

信州大学工学部

学士論文

光子計数通信システムの
通信路容量の下界について

指導教員 西新 幹彦 准教授

学科 電子情報システム工学科
学籍番号 20T2063K
氏名 佐伯 翼

2024年4月11日

目次

1	はじめに	1
2	数学的準備	2
3	定常無記憶通信路の通信路容量	3
4	光子計数通信システムからポアソン通信路へ	4
5	通信路容量の下界	6
5.1	相互情報量の導出	6
5.2	相互情報量の誤差保証付き数値計算	11
6	まとめ	14
	謝辞	14
	参考文献	14
	付録 A オイラー定数	16

1 はじめに

通信の需要は現代社会において非常に高まっており、人々が情報をやり取りし、コミュニケーションを行うために通信が欠かせない存在となっている。この通信において、情報は通信路を通して送受信される。通信路の振る舞いは確定的ではないため、通信路を通じた情報のやり取りでは入力された情報を誤りなく伝達することは不可能である。しかし、送信する情報に冗長性を付加することにより、通信により生じた誤りを受信側で訂正したり検出したりすることが可能となる。これにより、情報伝送の誤りを少なくできる。付加する冗長性を高めれば誤り訂正・検出能力を高めることができるが、1回の通信で伝送できる情報量は少なくなる。つまり、復号誤り確率と1回の通信で伝送できる情報量の間にはトレードオフの関係がある。この関係は通信路ごとに決まり、特に限りなく小さい復号誤り確率のもとで伝送できる情報量の最大値は通信路容量と呼ばれる。通信路容量を求めることは情報理論の通信路符号化において基本的な問題のひとつとなっている。

通信の仕方には様々なものがあり、その一つに光子を放出させて、その光子の個数により通信を行うものがある。これを、光子計数通信システムといい、本研究ではこの物理的な通信路について考える。光子計数通信システムの確率モデルはポアソン分布で表現することができ、本論文では、このように通信路の確率モデルがポアソン分布で表されるものをポアソン通信路とよぶ。

ポアソン通信路の通信路容量を求めるという問題は未解決であるが、この問題に対する間接的なアプローチがいくつかある。Dysto, Barletta and Shamai[1]は振幅が制約されたもとの容量達成入力分布の特性を得ている。Pierce, Posner and Rodemich[2]は電力が制約されたもとの通信路容量のオーダーを求めている。このように従来研究では、特定の条件や制約のもとでの近似的な解析や数値的な計算が行われている。本研究ではポアソン通信路の通信路容量の下界を求め、ポアソン通信路で最低どれだけの情報量を送ることができるのかを明らかにする。

本論文では、2章で数学的準備を行い、3章で通信路容量の一般論を説明する。4章では、光子を送ることで通信を行う方式である光子計数通信システムについて述べ、この通信路をポアソン通信路という確率モデルで表現する。5章では、ポアソン通信路の入力が指数分布に従うと仮定して通信路容量の下界を算出することでポアソン通信路で最低どれだけの情報量を送ることができるのかを示す。そして、6章では本論文をまとめる。

2 数学的準備

本論文では $0^0 = 1$ 及び $0! = 1$ という標準的な規則を使用する．また，扱う対数はすべて自然対数である．確率変数 X に対し，その確率分布を P_X と表す．そして， $X = x$ が与えられたもとで $Y = y$ となる条件付き確率を $P_{Y|X}(y|x)$ ，同時確率分布を $P_{XY}(x, y)$ と表す．

定義 1 X のエントロピー $H(X)$ ， Y が与えられたもとの X の条件付きエントロピー $H(X|Y)$ をそれぞれ

$$H(X) \triangleq - \sum_x P_X(x) \log P_X(x) \quad (1)$$

$$H(X|Y) \triangleq - \sum_x \sum_y P_{XY}(x, y) \log P_{X|Y}(x|y) \quad (2)$$

と定義する．

定義 2 事象 $Y = y$ が起こると仮定したときの X の条件付きエントロピーを

$$H(X|Y = y) \triangleq - \sum_x P_{X|Y}(x|y) \log P_{X|Y}(x|y) \quad (3)$$

と定義する．

Y が与えられたもとの X の条件付きエントロピー $H(X|Y)$ は式 (2) を変形することにより

$$H(X|Y) = \sum_y P_Y(y) H(X|Y = y) \quad (4)$$

と書ける．

定義 3 X と Y の間の相互情報量 $I(X; Y)$ を

$$I(X; Y) \triangleq \sum_x \sum_y P_{XY}(x, y) \log \frac{P_{XY}(x, y)}{P_X(x)P_Y(y)} \quad (5)$$

