

信州大学
大学院総合理工学研究科

修士論文

雑音を含んで観測される
一般情報源に対するレート歪み理論

指導教員 西新 幹彦 准教授

専攻 工学専攻
分野 電子情報システム工学分野
学籍番号 22W2026J
氏名 金子 歩夢

2024年3月30日

目次

1	はじめに	1
2	数学的準備	1
3	レート歪み理論	2
3.1	固定長平均歪みの達成可能性とレート歪み関数 R_{fa}	3
3.2	可変長平均歪みの達成可能性とレート歪み関数 R_{va}	4
4	観測値に雑音のあるシステムのレート歪み理論	4
4.1	固定長平均歪み	5
4.2	可変長平均歪み	7
4.3	固定長最大歪み	8
4.4	可変長最大歪み	11
5	確率的歪みと符号語長の分布	12
5.1	順定理	14
5.2	逆定理	17
5.3	符号化定理	18
6	まとめ	19
	謝辞	20
	参考文献	20

1 はじめに

電話のように音声を届ける時，データサイズが大きいのので聞いたときに影響の少ない音を除去して送信するが，除去した量が多いほど元の情報との差異が大きくなる．この差異のことを歪みという．元の情報と受信者が受け取る情報に歪みを許容すれば，符号化レートが下げられる．この時，歪みと符号化レートはトレードオフの関係にあることから，問題は予め与えられた歪みの範囲内で符号化レートをどこまで小さくできるかという形に定式化される．本論文ではこのようなレート歪み問題を扱う [1]．

一方，近年，IoTの進化がモノとインターネットをつなげ，今では家庭やオフィスビル，工場，さらには都市までありとあらゆるものがネットワークに繋がるようになった．センサはデータを収集し活用する上で重要な役割を担っている．センサによって，あらゆる場でデータが収集されさまざまな領域に利用され，離れたモノの状態を計測したり，モノと受信機間の電波強度を測ることにより大まかな距離を知ることができる．しかし，センサの感度などの性能には限界があるため，得られる情報は正確ではなく，いくらかの雑音が含まれた形で観測されることがある．そして，その情報を受信者へと送るが受信者に届く直前にも雑音が入る場合がある．Berger[2]は，この問題を雑音のあるレート歪み問題として定式化し，定常無記憶情報源に対する符号化定理を明らかにした．具体的には，与えられた雑音と歪み測度から新たな歪み測度を定義し，その歪み測度を用いることで，雑音のない通常のレート歪み問題に帰着することを示した．

本論文では一般情報源に対する雑音のあるレート歪み問題の符号化定理を導出する．この問題には2種類の符号化法と2種類の歪み制約の組み合わせで4種類の問題設定が存在する．本論文は4種類すべてについて雑音のない問題設定に帰着することを示す．加えて，雑音のない通常のレート歪み問題に対して可変長最大歪みの場合の符号化定理を証明する．

本論文は次のような章から構成される．はじめに，2章では情報源符号化について，数学的に準備をする．3章でレート歪み理論について述べる．4章ではBerger[2]が導入した2か所に雑音が入る通信モデルを一般情報源に拡張し，4通りのレート歪み理論すべてについて考察する．最後に5章で確率的歪みに対して最大歪み制約を適用し，さらに分布を制約する可変長符号化を適用したレート歪み問題を解く．

2 数学的準備

本論文では一般情報源について考える．情報源アルファベットを \mathcal{X} とする．一般情報源 \mathbf{X} とは \mathcal{X}^n 上の任意の確率分布 $P_{\mathbf{X}^n}$ をもつ確率変数 X^n の列である．それゆえ $\mathbf{X} = \{X^n\}_{n=1}^{\infty}$

と表す. 一般情報源は定常無記憶情報源の一般化になっており, 非定常情報源や記憶のある情報源を含んでいる.

定義 1 確率変数列 $\{Z_n\}_{n=1}^\infty$ に対して

$$p\text{-}\limsup_{n \rightarrow \infty} Z_n \triangleq \inf \left\{ \xi \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\{Z_n > \xi\} = 0 \right\} \quad (1)$$

と定義する. これを確率の上極限と呼ぶ.

さらに2つの確率変数列 \mathbf{X}, \mathbf{Y} について次を定義する.

定義 2 \mathbf{X} と \mathbf{Y} に対して

$$I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \triangleq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{1}{n} \log \frac{P_{Y^n|X^n}(Y^n|X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} \right] \quad (2)$$

$$\bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \triangleq p\text{-}\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{P_{Y^n|X^n}(Y^n|X^n)}{P_{Y^n}(Y^n)} \quad (3)$$

とする. 本論文では, 対数の底は符号アルファベットのサイズとする. Y^n は X^n と任意の相関を有してもよい.

3 レート歪み理論

本章では, 雑音のあるレート歪み問題を考える準備として, 雑音のない通常のレート歪み理論について知られている結果を確認する.

