frac{\pi}{2}e^{\frac{\pi}{\sigma}}}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1} \qquad (115)\\
=&\frac{\left(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1\right)\log\left(2\sigma e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-2\sigma\right)+\left(1-e^{\frac{2\pi}{\sigma}}\right)\log\left(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}+1\right)-4e^{\frac{\pi}{\sigma}}\arctan\left(e^{\frac{\pi}{\sigma}}\right)}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1}\\
&+\frac{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}+\pi e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1}{e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1} \qquad (116)
\end{aligned}
$$

となる.

付録 C　ピークが二つあるラプラス分布の微分エントロピーの計算過程

7 章の, ピークが二つあるラプラス分布の微分エントロピーの導出を示す.

$$
\begin{aligned}
h(N) =& -\int_0^{\pi}\left(\frac{e^{\frac{-x}{\sigma}}+e^{\frac{x-\pi}{\sigma}}}{2\sigma}+\frac{(1+e^{\frac{\pi}{\sigma}})e^{\frac{-x}{\sigma}}+(1+e^{\frac{-\pi}{\sigma}})e^{\frac{x}{\sigma}}}{2\sigma(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1)}\right)\\
&\times\log\left(\frac{e^{\frac{-x}{\sigma}}+e^{\frac{x-\pi}{\sigma}}}{4\sigma}+\frac{(1+e^{\frac{\pi}{\sigma}})e^{\frac{-x}{\sigma}}+(1+e^{\frac{-\pi}{\sigma}})e^{\frac{x}{\sigma}}}{4\sigma(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1)}\right)dx \qquad (117)\\
=& -\frac{1}{2\sigma\left(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1\right)}\int_0^{\pi}\left(e^{\frac{\pi-x}{\sigma}}+e^{\frac{x}{\sigma}}\right)\\
&\times\log\left(\frac{e^{\frac{-x}{\sigma}}+e^{\frac{x-\pi}{\sigma}}}{4\sigma}+\frac{(1+e^{\frac{\pi}{\sigma}})e^{\frac{-x}{\sigma}}+(1+e^{\frac{-\pi}{\sigma}})e^{\frac{x}{\sigma}}}{4\sigma(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1)}\right)dx \qquad (118)\\
=& -\frac{e^{\frac{\pi}{\sigma}}}{2\sigma\left(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1\right)}\int_0^{\pi}e^{\frac{-x}{\sigma}}\log\left(\frac{e^{\frac{2\pi-x}{\sigma}}+e^{\frac{x+\pi}{\sigma}}+e^{\frac{-x+\pi}{\sigma}}+e^{\frac{x}{\sigma}}}{4\sigma(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1)}\right)dx\\
&-\frac{1}{2\sigma\left(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1\right)}\int_0^{\pi}e^{\frac{x}{\sigma}}\log\left(\frac{e^{\frac{2\pi-x}{\sigma}}+e^{\frac{x+\pi}{\sigma}}+e^{\frac{-x+\pi}{\sigma}}+e^{\frac{x}{\sigma}}}{4\sigma(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1)}\right)dx \qquad (119)
\end{aligned}
$$