と定義する．

これらの定義より相互情報量 $I(X; Y)$ は

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y) \quad (6)$$

と書ける．また，対称性より

$$I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X) \quad (7)$$

とも書ける．本研究では式 (7) を用いて相互情報量を算出する．

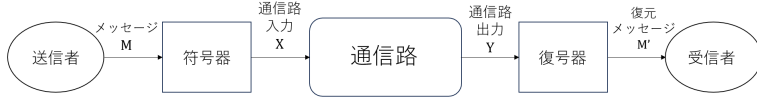


図 1: 通信路モデル

3 定常無記憶通信路の通信路容量

本章では誤りのない通信を行う効率の限界である通信路容量を文献 [3] に基づいて定義する。

図 1 は物理的な信号送信システムを数学的なモデルとして表したものである。 \mathcal{X} を入力アルファベット、 \mathcal{Y} を出力アルファベットとし、通信路入出力をそれぞれ確率変数 X, Y とする。通信路には雑音が含まれており、これにより通信路入出力 X と Y において $X \neq Y$ となることが発生する。そのため、通信路が信号を伝送する過程を確率的な側面からモデル化する必要がある。そこで、通信路を入力したものに対して出力が確率的に決まるものとして条件付き確率 $P_{Y|X}$ で表す。また、通信路入力 X と通信路出力 Y の分布をそれぞれ P_X, P_Y と表す。

通信路の中でも特に、入力系列

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{X}^n \quad (8)$$

が与えられたとき出力系列

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathcal{Y}^n \quad (9)$$

の出現する条件付確率 $P_{Y^n|X^n}(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ が

$$P_{Y^n|X^n}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n P_{Y|X}(y_i|x_i) \quad (10)$$

で与えられる通信路のことを定常無記憶通信路とよぶ。

伝送すべき通報の集合を $\mathcal{M}_n = \{1, 2, \dots, M_n\}$ としたとき、それらを長さ n の通信路入力に変換する写像 $\varphi_n: \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{X}^n$ を符号器とよぶ。ここで $\varphi_n(m)$ は通報 m の符号語とよばれ、 $\mathcal{C}_n = \varphi_n(\mathcal{M}_n)$ は符号とよばれている。符号器 φ_n は通報 m を送りたいときその符号語 $\varphi_n(m)$ を通信路に入力する。通信路の受信側では、あらかじめ定めておいた \mathcal{Y}^n の分割

$$\mathcal{Y}^n = \mathcal{D}_1 \cup \dots \cup \mathcal{D}_{M_n} \quad (\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j = \emptyset \text{ for } i \neq j) \quad (11)$$

に基づいて、受け取った出力 \mathbf{y} が $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_m$ ならば $m \in \mathcal{M}_n$ が送信されたものと判定する。このような操作を復号といい、これを表す写像 $\psi_n: \mathcal{Y}^n \rightarrow \mathcal{M}_n$ を復号器という。このような通報の復元は通信路出力にもとづいて行われるため、雑音のある通信路では図 1 において

$M \neq M'$ となることがある。これを復号誤りとよび、この確率を復号誤り確率とよんで ε_n と表す。通信を行う上で復号誤り確率が小さくなることは重要であるが、それだけではなく通信の効率も考える必要がある。通信の効率を測る尺度は符号化レートとよばれ、これは1回の通信でどれだけの情報量を送っているのかを表す。符号化レート r_n は符号語長を n とした場合

$$r_n = \frac{\log M_n}{n} \quad (12)$$

と表される。この2つを考慮し、復号誤り確率を0に近づけながら、符号化レートを大きくするとき、大きくできる符号化レートの上限は通信路を表す条件付き確率によって決まる。この上限を通信路容量とよび、これが通信路が持つ情報伝送の上限となる。通報集合 M_n のサイズが M_n 、誤り確率が ε_n である符号を (n, M_n, ε_n) 符号とよび、このとき通信路容量は次のように定義される。

定義 4

$$\begin{aligned} \text{レート } R \text{ が達成可能} &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \text{ かつ} \\ &\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \geq R \text{ なる} \\ &(n, M_n, \varepsilon_n) \text{ 符号が存在する} \end{aligned}$$

定義 5 通信路容量

$$C(P_{Y|X}) = \sup \{ R | R \text{ が達成可能} \}$$

これらの定義のもとで次の定理が成り立つ。

定理 1 定常無記憶通信路の通信路容量は

$$C(P_{Y|X}) = \max_{P_X} I(X; Y) \quad (13)$$

で与えられる。

このときの最大値を与えるような入力分布 P_X は、最適な入力分布とよばれる。

4 光子計数通信システムからポアソン通信路へ

本章では、本研究で扱う光子計数通信システムという物理的な通信システムについて文献 [2] に基づいて述べる。そして、この通信システムをポアソン通信路という確率モデルで表現する。