情報源アルファベットを \mathcal{X} , 復号アルファベットを \mathcal{Y} とする. 長さ n の系列に対する歪み測度を関数 $d_n : \mathcal{X}^n \times \mathcal{Y}^n \rightarrow [0, +\infty)$ と定め, $d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n, \mathbf{y} \in \mathcal{Y}^n)$ を \mathbf{x} と \mathbf{y} の間の歪みと呼ぶ. すると, 情報源 1 文字あたりの歪みは

$$\frac{1}{n} d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0 \quad (4)$$

で与えられる. 歪み測度の列を $\mathbf{d} \triangleq \{d_n\}_{n=1}^\infty$ と表す. 本章で扱う問題の概略図を図 1 に示す.

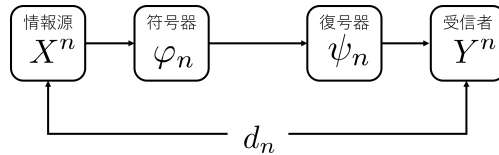


図 1 雑音のない通信モデル

一般情報源に対するレート歪み問題は、符号化が固定長か可変長であるかの2通りに分かれ、歪み制約が平均歪みか最大歪みでさらに2通りに分かれる。つまり、4通りの問題設定がある。3.1節と3.2節では平均歪みを用いた2通りの問題設定を各節1つずつ確認する。

3.1 固定長平均歪みの達成可能性とレート歪み関数 R_{fa}

本節では固定長符号化を考える。 M_n 個の符号語の集合を $\mathcal{M}_n \triangleq \{1, 2, \dots, M_n\}$ とする。そして、符号化を符号器 $\varphi_n: \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{M}_n$ によって定め、復号化を復号器 $\psi_n: \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{Y}^n$ によって定める。ここで、 $\frac{1}{n} \log M_n$ は符号化レートと呼ばれる。情報源の出力 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n$ は符号器 φ_n によって符号化されたあと復号器 ψ_n によって復元される。このような符号化を固定長符号化と呼ぶ。情報源系列と復号系列の間の歪みを次の量によって定義する。

定義 3 \mathbf{X}, \mathbf{Y} に対して

$$D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \triangleq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{1}{n} d_n(X^n, Y^n) \right] \quad (5)$$

と定義する。これを \mathbf{X} と \mathbf{Y} の間の平均歪みと呼ぶ。

このように、平均歪みを制約した固定長符号化問題を固定長平均歪み問題と呼ぶ。固定長平均歪み問題は以下のように定式化される。

定義 4 レート歪み領域の点 (R, D) が \mathbf{d} -達成可能とは

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{1}{n} d_n(X^n, Y^n) \right] \leq D \quad (6)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \leq R \quad (7)$$

を満たす符号 (ψ_n, φ_n) が存在することである。ただし、 $Y^n = \psi_n(\varphi_n(X^n))$ である。

定義 5 固定長平均歪みのレート歪み関数を

$$R_{\text{fa}}(D|\mathbf{X}, \mathbf{d}) \triangleq \inf\{R \mid \text{情報源 } \mathbf{X} \text{ に対して } (R, D) \text{ が } \mathbf{d}\text{-達成可能}\} \quad (8)$$

と定義する。

定義2の式(3)で定義された $\bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$ と定義3の式(5)で定義された $D(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ を用いて、次の定理が成り立つことが知られている。

定理 1 ([1]) 一般情報源 \mathbf{X} に対する固定長平均歪みのレート歪み関数は

$$R_{\text{fa}}(D|\mathbf{X}, \mathbf{d}) = \inf_{\mathbf{Y}: D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D} \bar{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (9)$$

で与えられる。

3.2 可変長平均歪みの達成可能性とレート歪み関数 R_{va}

本節では次のような符号化を考える。符号器は符号化関数 $\varphi_n : \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{U}^*$ で定められる可変長符号器である。ただし、 $\mathcal{U} = \{1, 2, \dots, K\}$ は符号アルファベットであり、 $\varphi_n(\mathcal{X}^n)$ は \mathcal{U} 上の語頭符号をなすものとする。復号器は復号化関数 $\psi_n : \mathcal{U}^* \rightarrow \mathcal{Y}^n$ によって定められる。そして、情報源 1 文字あたりの平均符号語長は $\frac{1}{n}\mathbb{E}[\text{len } \varphi_n(X^n)]$ と表す。ただし、 $\text{len } \varphi_n(X^n)$ は符号語 $\varphi_n(X^n)$ の長さを表す。平均歪みによって制約をした可変長符号化問題を可変長平均歪み問題と呼ぶことにする。可変長平均歪み問題は次のように定式化される。