ここで, 式 (119) を第一項の $h_1(N)$ と第二項の $h_2(N)$ に分けて計算を行う. まず, $h_1(N)$ は,

$$\begin{aligned}
h_1(N) =& -\frac{e^{\frac{\pi}{\sigma}}}{2\sigma\left(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1\right)}\left[-\sigma e^{\frac{-x}{\sigma}}\log\left(\frac{e^{\frac{2\pi-x}{\sigma}}+e^{\frac{x+\pi}{\sigma}}+e^{\frac{-x+\pi}{\sigma}}+e^{\frac{x}{\sigma}}}{4\sigma(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1)}\right)\right]_0^{\pi} \\
&+\frac{e^{\frac{\pi}{\sigma}}}{2\sigma\left(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1\right)}\int_0^{\pi}\frac{\sigma e^{\frac{-x}{\sigma}}\left(-\frac{e^{\frac{x+\pi}{\sigma}}}{\sigma}+\frac{e^{\frac{x}{\sigma}}}{\sigma}+\frac{e^{\frac{2\pi-x}{\sigma}}}{\sigma}+\frac{e^{\frac{-x+\pi}{\sigma}}}{\sigma}\right)}{e^{\frac{x+\pi}{\sigma}}+e^{\frac{x}{\sigma}}+e^{\frac{2\pi-x}{\sigma}}+e^{\frac{-x+\pi}{\sigma}}}dx \qquad (120)\\
=&\frac{1-e^{\frac{\pi}{\sigma}}}{2\sigma\left(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1\right)}\log\left(\frac{e^{\frac{2\pi-x}{\sigma}}+e^{\frac{x+\pi}{\sigma}}+e^{\frac{-x+\pi}{\sigma}}+e^{\frac{x}{\sigma}}}{4\sigma(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1)}\right) \\
&+\frac{e^{\frac{\pi}{\sigma}}}{2\sigma\left(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1\right)}\int_0^{\pi}\frac{e^{\frac{-x}{\sigma}}(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-e^{\frac{2x}{\sigma}})}{e^{\frac{2x}{\sigma}}+e^{\frac{\pi}{\sigma}}}dx \qquad (121)
\end{aligned}$$

となる. さらに, 式 (121) の第二項を $h_3(N)$ として, 引き続き計算を行うと,

$$\begin{aligned}
h_3(N) =& -\frac{e^{\frac{\pi}{\sigma}}}{2\sigma\left(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1\right)}(-\sigma)\int_0^{\frac{-\pi}{\sigma}}\frac{e^{u}(e^{-2u}-e^{\frac{\pi}{\sigma}})}{e^{-2u}+e^{\frac{\pi}{\sigma}}}du \quad , \quad \left(-\frac{x}{\sigma}=u\text{ とおく}\right) \qquad (122)\\
=&\frac{e^{\frac{\pi}{\sigma}}}{2\left(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1\right)}\int_{\frac{-\pi}{\sigma}}^{0}\frac{e^{u}(e^{2u+\frac{\pi}{\sigma}}-1)}{e^{2u+\frac{\pi}{\sigma}}+1}du \qquad (123)\\
=&\frac{e^{\frac{\pi}{\sigma}}}{2\left(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1\right)}\int_{e^{\frac{-\pi}{\sigma}}}^{1}\frac{e^{\frac{\pi}{\sigma}}v^2-1}{e^{\frac{\pi}{\sigma}}v^2+1}dv \quad , \quad (e^{u}=v\text{ とおく}) \qquad (124)\\
=&\frac{e^{\frac{\pi}{\sigma}}}{2\left(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1\right)}\int_{e^{\frac{-\pi}{\sigma}}}^{1}\left(1-\frac{2}{e^{\frac{\pi}{\sigma}}v^2+1}\right)dv \qquad (125)\\
=&\frac{e^{\frac{\pi}{\sigma}}}{2\left(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1\right)}[v]_{e^{\frac{-\pi}{\sigma}}}^{1}-\frac{e^{\frac{\pi}{\sigma}}}{\left(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1\right)}\int_{e^{\frac{-\pi}{\sigma}}}^{1}\left(1-\frac{2}{e^{\frac{\pi}{\sigma}}v^2+1}\right)dv \qquad (126)\\
=&\frac{e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1}{2\left(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1\right)}-\frac{e^{\frac{\pi}{\sigma}}}{2\left(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1\right)}\left[e^{\frac{-\pi}{2\pi}}\arctan e^{\frac{\pi}{2\sigma}}v\right]_{e^{\frac{-\pi}{\sigma}}}^{1} \qquad (127)\\
=&\frac{e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1}{2\left(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1\right)}-\frac{e^{\frac{\pi}{2\sigma}}}{e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1}\arctan\left(e^{\frac{\pi}{2\sigma}}\right)+\frac{e^{\frac{\pi}{2\sigma}}}{e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1}\arctan\left(e^{\frac{-\pi}{2\sigma}}\right) \qquad (128)
\end{aligned}$$