光子計数通信システムとは、光子の数によって情報伝送を行う通信方式である。図 2 は文献

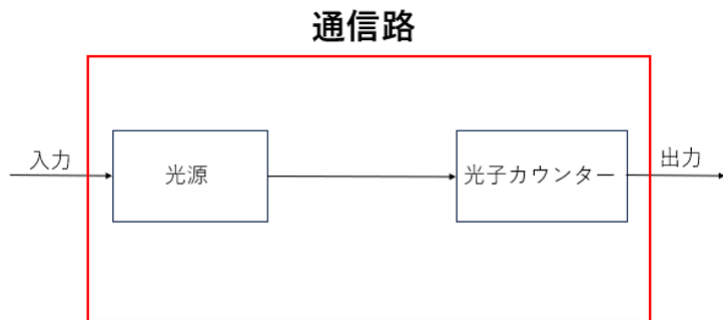


図 2: 光子計数通信システムのチャンネルモデル

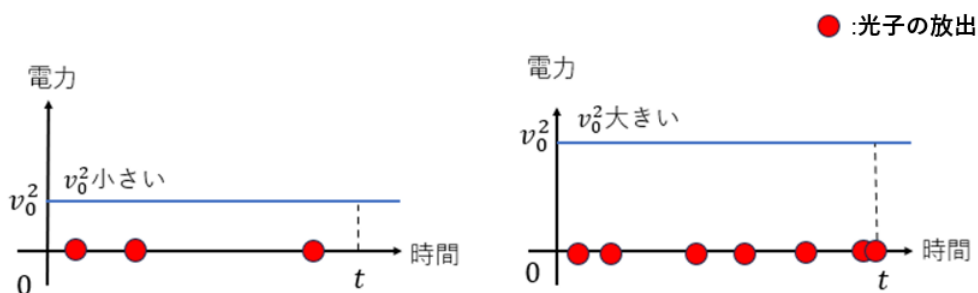


図 3: 光子の放出

[2] で使用されているチャンネルモデルをイメージとして図示したものである。光子計数通信システムでは、通信の送信側で電力が与えられることにより光源からランダムに光子が放出される。送信側で与えられる電力は v_0^2 で表され、単位時間当たりに放出される光子の期待値は、プランク定数 h 、周波数 f を用いて

$$n = \frac{v_0^2 t}{hf} \quad (14)$$

と表される。つまり、 n は v_0^2 に比例する値となり、与えられる電力が大きいほど放出される光子の数の期待値は大きくなる。図 3 は電力が与えられたときの光子の放出の一例を図示したものである。こうして放出された光子は伝送路を通過して光子カウンターへと向かい、受信側の光子カウンターによってカウントされる。光子カウンターで検出される光子の数を j とすると、検出される光子の数は、ポアソン分布

$$\Pr(j) = \frac{1}{j!} n^j e^{-n}, (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (15)$$

に従う．そこで，電力を与えることによって決まる値 n を通信路入力 x ，それによって確率的に決まる値 j を通信路出力 y として考えると，式 (15) は

$$P_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{y!} x^y e^{-x}, x \geq 0, y \in \mathbb{N} \cup 0 \quad (16)$$

と書くことができる．文献 [1] より，通信路の確率モデルが式 (16) で表されるような通信路をポアソン通信路とよぶ．このように，物理的な通信路である光子計数通信システムはポアソン通信路とよばれる確率モデルで表現することができる．

5 通信路容量の下界

本研究ではポアソン通信路の通信路容量の下界を算出する．ここではまず，通信路入力が最適な入力であるとは限らない指数分布に従うとして相互情報量が数学的にどのような式となるのかを導出する．そして，それをもとに数値的に相互情報量を算出する．通信路容量は相互情報量の最大値であったので，算出値は通信路容量の下界となる．これが本研究で明らかにしたい値である．

5.1 相互情報量の導出

本節では，通信路入力指数分布に従う場合の相互情報量を導出する．

式 (7) より，相互情報量を導出するには $H(Y)$ と $H(Y|X)$ を求める必要がある．さらに， $H(Y)$ と $H(Y|X)$ を求めるには P_X と P_Y を得る必要があり，まずこの 2 つについてまとめる．通信路入力はパラメータ λ の指数分布に従うとすると

$$P_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (17)$$

と書ける．また， X と Y の同時分布と周辺分布の関係より

$$P_Y(y) = \sum_x P_{XY}(x, y) \quad (18)$$

$$= \sum_x P_X(x) P_{Y|X}(y|x) \quad (19)$$

であり， x が非負の実数であることより，式 (19) に式 (16), (19) を代入して

$$P_Y(y) = \int_{x=0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} \cdot \frac{x^y e^{-x}}{y!} dx \quad (20)$$

$$= \frac{\lambda}{y!} \int_{x=0}^{\infty} x^y e^{-x(1+\lambda)} dx \quad (21)$$

となる。ここで、部分積分を行うことを考える。部分積分は

$$\int_b^a f(x)g(x)dx = \left[f(x)G(x) \right]_b^a - \int_b^a f'(x)G(x)dx \quad (22)$$