定義 6 レート歪み領域の点 (R, D) が \mathbf{d} -達成可能とは

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{1}{n} d_n(X^n, Y^n) \right] \leq D \quad (10)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{1}{n} \text{len } \varphi_n(X^n) \right] \leq R \quad (11)$$

を満たす符号 (ψ_n, φ_n) が存在することである。ただし、 $Y^n = \psi_n(\varphi_n(X^n))$ である。

定義 7 レート歪み関数を

$$R_{\text{va}}(D|\mathbf{X}, \mathbf{d}) \triangleq \inf \{ R \mid \text{情報源 } \mathbf{X} \text{ に対して } (R, D) \text{ が } \mathbf{d}\text{-達成可能} \} \quad (12)$$

と定義する。

定義 2 の式 (2) で定義された $I(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$ と定義 3 式 (5) で定義された $D(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ を用いて、次の定理が成り立つことが知られている。

定理 2 ([1]) 一般情報源 \mathbf{X} に対する可変長平均歪みのレート歪み関数は

$$R_{\text{va}}(D|\mathbf{X}, \mathbf{d}) = \inf_{\mathbf{Y}: D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D} I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (13)$$

で与えられる。

4 観測値に雑音のあるシステムのレート歪み理論

3章で雑音のない通常のレート歪み理論を確認した。本章では3章で用いた通信モデルの2か所に雑音が入るレート歪み理論について示す。具体的には、情報源から出力されたシンボルは符号器 φ_n に入力される前に雑音の影響を受けるとする。また、復号器 ψ_n で復号された情報が受信者に届く前にも雑音加わるモデルを考える。

情報源から出力される系列 X^n は符号器 φ_n に届く前に \tilde{X}^n に変換される。この変換は、確率 $P_{\tilde{X}^n|X^n}(\tilde{\mathbf{x}}|\mathbf{x})$ で行われる。 \tilde{X}^n は符号器 φ_n で符号化され、復号器 ψ_n へと送られる。復号器 ψ_n へと送られた符号語は、復号され \tilde{Y}^n となる。さらに、 \tilde{Y}^n は雑音加わることから Y^n へと確率 $P_{Y^n|\tilde{Y}^n}(\mathbf{y}|\tilde{\mathbf{y}})$ で変換され受信者の元へ送られる。受信者に届いたものを Y^n とする。この問題の概略図を図 2 に示す。

4.1 固定長平均歪み

本節では 3.1 節で述べた固定長平均歪み問題を雑音がある問題に拡張して考える。このような問題は次のように定式化される。

定義 8 雑音のもとでレート歪み領域の点 (R, D) が \mathbf{d} -達成可能とは

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{1}{n} d_n(X^n, Y^n) \right] \leq D \quad (14)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \leq R \quad (15)$$

となるような符号 (ψ_n, φ_n) が存在することである。

定義 9 レート歪み関数を

$$R'_{\text{fa}}(D|\mathbf{X}, \mathbf{d}) \triangleq \inf \{ R | \text{情報源 } \mathbf{X} \text{ に対して雑音のもとで } (R, D) \text{ が } \mathbf{d}\text{-達成可能} \} \quad (16)$$

と定義する。

定義 10 与えられた歪み測度 d_n を用いて、 $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}^n$ と $\tilde{\mathbf{y}} \in \mathcal{Y}^n$ の間の歪みとして

$$\tilde{d}_n(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) \triangleq \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} P_{X^n|\tilde{X}^n}(\mathbf{x}|\tilde{\mathbf{x}}) P_{Y^n|\tilde{Y}^n}(\mathbf{y}|\tilde{\mathbf{y}}) d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (17)$$

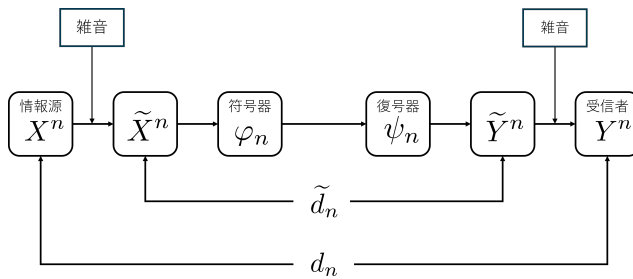


図 2 雑音のある通信モデル

を定義する。ただし、

$$P_{X^n|\tilde{X}^n}(\mathbf{x}|\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{1}{P_{\tilde{X}^n}(\tilde{\mathbf{x}})} P_{X^n}(\mathbf{x}) P_{\tilde{X}^n|X^n}(\tilde{\mathbf{x}}|\mathbf{x}) \quad (18)$$

である。\$\mathbf{X}\$ から \$\mathbf{Y}\$ に至る過程の 2 ヶ所で雑音が混入するが、この歪み測度は、雑音の影響を歪みとして繰り入れた上で \$\tilde{\mathbf{X}}\$ と \$\tilde{\mathbf{Y}}\$ の間の歪みを測るために定義される。