となる. よって, $h_1(N)$ は,

$$\begin{aligned}
h_1(N) =& -\frac{e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1}{2\sigma\left(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1\right)}\log\left(\frac{e^{\frac{2\pi-x}{\sigma}}+e^{\frac{x+\pi}{\sigma}}+e^{\frac{-x+\pi}{\sigma}}+e^{\frac{x}{\sigma}}}{4\sigma(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1)}\right) \\
&+\frac{e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1}{2\left(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1\right)}-\frac{e^{\frac{\pi}{2\sigma}}}{e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1}\arctan\left(e^{\frac{\pi}{2\sigma}}\right)+\frac{e^{\frac{\pi}{2\sigma}}}{e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1}\arctan\left(e^{\frac{-\pi}{2\sigma}}\right) \qquad (129)
\end{aligned}$$

となる. 次に, $h_2(N)$ は,

$$
\begin{aligned}
h_2(N) =& -\frac{1}{2\sigma\left(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1\right)}\left[\sigma e^{\frac{x}{\sigma}}\log\left(\frac{e^{\frac{2\pi-x}{\sigma}}+e^{\frac{x+\pi}{\sigma}}+e^{\frac{-x+\pi}{\sigma}}+e^{\frac{x}{\sigma}}}{4\sigma(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1)}\right)\right]_0^{\pi} \\
&+\frac{1}{2\sigma\left(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1\right)}\int_0^{\pi}\frac{\sigma e^{\frac{x}{\sigma}}\left(-\frac{e^{\frac{x+\pi}{\sigma}}}{\sigma}+\frac{e^{\frac{x}{\sigma}}}{\sigma}+\frac{e^{\frac{2\pi-x}{\sigma}}}{\sigma}+\frac{e^{\frac{-x+\pi}{\sigma}}}{\sigma}\right)}{e^{\frac{x+\pi}{\sigma}}+e^{\frac{x}{\sigma}}+e^{\frac{2\pi-x}{\sigma}}+e^{\frac{-x+\pi}{\sigma}}}dx \qquad (130) \\
=&\frac{1-e^{\frac{\pi}{\sigma}}}{2\sigma\left(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1\right)}\log\left(\frac{e^{\frac{2\pi-x}{\sigma}}+e^{\frac{x+\pi}{\sigma}}+e^{\frac{-x+\pi}{\sigma}}+e^{\frac{x}{\sigma}}}{4\sigma(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1)}\right) \\
&+\frac{1}{2\sigma\left(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1\right)}\int_0^{\pi}\frac{e^{\frac{x}{\sigma}}(e^{\frac{2x}{\sigma}}-e^{\frac{\pi}{\sigma}})}{e^{\frac{2x}{\sigma}}+e^{\frac{\pi}{\sigma}}}dx \qquad (131)
\end{aligned}
$$

となる. さらに, 式 (131) の第二項を $h_4(N)$ として, 引き続き計算を行うと,

$$
\begin{aligned}
h_4(N) =& \frac{1}{2\sigma(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1)}(-\sigma)\int_0^{\frac{-\pi}{\sigma}}\frac{e^{u}(e^{-2u}-e^{\frac{\pi}{\sigma}})}{e^{-2u}+e^{\frac{\pi}{\sigma}}}du \quad , \quad \left(-\frac{x}{\sigma}=u\text{ とおく}\right) \qquad (132) \\
=& -\frac{1}{2(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1)}\int_{\frac{-\pi}{\sigma}}^{0}\frac{e^{-u}(e^{2u+\frac{\pi}{\sigma}}-1)}{e^{2u+\frac{\pi}{\sigma}}+1}du \qquad (133) \\
=& -\frac{1}{2(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1)}\int_{e^{\frac{-\pi}{\sigma}}}^{1}\frac{e^{\frac{\pi}{\sigma}}v^2-1}{v^2(e^{\frac{\pi}{\sigma}}v^2+1)}dv \quad , \quad (e^{u}=v\text{ とおく}) \qquad (134) \\
=& -\frac{1}{2(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1)}\int_{e^{\frac{-\pi}{\sigma}}}^{1}\left(\frac{2e^{\frac{\pi}{\sigma}}}{e^{\frac{\pi}{\sigma}}v^2+1}-\frac{1}{v^2}\right)dv \qquad (135) \\
=& -\frac{e^{\frac{\pi}{\sigma}}}{e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1}\int_{e^{\frac{-\pi}{\sigma}}}^{1}\frac{1}{e^{\frac{\pi}{\sigma}}v^2+1}dv+\frac{1}{2(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1)}\int_{e^{\frac{-\pi}{\sigma}}}^{1}\frac{1}{v^2}dv \qquad (136) \\
=& -\frac{e^{\frac{\pi}{2\sigma}}}{e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1}\int_{e^{\frac{-\pi}{2\sigma}}}^{e^{\frac{\pi}{2\sigma}}}\frac{1}{w^2+1}dw+\frac{1}{2(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1)}\left[-\frac{1}{v}\right]_{e^{\frac{-\pi}{\sigma}}}^{1} \quad ,\left(e^{\frac{\pi}{2\sigma}}v=w\text{ とおく}\right) \qquad (137) \\
=& -\frac{e^{\frac{\pi}{2\sigma}}}{e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1}\arctan(e^{\frac{\pi}{2\sigma}})+\frac{e^{\frac{\pi}{2\sigma}}}{e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1}\arctan(e^{\frac{-\pi}{2\sigma}})+\frac{e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1}{2(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1)} \qquad (138)
\end{aligned}
$$