として考えることができ、ここでは $f(x) = x^y$, $g(x) = e^{-(1+x)}$ として部分積分を行う。これ以降、部分積分を行うときは式 (22) として計算する。 $f(x)$ を n 回微分したものを $f^{(n)}$, $g(x)$ を n 回積分したものを $G^{(n)}$ と表し、 $f(x)$ の次数が 0 になるまで $(y+1)$ 回の部分積分を行うことに注意すると

$$\int_{x=0}^{\infty} x^y e^{-x(1+\lambda)} dx \quad (23)$$

$$= \sum_{k=0}^y \left[f^{(k)} G^{(y+1-k)} \right]_0^{\infty} \quad (24)$$

$$= \left[-e^{-x(1+\lambda)} \left\{ \sum_{k=0}^y \frac{y! x^k}{k! (\lambda+1)^{y-k+1}} \right\} \right]_0^{\infty} \quad (25)$$

$$= \frac{y!}{(\lambda+1)^{y+1}} \quad (26)$$

となる。よって

$$P_Y(y) = \frac{\lambda}{(\lambda+1)^{y+1}} \quad (27)$$

となる。

次に、 $H(Y)$ と $H(Y|X)$ を求める。 $H(Y)$ は

$$H(Y) = \sum_{y=0}^{\infty} P_Y(y) \log \frac{1}{P_Y(y)} \quad (28)$$

$$= \sum_y \frac{\lambda}{(\lambda+1)^{y+1}} \log \frac{(\lambda+1)^{y+1}}{\lambda} \quad (29)$$

$$= \lambda \log(\lambda+1) \sum_y \frac{y+1}{(\lambda+1)^{y+1}} - \lambda \log \lambda \sum_y \frac{1}{(\lambda+1)^{y+1}} \quad (30)$$

$$= \lambda \log(\lambda+1) \cdot \frac{\lambda+1}{\lambda^2} - \lambda \log \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} \quad (31)$$

$$= \frac{\lambda+1}{\lambda} \log(\lambda+1) - \log \lambda \quad (32)$$

と求めることができる。次に、 $H(Y|X)$ は式 (4) より

$$H(Y|X) = \int_{x=0}^{\infty} P_X(x) H(Y|X=x) dx \quad (33)$$

と書ける．ここで， $H(Y|X = x)$ はポアソン分布のエントロピーと見なすことができるため

$$H(Y|X = x) = - \sum_{y=0}^{\infty} \frac{x^y e^{-x}}{y!} \log \left(\frac{x^y e^{-x}}{y!} \right) \quad (34)$$

$$= - \sum_{y=0}^{\infty} \frac{x^y e^{-x}}{y!} (-x) - \sum_{y=0}^{\infty} \frac{x^y e^{-x}}{y!} y \log x + \sum_{y=0}^{\infty} \frac{x^y e^{-x}}{y!} \log y! \quad (35)$$

と書ける．式 (35) の第 1 項は確率密度関数の総和が 1 となること，第 2 項はポアソン分布の期待値が x となることを利用して

$$\sum_{y=0}^{\infty} \frac{x^y e^{-x}}{y!} (-x) = -x \quad (36)$$

$$\sum_{y=0}^{\infty} \frac{x^y e^{-x}}{y!} y \log x = \log x \sum_{y=0}^{\infty} \frac{x^y e^{-x}}{y!} y = x \log x \quad (37)$$

となる．よって

$$H(Y|X = x) = x - x \log x + \sum_{y=0}^{\infty} \frac{x^y e^{-x}}{y!} \log y! \quad (38)$$

となり

$$H(Y|X) = \int_{x=0}^{\infty} \lambda e^{\lambda x} \left\{ x - x \log x + \sum_{y=0}^{\infty} \frac{x^y e^{-x}}{y!} \log y! \right\} dx \quad (39)$$

$$= \int_{x=0}^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx - \int_{x=0}^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} \log x dx + \int_{x=0}^{\infty} \lambda e^{-x(1+\lambda)} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{x^y}{y!} \log y! dx \quad (40)$$

となる．各項について考えると，第 1 項は部分積分より

$$\int_{x=0}^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \quad (41)$$

となる．第 2 項は第 1 項の結果を利用して

$$\int_{x=0}^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} \log x dx = \int_{x=0}^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} \log \lambda x dx - \int_{x=0}^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} \log \lambda dx \quad (42)$$

$$= \int_{x=0}^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} \log \lambda x dx - \frac{1}{\lambda} \log \lambda \quad (43)$$