定義 11 \$\tilde{\mathbf{d}}\$ には雑音と歪み測度 \$\mathbf{d}\$ が含まれている。この雑音がある場合の平均歪みを

$$\tilde{D}(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) \triangleq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{1}{n} \tilde{d}_n(\tilde{X}^n, \tilde{Y}^n) \right] \quad (19)$$

と定義する。

以上のもと、雑音のある場合のレート歪み関数は、次の定理のように、雑音のない場合のレート歪み関数として表すことができる。

定理 3 ([3]) 雑音がある場合のレート歪み関数は

$$R'_{\text{fa}}(D|\mathbf{X}, \mathbf{d}) = R_{\text{fa}}(D|\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{d}}) \quad (20)$$

で与えられる。

[証明] \$d_n\$ の期待値は

$$\mathbb{E}[d_n(X^n, Y^n)] = \sum_{\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}}} P_{X^n, \tilde{X}^n, Y^n, \tilde{Y}^n}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}}) d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (21)$$

$$= \sum_{\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}}} P_{X^n}(\mathbf{x}) P_{\tilde{X}^n|X^n}(\tilde{\mathbf{x}}|\mathbf{x}) P_{Y^n|\tilde{X}^n}(\mathbf{y}|\tilde{\mathbf{x}}) P_{Y^n|\tilde{Y}^n}(\mathbf{y}|\tilde{\mathbf{y}}) d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (22)$$

$$= \sum_{\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}} P_{\tilde{Y}^n|\tilde{X}^n}(\tilde{\mathbf{y}}|\tilde{\mathbf{x}}) \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} P_{X^n, \tilde{X}^n}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) P_{Y^n|\tilde{Y}^n}(\mathbf{y}|\tilde{\mathbf{y}}) d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (23)$$

$$= \sum_{\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}} P_{\tilde{Y}^n|\tilde{X}^n}(\tilde{\mathbf{y}}|\tilde{\mathbf{x}}) P_{\tilde{X}^n}(\tilde{\mathbf{x}}) \tilde{d}_n(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) \quad (24)$$

$$= \sum_{\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}} P_{\tilde{X}^n, \tilde{Y}^n}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) \tilde{d}_n(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) \quad (25)$$

$$= \mathbb{E}[\tilde{d}_n(\tilde{X}^n, \tilde{Y}^n)] \quad (26)$$

となる。式 (24) は定義 10 を用いることで導出できる。したがって、定義 10 は

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{1}{n} \tilde{d}_n(\tilde{X}^n, \tilde{Y}^n) \right] \leq D \quad (27)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \leq R \quad (28)$$

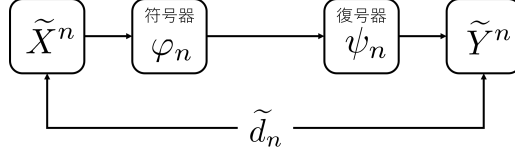


図3 雑音のない通信モデル

と書き直すことができる. すると, この問題設定は図3のように雑音のない通信モデルになる. これは3.1節で述べた雑音のない問題に帰着したことを意味する. そのため, レート歪み関数は

$$R'_{\text{fa}}(D|\mathbf{X}, \mathbf{d}) = \inf\{R \mid \text{情報源 } \mathbf{X} \text{ に対して雑音のもとで } (R, D) \text{ が } \mathbf{d}\text{-達成可能}\} \quad (29)$$

$$= \inf\{R \mid \text{情報源 } \tilde{\mathbf{X}} \text{ に対して } (R, D) \text{ が } \tilde{\mathbf{d}}\text{-達成可能}\} \quad (30)$$

$$= R_{\text{fa}}(D|\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{d}}) \quad (31)$$

となる. \square

定理1と定理3から直ちに次の系を得る.

系1 雑音のある場合のレート歪み関数は,

$$R'_{\text{fa}}(D|\mathbf{X}, \mathbf{d}) = \inf_{\tilde{\mathbf{Y}}: \bar{D}(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) \leq D} \bar{I}(\tilde{\mathbf{X}}; \tilde{\mathbf{Y}}) \quad (32)$$

となる.

4.2 可変長平均歪み

ここでは3.2節で述べた可変長平均歪み問題を雑音がある問題に拡張して, 前節と同じ論法で証明する. 前節では, まず達成可能性を定め, 平均歪みが与えられた歪み D 以下か判断する式(14)に着目した. 歪み測度 d_n と2か所の雑音の内側で測る歪み測度 \tilde{d}_n の平均歪みが等価であることを用いることで証明された. 本節は前節と同様に平均歪みに着目する.