となる. よって, $h_2(N)$ は,

$$
\begin{aligned}
h_2(N) =& -\frac{e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1}{2\sigma\left(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1\right)}\log\left(\frac{e^{\frac{2\pi-x}{\sigma}}+e^{\frac{x+\pi}{\sigma}}+e^{\frac{-x+\pi}{\sigma}}+e^{\frac{x}{\sigma}}}{4\sigma(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1)}\right) \\
&-\frac{e^{\frac{\pi}{2\sigma}}}{e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1}\arctan(e^{\frac{\pi}{2\sigma}})+\frac{e^{\frac{\pi}{2\sigma}}}{e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1}\arctan(e^{\frac{-\pi}{2\sigma}})+\frac{e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1}{2(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1)} \qquad (139)
\end{aligned}
$$

となる. 従って, 式 (129) と式 (139) の結果より, 微分エントロピーは,

$$
\begin{aligned}
h(N) =& -\frac{e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1}{2\sigma\left(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1\right)}\log\left(\frac{e^{\frac{2\pi-x}{\sigma}}+e^{\frac{x+\pi}{\sigma}}+e^{\frac{-x+\pi}{\sigma}}+e^{\frac{x}{\sigma}}}{4\sigma(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1)}\right)\\
&+\frac{e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1}{2\left(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1\right)}-\frac{e^{\frac{\pi}{2\sigma}}}{e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1}\arctan\left(e^{\frac{\pi}{2\sigma}}\right)+\frac{e^{\frac{\pi}{2\sigma}}}{e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1}\arctan\left(e^{\frac{-\pi}{2\sigma}}\right)\\
&-\frac{e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1}{2\sigma\left(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1\right)}\log\left(\frac{e^{\frac{2\pi-x}{\sigma}}+e^{\frac{x+\pi}{\sigma}}+e^{\frac{-x+\pi}{\sigma}}+e^{\frac{x}{\sigma}}}{4\sigma(e^{\frac{2\pi}{\sigma}}-1)}\right)\\
&-\frac{e^{\frac{\pi}{2\sigma}}}{e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1}\arctan\left(e^{\frac{\pi}{2\sigma}}\right)+\frac{e^{\frac{\pi}{2\sigma}}}{e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1}\arctan\left(e^{\frac{-\pi}{2\sigma}}\right)+\frac{e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1}{2(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1)} \qquad (140)\\
=&\frac{\left(e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1\right)\log\left(4\sigma e^{\frac{\pi}{\sigma}}-4\sigma\right)+\left(1-e^{\frac{\pi}{\sigma}}\right)\log\left(e^{\frac{\pi}{\sigma}}+1\right)}{e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1}\\
&+\frac{-2e^{\frac{\pi}{2\sigma}}\arctan\left(e^{\frac{\pi}{2\sigma}}\right)+2e^{\frac{\pi}{2\sigma}}\arctan\left(e^{-\frac{\pi}{2\sigma}}\right)+e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1}{e^{\frac{\pi}{\sigma}}-1} \qquad (141)
\end{aligned}
$$

となる.