となる．ここで $\lambda x = t$ とすると， $\lambda dx = dt$ ， x が $0 \rightarrow \infty$ のとき t は $0 \rightarrow \infty$ となるので，式 (43) の第 1 項は

$$\int_{x=0}^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} \log \lambda x dx = \frac{1}{\lambda} \int_{t=0}^{\infty} t e^{-t} \log t dt \quad (44)$$

と置換することができる。また、これは部分積分より、 $f(t) = te^{-t}$, $g(t) = \log t$ とすると

$$\int_{t=0}^{\infty} te^{-t} \log t dt \quad (45)$$

$$= \left[-(t+1)e^{-t} \log t \right]_0^{\infty} + \int_{t=0}^{\infty} \frac{(t+1)e^{-t}}{t} dt \quad (46)$$

となり、さらに第2項について $f(t) = (t+1)$, $g(t) = \frac{e^{-t}}{t}$ として部分積分を行うと

$$\int_{t=0}^{\infty} \frac{(t+1)e^{-t}}{t} dt = \left[-(t+1)\Gamma(0, t) \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \Gamma(0, t) dt \quad (47)$$

となる。ここに、 $\Gamma(z, p)$ は第二種不完全ガンマ関数である。 $\int_0^{\infty} \Gamma(0, t) dt$ は、 $f(t) = \Gamma(0, t)$, $g(t) = 1$ とすると

$$\int_0^{\infty} \Gamma(0, t) dt = \left[-t\Gamma(0, t) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-t} dt \quad (48)$$

$$= \left[-t\Gamma(0, t) - e^{-t} \right]_0^{\infty} \quad (49)$$

となる。よって、式(47),(49)より式(46)は、

$$\int_{t=0}^{\infty} te^{-t} \log t dt = \left[-e^{-t} \left\{ (t+1) \log t + e^t \Gamma(0, t) + 1 \right\} \right]_0^{\infty} \quad (50)$$

$$= \log 0 + \Gamma(0, 0) + 1 \quad (51)$$

と書ける。ここで

$$\Gamma(0, 0) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (52)$$

$$= \left[\log te^{-t} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-t} \log t dt \quad (53)$$

$$= -\log 0 - \gamma \quad (54)$$

である。ただし、 γ はオイラー定数である*1。これらの結果より

$$\int_{t=0}^{\infty} te^{-t} \log t dt = 1 - \gamma \quad (55)$$

となり、式(40)の第2項は

$$\int_{x=0}^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} \log x dx = \frac{1}{\lambda} (1 - \gamma - \log \lambda) \quad (56)$$

*1 オイラー定数の詳細については付録 A で示す。

となる．次に，第3項において和を分解し， $y = k$ の項を考える．式(26)の結果を利用すると

$$\int_{x=0}^{\infty} \lambda e^{-x(1+\lambda)} \frac{x^k}{k!} \log k! dx \quad (57)$$

$$= \frac{\lambda}{k!} \log k! \int_{x=0}^{\lambda} x^k e^{-x(1+\lambda)} dx \quad (58)$$

$$= \frac{\lambda}{k!} \log k! \cdot \frac{k!}{(\lambda+1)^{k+1}} \quad (59)$$

$$= \frac{\lambda}{(\lambda+1)^{k+1}} \log k! \quad (60)$$

となる．他の項も同様であるので

$$\int_{x=0}^{\infty} \lambda e^{-x(1+\lambda)} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \log k! dx = \lambda \sum_{y=2}^{\infty} \frac{\log y!}{(\lambda+1)^{y+1}} \quad (61)$$

となる．また

$$\sum_{y=2}^{\infty} \frac{\log y!}{(\lambda+1)^{y+1}} = \sum_{y=2}^{\infty} \frac{\sum_{k=2}^y \log k}{(\lambda+1)^{y+1}} = \sum_{y=2}^{\infty} \sum_{k=2}^y \frac{\log k}{(\lambda+1)^{y+1}} \quad (62)$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{y=k}^{\infty} \frac{\log k}{(\lambda+1)^{y+1}} = \sum_{k=2}^{\infty} \log k \sum_{y=k}^{\infty} \frac{1}{(\lambda+1)^{y+1}} \quad (63)$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \log k \cdot \frac{1}{\lambda(\lambda+1)^k} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log k}{(\lambda+1)^k} \quad (64)$$

と変形することができるため，

$$\int_{x=0}^{\infty} \lambda e^{-x(1+\lambda)} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \log k! dx = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log k}{(\lambda+1)^k} \quad (65)$$

となる．以上より， $H(Y|X)$ は式(40)に式(41),(56),(65)を代入することで

$$H(Y|X) = \frac{\gamma}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \log \lambda + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log k}{(\lambda+1)^k} \quad (66)$$