定義12 雑音のもとでレート歪み領域の点 (R, D) が \mathbf{d} -達成可能とは

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{1}{n} d_n(X^n, Y^n) \right] \leq D \quad (33)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{1}{n} \text{len } \varphi_n(\tilde{X}^n) \right] \leq R \quad (34)$$

を満たす符号 (ψ_n, φ_n) が存在することである.

定義 13 レート歪み関数を

$$R'_{\text{va}}(D|\mathbf{X}, \mathbf{d}) \triangleq \inf\{R \mid \text{情報源 } \mathbf{X} \text{ に対して雑音のもとで } (R, D) \text{ が } \mathbf{d}\text{-達成可能}\} \quad (35)$$

と定義する.

以上のもと, 雑音のある場合のレート歪み関数は, 次の定理のように, 雑音のない場合のレート歪み関数として表すことができる.

定理 4 ([3]) 雑音がある場合のレート歪み関数は,

$$R'_{\text{va}}(D|\mathbf{X}, \mathbf{d}) = R_{\text{va}}(D|\widetilde{\mathbf{X}}, \widetilde{\mathbf{d}}) \quad (36)$$

となる.

[証明] 式 (26) を用いると定義 12 の式 (33) は

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{1}{n} \widetilde{d}_n(\widetilde{X}^n, \widetilde{Y}^n) \right] \leq D \quad (37)$$

と書き直すことができる. すると, この問題設定は図 3 のように雑音のない通信モデルになる. これは 3.2 節で述べた雑音のない問題設定に帰着したことを意味する. そのためレート歪み関数は

$$R'_{\text{va}}(D|\mathbf{X}, \mathbf{d}) = \inf\{R \mid \text{情報源 } \mathbf{X} \text{ に対して雑音のもとで } (R, D) \text{ が } \mathbf{d}\text{-達成可能}\} \quad (38)$$

$$= \inf\{R \mid \text{情報源 } \widetilde{\mathbf{X}} \text{ に対して } (R, D) \text{ が } \widetilde{\mathbf{d}}\text{-達成可能}\} \quad (39)$$

$$= R_{\text{va}}(D|\widetilde{\mathbf{X}}, \widetilde{\mathbf{d}}) \quad (40)$$

となる. □

定理 2 と定理 4 から直ちに次の系を得る.

系 2 雑音のある場合のレート歪み関数は,

$$R'_{\text{va}}(D|\mathbf{X}, \mathbf{d}) = \inf_{\widetilde{\mathbf{Y}}: \widetilde{D}(\widetilde{\mathbf{X}}, \widetilde{\mathbf{Y}}) \leq D} I(\widetilde{\mathbf{X}}; \widetilde{\mathbf{Y}}) \quad (41)$$

となる.

4.3 固定長最大歪み

ここでは, 図 4 に示す通信モデルを考える. 本節では 3.1 節で述べた固定長平均歪み問題を雑音がある問題に拡張して考える. 歪み制約は以下で説明する最大歪みを用いて考える. これ

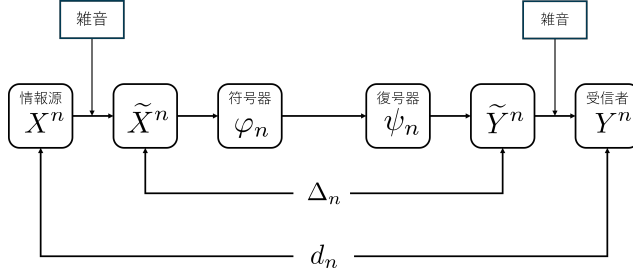


図4 通信モデル

を固定長最大歪み問題と呼ぶ.

ここで新たな歪み測度を導入する. $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}^n$ と $\tilde{\mathbf{y}} \in \mathcal{Y}^n$ の間の歪み測度 $\Delta_n(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ を考え, その分布は $X^n, \tilde{X}^n, Y^n, \tilde{Y}^n, d_n$ を用いた条件付き分布で定義する. これを確率的歪みと呼ぶ.

定義 14 確率的歪みの分布を

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} \Delta_n(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) \leq d \right\} \triangleq \Pr \left\{ \frac{1}{n} d_n(X^n, Y^n) \leq d \mid \tilde{X}^n = \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{Y}^n = \tilde{\mathbf{y}} \right\} \quad (42)$$

と定義する. また, $\Delta_n(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ と \tilde{X}^n, \tilde{Y}^n は独立であると仮定する.

定義 15 \mathbf{X}, \mathbf{Y} に対して

$$\bar{\Delta}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \text{p-lim sup}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \Delta_n(X^n, Y^n) \quad (43)$$

と定義する. これを \mathbf{X} と \mathbf{Y} の間の最大歪みと呼ぶ.

固定長最大歪み問題を以下のように定式化する.

定義 16 雑音のもとでレート歪み領域の点 (R, D) が \mathbf{d} -達成可能とは

$$\text{p-lim sup}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} d_n(X^n, Y^n) \leq D \quad (44)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \leq R \quad (45)$$

となるような符号 (ψ_n, φ_n) が存在することである.

定義 17 レート歪み関数を

$$R'_{\text{fm}}(D | \mathbf{X}, \mathbf{d}) \triangleq \inf \{ R \mid \text{情報源 } \mathbf{X} \text{ に対して雑音のもとで } (R, D) \text{ が } \mathbf{d}\text{-達成可能} \} \quad (46)$$

と定義する.

そして、本節では次の定理を導く。

定理 5 雑音がある場合のレート歪み・関数は

$$R'_{\text{fm}}(D|\mathbf{X}, \mathbf{d}) = R_{\text{fm}}(D|\tilde{\mathbf{X}}, \Delta) \quad (47)$$

で与えられる。

[証明] $\frac{1}{n}d_n(X^n, Y^n)$ の分布を求めると

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n}d_n(X^n, Y^n) \leq d \right\} \quad (48)$$

$$= \sum_{\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}} \Pr \left\{ \frac{1}{n}d_n(X^n, Y^n) \leq d, \tilde{X}^n = \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{Y}^n = \tilde{\mathbf{y}} \right\} \quad (49)$$

$$= \sum_{\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}} \Pr \left\{ \tilde{X}^n = \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{Y}^n = \tilde{\mathbf{y}} \right\} \Pr \left\{ \frac{1}{n}d_n(X^n, Y^n) \leq d | \tilde{X}^n = \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{Y}^n = \tilde{\mathbf{y}} \right\} \quad (50)$$

$$= \sum_{\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}} \Pr \left\{ \tilde{X}^n = \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{Y}^n = \tilde{\mathbf{y}} \right\} \Pr \left\{ \frac{1}{n}\Delta_n(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) \leq d \right\} \quad (51)$$

$$= \sum_{\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}} \Pr \left\{ \frac{1}{n}\Delta_n(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) \leq d, \tilde{X}^n = \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{Y}^n = \tilde{\mathbf{y}} \right\} \quad (52)$$

$$= \Pr \left\{ \frac{1}{n}\Delta_n(\tilde{X}^n, \tilde{Y}^n) \leq d \right\} \quad (53)$$

となる。したがって達成可能とは、

$$\text{p-lim sup}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}\Delta_n(\tilde{X}^n, \tilde{Y}^n) \leq D \quad (54)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \leq R \quad (55)$$

となる符号が存在することでもある。歪み測度 \mathbf{d} のもとで達成可能かどうかは、歪み測度 Δ のもとで達成可能かどうかかわかればよい。この問題設定を図5に示す。

これは、確率的歪みを用いた雑音のない問題設定に帰着したことを意味する。そのため、

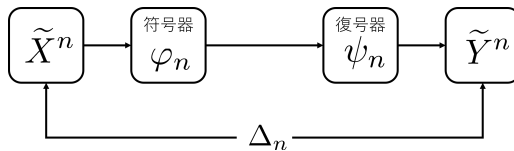


図5 確率的歪みを用いた雑音のない通信モデル

レート歪み関数は

$$R'_{\text{fm}}(D|\mathbf{X}, \mathbf{d}) = \inf\{R \mid \text{情報源 } \mathbf{X} \text{ に対して雑音のもとで } (R, D) \text{ が } \mathbf{d}\text{-達成可能}\} \quad (56)$$

$$= \inf\{R \mid \text{情報源 } \widetilde{\mathbf{X}} \text{ に対して } (R, D) \text{ が } \Delta\text{-達成可能}\} \quad (57)$$

$$= R_{\text{fm}}(D|\widetilde{\mathbf{X}}, \Delta) \quad (58)$$

となる.

さらに, 確率的歪みを用いた雑音のない場合について, 次の定理が成り立つことが知られている.

定理 6 ([4]) 一般情報源 \mathbf{X} に対して確率的歪みを用いた雑音のない問題設定のとき固定長最大歪みのレート歪み関数は

$$R_{\text{fm}}(D|\mathbf{X}, \Delta) = \inf_{\mathbf{Y}: \bar{\Delta}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D} I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \quad (59)$$

で与えられる.

定理 5 と定理 6 から次の系が求められる.

系 3 雑音のある場合のレート歪み関数は

$$R'_{\text{fm}}(D|\mathbf{X}, \mathbf{d}) = \inf_{\widetilde{\mathbf{Y}}: \bar{\Delta}(\widetilde{\mathbf{X}}, \widetilde{\mathbf{Y}}) \leq D} \bar{I}(\widetilde{\mathbf{X}}; \widetilde{\mathbf{Y}}) \quad (60)$$

となる. \square

4.4 可変長最大歪み

本節では 4.3 節と同じ通信モデル, 最大歪みを用いて考える. 異なるのは, 固定長符号化ではなく可変長符号化を使うことである. しかし, 同じ論法で証明することができる. 前節では, まず達成可能性を定め, 最大歪みを評価する式 (39) に着目した. \mathbf{X} と \mathbf{Y} を歪み測度 \mathbf{d} で測った確率的上極限の値は $\widetilde{\mathbf{X}}$ と $\widetilde{\mathbf{Y}}$ を Δ で測った確率的上極限は等価になることを利用して証明した. 本節でも同様にその結果を用いて証明する. まず, 本節で扱う歪み制約した符号化定理を定式化する.