と求めることができる．よって，相互情報量 $I(X;Y)$ は

$$I(X;Y) = \frac{\lambda+1}{\lambda} \log \left(\frac{\lambda+1}{\lambda} \right) - \frac{\gamma}{\lambda} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log k}{(\lambda+1)^k} \quad (67)$$

となる．

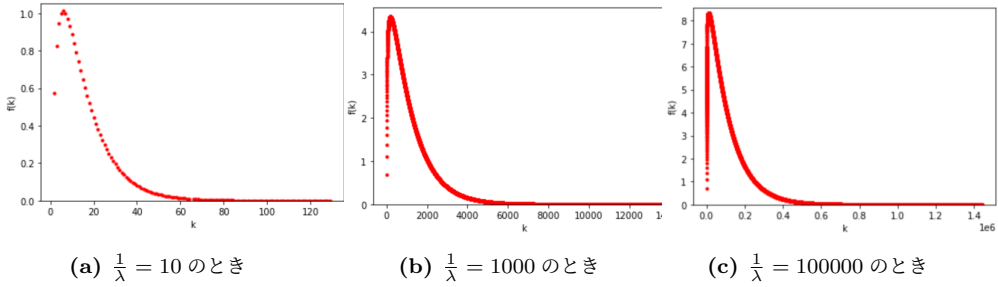


図 4: λ に値を代入したときの $f(k)$

5.2 相互情報量の誤差保証付き数値計算

前節では、ポアソン通信路に対して入力指数分布に従う場合の相互情報量を導出した。しかし、式 (67) には無限和の項があり、このままでは閉じた形にすることができない。そこで、本節ではこの無限和に対して近似を行い、誤差保証付きの相互情報量を算出する。ただし、本研究で導出した相互情報量は通信路容量の下界であるので、近似したものはもとの無限和よりも大きくなり、相互情報量が通信路容量を下から抑える値とならなければならない。加えて、相互情報量は常に 0 以上の値をとるため、近似したものが大きくなりすぎてはいけない。

まず、式 (67) の無限和の中の関数を λ を止めて考えるとして

$$f(k) \triangleq \frac{\log k}{(\lambda + 1)^k} \quad (68)$$

とする。近似の手段としてまず考えられるのは、 $f(k)$ を全ての k に対して $f(k) \leq g(k)$ が成り立つような $g(k)$ に置き換えることである。しかし、近似した後に和が閉じた形となり、相互情報量が常に 0 以上となるような $g(k)$ を見つけるのは難しい。そこで、別の近似の手段を考える。まず、 λ についていくつか値を代入して $f(k)$ をプロットしてみると図 4 のようになる。また、 $f(k)$ を k で微分すると

$$\frac{df(k)}{dk} = \frac{(\lambda + 1)^{-k} \{1 - k \log(\lambda + 1) \log k\}}{k} \quad (69)$$

となり、 $k \log(\lambda + 1) \log k$ は増加関数であることから $f(k)$ は極値をとったあと、単調減少となることがわかる。これらのことから、相互情報量に与える影響が大きい部分までを $f(k)$ で計算し、それ以降を $f(k) \leq g(k)$ が成り立つような $g(k)$ に置き換えて計算することで有効な手段となる。このときの閾値を α とし、

$$g(k) = \frac{\log \alpha + \frac{k - \alpha}{\alpha}}{(\lambda + 1)^k} \quad (70)$$

とすると以下が成り立つ.

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log k}{(\lambda+1)^k} \leq \sum_{k=2}^{\alpha} \frac{\log k}{(\lambda+1)^k} + \sum_{k=\alpha+1}^{\infty} \frac{\log \alpha + \frac{k-\alpha}{\alpha}}{(\lambda+1)^k} \quad (71)$$

ここで

$$\sum_{k=\alpha+1}^{\infty} \frac{\log \alpha + \frac{k-\alpha}{\alpha}}{(\lambda+1)^k} = (\log \alpha - 1) \sum_{k=\alpha+1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda+1)^k} + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=\alpha+1}^{\infty} \frac{k}{(\lambda+1)^k} \quad (72)$$

$$= (\log \alpha - 1) \cdot \frac{1}{\lambda(\lambda+1)^{\alpha}} + \frac{1}{\alpha} \cdot \left\{ \frac{1}{\lambda^2(\lambda+1)^{\alpha-1}} + \frac{\alpha}{\lambda(\lambda+1)^{\alpha}} \right\} \quad (73)$$

$$= \frac{\log \alpha}{\lambda(\lambda+1)^{\alpha}} + \frac{1}{\lambda^2 \alpha (\lambda+1)^{\alpha-1}} \quad (74)$$

であるので

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log k}{(\lambda+1)^k} \leq \sum_{k=2}^{\alpha} \frac{\log k}{(\lambda+1)^k} + \frac{\log \alpha}{\lambda(\lambda+1)^{\alpha}} + \frac{1}{\lambda^2 \alpha (\lambda+1)^{\alpha-1}} \quad (75)$$

となる. これをもとに, 式 (67) において無限和を置き換えた関数を

$$h_1(\lambda) = \frac{\lambda+1}{\lambda} \log \left(\frac{\lambda+1}{\lambda} \right) - \frac{\gamma}{\lambda} - \sum_{k=2}^{\alpha} \frac{\log k}{(\lambda+1)^k} - \frac{\log \alpha}{\lambda(\lambda+1)^{\alpha}} - \frac{1}{\lambda^2 \alpha (\lambda+1)^{\alpha-1}} \quad (76)$$

と定義する. また, もとの無限和を, 閾値 α までのみの和で置き換えた関数を

$$h_2(\lambda) = \frac{\lambda+1}{\lambda} \log \left(\frac{\lambda+1}{\lambda} \right) - \frac{\gamma}{\lambda} - \sum_{k=2}^{\alpha} \frac{\log k}{(\lambda+1)^k} \quad (77)$$

と定義する. この2つの関数を用いると

$$h_1(\lambda) \leq I(X; Y) \leq h_2(\lambda) \quad (78)$$

が成り立つことがわかり, $h_1(\lambda)$ は通信路容量の下界, $h_2(\lambda)$ はその上界となる. 相互情報量の真値は $h_1(\lambda)$ と $h_2(\lambda)$ の間にあるため, 2つの関数の差分を小さくすることで精度の高い通信路容量の下界を算出することが可能となる. この差分は式 (74) であり, 差分を小さくするには適切に α を設定する必要がある. そこで, 許容する誤差を ε とし, どこまで誤差保証を行いたいかを λ で定め, 不等式

$$\frac{\log \alpha}{\lambda(\lambda+1)^{\alpha}} + \frac{1}{\lambda^2 \alpha (\lambda+1)^{\alpha-1}} < \varepsilon \quad (79)$$

を満たすような α を設定する. これにより必要とされる精度の通信路容量の下界を算出することができる.

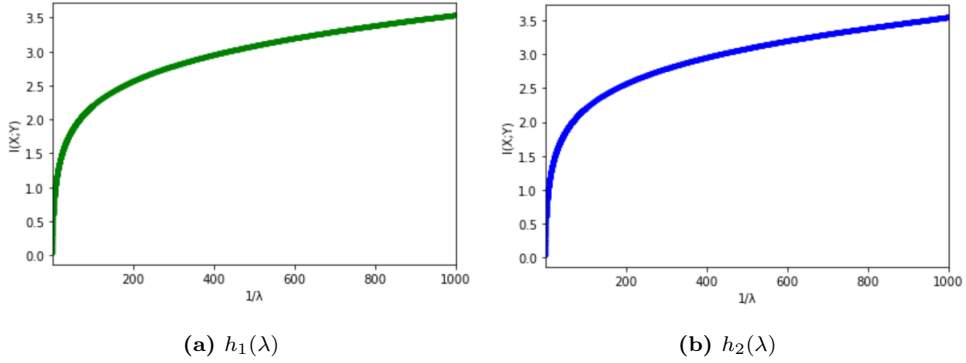


図 5: $\varepsilon = 0.01, \frac{1}{\lambda} = 1000$ のときの通信路容量の下界

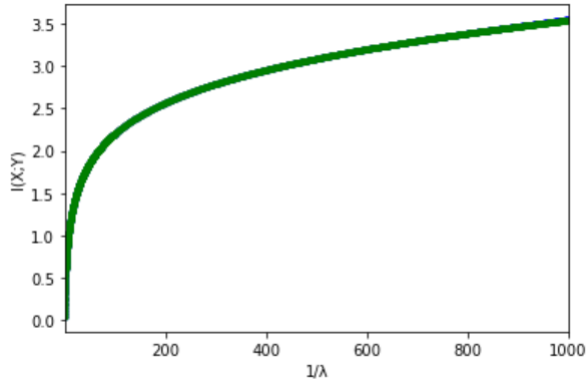


図 6: $h_1(\lambda)$ と $h_2(\lambda)$ を同時にプロットしたものの

ここで、この α の設定により通信路容量の下界をグラフにして見ることを考える。光子計数通信システムで光子を送るのに電力が必要だったように、情報を送る際には電力が必要となる。ポアソン通信路では電力は X の期待値で測定され [1]、本研究の入力分布である指数分布の期待値 $\frac{1}{\lambda}$ は電力と見なすことができる。そこで、横軸を電力 $\frac{1}{\lambda}$ 、縦軸を相互情報量 $I(X;Y)$ としてグラフを作成する。 $\frac{1}{\lambda} = 1000$ までの通信路容量の下界を誤差 0.01 まで許すとして α を設定すると $h_1(\lambda)$ と $h_2(\lambda)$ はそれぞれ図 5 のようにプロットできる。また、2 つを同時にプロットしたものを図 6 に示す。2 つのグラフはほとんど一致しており、 α の設定により想定する誤差で通信路容量の下界を求めていることができていくとわかる。このグラフは $\frac{1}{\lambda}$ を止めて見ることにより、電力を制約したもとでどれだけの情報伝送が可能であるかを表しており、電力制約付きの通信路容量の下界となる。