定義 18 雑音のもとでレート歪み領域の点 (R, D) が \mathbf{d} -達成可能とは

$$\text{p-lim sup}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} d_n(X^n, Y^n) \leq D \quad (61)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{1}{n} \text{len } \varphi_n(\widetilde{X}^n) \right] \leq R \quad (62)$$

となるような符号 (ψ_n, φ_n) が存在することである.

定義 19 レート歪み関数を

$$R'_{\text{vm}}(D|\mathbf{X}, \mathbf{d}) \triangleq \inf\{R \mid \text{情報源 } \mathbf{X} \text{ に対して雑音のもとで } (R, D) \text{ が } \mathbf{d}\text{-達成可能}\} \quad (63)$$

と定義する.

定理 7 雑音がある場合のレート歪み関数は,

$$R'_{\text{vm}}(D|\mathbf{X}, \mathbf{d}) = R_{\text{vm}}(D|\widetilde{\mathbf{X}}, \Delta) \quad (64)$$

となる.

[証明] 歪み d と確率的歪み Δ の分布が等しくなることを式 (53) で導出した. その結果を利用すると, 定義 21 の式 (61) は

$$\text{p-}\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \Delta_n(\widetilde{X}^n, \widetilde{Y}^n) \leq D \quad (65)$$

と書き直すことができる. すると, この問題は図 5 のことである. つまり, 2 か所の雑音の内側で達成可能かどうか判断することができるのでレート歪み関数は

$$R'_{\text{vm}}(D|\mathbf{X}, \Delta) = \inf\{R \mid \text{情報源 } \mathbf{X} \text{ に対して雑音のもとで } (R, D) \text{ が } \mathbf{d}\text{-達成可能}\} \quad (66)$$

$$= \inf\{R \mid \text{情報源 } \widetilde{\mathbf{X}} \text{ に対して } (R, D) \text{ が } \Delta\text{-達成可能}\} \quad (67)$$

$$= R_{\text{vm}}(D|\widetilde{\mathbf{X}}, \Delta) \quad (68)$$

となる. □

雑音のない通信モデルに帰着することがわかった. しかし, 帰着先のレート歪み理論は現在のところ未解決である.

5 確率的歪みと符号語長の分布

本章では確率的歪みに対して雑音のない可変長最大歪みについて解く. 具体的には, 良い符号が存在するための必要十分条件と歪みレート関数を導出する. 符号語長に対する制約として期待値を使わず, 確率変数としての符号語長 $\frac{1}{n} \text{len } \varphi_n(X^n)$ の分布を制約する. 本節で使用する通信モデルを図 6 に示す.

ここで, 2 つの確率変数列に対して次の二項関係を定義する.

定義 20 ([5]) 2 つの実数値確率変数列 $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える. 任意の $\gamma > 0$ に対して n が十分大きければすべての実数 ξ で

$$\Pr\{Z_n \leq \xi\} \geq \Pr\{V_n \leq \xi - \gamma\} - \gamma \quad (69)$$

が成り立つことを

$$Z_n \stackrel{d}{\lesssim} V_n \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad (70)$$

と表す。「as $n \rightarrow \infty$ 」は文脈から明らかなきは省略される。また、二項関係 $\stackrel{d}{\lesssim}$ が推移律を満たすことは容易にわかる。

次に、2つの系列 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n$ と $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}^n$ の間に確率的歪み $\Delta_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を導入する。これは条件付き分布関数

$$F_n(\xi|\mathbf{x}, \mathbf{y}) \triangleq \Pr \left\{ \frac{1}{n} \Delta_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \xi \right\} \quad (71)$$

によって定義される引数付き確率変数である。確率的歪みは $\Delta_n: \mathcal{X}^n \times \mathcal{Y}^n \rightarrow \mathbb{R}$ の通信路と同じ確率的構造をもっている。

情報源系列 X^n と復号語 $\psi_n(\varphi_n(X^n))$ の間の歪み

$$\frac{1}{n} \Delta_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) \quad (72)$$

を確率の上極限によって制約する（最大歪み制約）。

本節の主たる成果は次の定理である。

定理 8 任意の実数値確率変数列 $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ と実数 D を考える。このとき

$$\frac{1}{n} \text{len } \varphi_n(X^n) \stackrel{d}{\lesssim} R_n, \quad (73)$$

$$\text{p-lim sup}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \Delta_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) \leq D \quad (74)$$