次に、電力当たりで見ると通信路容量の下界がどうなっているのかを見る。これは、 $h_1(\lambda)$

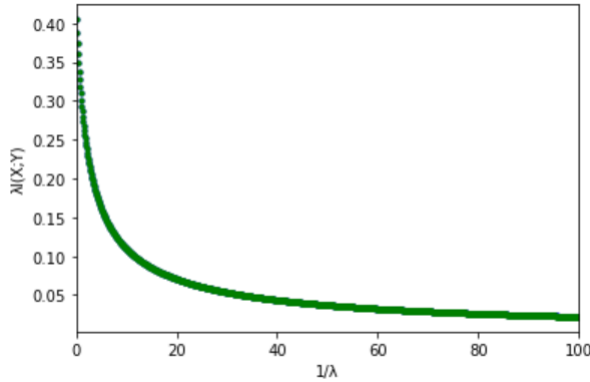


図 7: 電力当たり相互情報量

を電力 $\frac{1}{\lambda}$ で割ることにより得ることができるので、横軸を電力 $\frac{1}{\lambda}$ 、縦軸を電力当たりの相互情報量 $\lambda I(X;Y)$ としてグラフを作成すると図 7 のようになる。このグラフは単調減少となっており、電力が 0 付近で最大値となることがわかる。そして、この最大値が電力当たりの通信路容量の下界となる。よって、電力当たりの通信路容量の下界は

$$\lim_{\frac{1}{\lambda} \rightarrow 0} \lambda h_1(\lambda) = 1 - \gamma \quad (80)$$

$$\simeq 0.423 \text{ ビット/エネルギー} \quad (81)$$

となる。これより、ポアソン通信路では通信 1 回のエネルギーあたりでおよそ 0.423bit の情報を伝送できることが明らかになった。

6 まとめ

本研究では、通信路入力指数分布に従うと仮定し、そのときの通信路入出力 X と Y の間の相互情報量を導出した。無限和の存在により相互情報量の真値を求めることはできなかったが、誤差保証付きの近似を行うことで電力制約付きの通信路容量の下界と電力当たりの通信路容量の下界の 2 つの通信路容量の下界を得ることができた。しかし、本研究で算出した通信路容量の下界はどれだけタイトであるかを考慮していない。今後は、よりタイトな通信路容量の下界を算出できるように研究を進めていく。

謝辞

本研究の遂行にあたり、指導教官として終始多大なご指導を賜った、西新幹彦准教授に深謝いたします。

参考文献

- [1] A. Dytso, L. Barletta, and S. Shamai (Shitz), “Amplitude Constrained Poisson Noise Channel: Properties of the Capacity-Achieving Input Distribution,” *IEEE Information Theory Workshop(ITW)*, 2021.
- [2] J. R. Pierce, E. C. Posner, and E. R. Rodemich, “The Capacity of the Photon Counting Channel,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. IT-27, no.1, pp61-77, 1981.
- [3] 韓 太舜, 情報理論における情報スペクトル的方法, 培風館, 1998.
- [4] 森口繁一, 宇田川銈久, 一松信, 岩波 数学公式 *III*, 岩波書店, 2007.

付録 A オイラー定数

オイラー定数は数学定数のひとつで

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right) \quad (82)$$

と定義され

$$\gamma = 0.577215664\dots \quad (83)$$

である．オイラー定数にはいくつかの積分表示があり，そのうちのひとつを導出する．そのためにはまず，ガンマ関数 $\Gamma(z)$ とディ・ガンマ関数 $\psi(z)$ を定義しなければならない．ガンマ関数とその導関数は以下のように定義される．

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad [\Re z > 0] \quad (84)$$

$$\Gamma'(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} (\log t) dt \quad [\Re z > 0] \quad (85)$$

また，ディ・ガンマ関数はガンマ関数の対数微分であり

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \log \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \quad (86)$$

と定義される．文献 [5] より，オイラー定数 $\gamma = -\psi(1)$ であるから

$$\gamma = -\psi(1) \quad (87)$$

$$= -\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} \quad (88)$$

$$= -\int_0^{\infty} e^{-t} \log t dt \quad (89)$$

となる．