なる符号列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在するための必要十分条件は

$$\frac{1}{n} \log \frac{P_{X^n|Y^n}(X^n|Y^n)}{P_{X^n}(X^n)} \stackrel{d}{\lesssim} R_n, \quad (75)$$

$$\text{p-lim sup}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \Delta_n(X^n, Y^n) \leq D \quad (76)$$

なる補助情報源 $\mathbf{Y} = \{Y^n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在することである。

以降でこの定理を順定理 (十分性) と逆定理 (必要性) に分けて証明する。

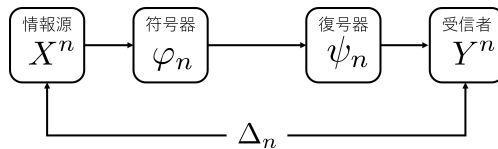


図 6 通信モデル

5.1 順定理

十分性（順定理）を示すために次の補題を使用する.

補題 1 ([5]) 与えられた $X^n, Y^n, \gamma_n > 0, \mathcal{S}_n(\mathbf{y}) \subset \mathcal{X}^n$ に対して

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} \text{len } \varphi_n(X^n) \leq \frac{\xi + \gamma_n}{1 - \gamma_n} + \frac{1}{n} \right\} + \lambda_n \geq \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{P_{X^n|Y^n}(X^n|Y^n)}{P_{X^n}(X^n)} \leq \xi \right\} \quad (77)$$

かつ

$$\Pr \{X^n \notin \mathcal{S}_n(\psi_n(\varphi_n(X^n)))\} \leq \lambda_n \quad (78)$$

なる符号 (φ_n, ψ_n) が存在する. ただし,

$$\lambda_n \triangleq \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{P_{X^n|Y^n}(X^n|Y^n)}{P_{X^n}(X^n)} \leq -\gamma_n \right\} + \Pr \{X^n \notin \mathcal{S}_n(Y^n)\} + \frac{e^{-n\gamma_n}}{e^{\gamma_n} - 1} \quad (79)$$

である.

次の形で順定理を示す.

定理 9（順定理）補助情報源 \mathbf{Y} に対して

$$\frac{1}{n} \text{len } \varphi(X^n) \stackrel{d}{\lesssim} \frac{1}{n} \log \frac{P_{X^n|Y^n}(X^n|Y^n)}{P_{X^n}(X^n)}, \quad (80)$$

$$\text{p-lim sup}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \Delta_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) \leq \text{p-lim sup}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \Delta_n(X^n, Y^n) \quad (81)$$

を満たす符号列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^\infty$ が存在する.

[証明] 最初に

$$D \triangleq \text{p-lim sup}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \Delta_n(X^n, Y^n) \quad (82)$$

とおく. すると確率的上極限の定義より, 任意の自然数 k に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} \Delta_n(X^n, Y^n) > D + \frac{1}{k} \right\} = 0 \quad (83)$$

となる．一方，確率的歪みの分布は

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} \Delta_n(X^n, Y^n) > \xi \right\} \quad (84)$$

$$= \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \Pr \left\{ \frac{1}{n} \Delta_n(X^n, Y^n) > \xi, X^n = \mathbf{x}, Y^n = \mathbf{y} \right\} \quad (85)$$

$$= \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \Pr \left\{ \frac{1}{n} \Delta_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > \xi, X^n = \mathbf{x}, Y^n = \mathbf{y} \right\} \quad (86)$$

$$= \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} P_{X^n Y^n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Pr \left\{ \frac{1}{n} \Delta_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > \xi \right\} \quad (87)$$

$$= \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} P_{X^n Y^n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \bar{F}_n(\xi | \mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (88)$$

$$= \mathbb{E}[\bar{F}_n(\xi | X^n, Y^n)] \quad (89)$$

と表される．ただし

$$\bar{F}_n(\xi | \mathbf{x}, \mathbf{y}) \triangleq 1 - F_n(\xi | \mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (90)$$

とおいた．したがって式 (83) は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\bar{F}_n(D + 1/k | X^n, Y^n)] = 0 \quad (91)$$

と書き換えられる．さらに，任意の $\delta > 0$ に対して

$$\mathbb{E}[\bar{F}_n(D + 1/k | X^n, Y^n)] = \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} P_{X^n Y^n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \bar{F}_n(D + 1/k | \mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (92)$$

$$\geq \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y}: \bar{F}_n(D + 1/k | \mathbf{x}, \mathbf{y}) > \delta} P_{X^n, Y^n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \bar{F}_n(D + 1/k | \mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (93)$$

$$\geq \delta \cdot \Pr\{\bar{F}_n(D + 1/k | X^n, Y^n) > \delta\} \quad (94)$$

すなわち

$$\Pr\{\bar{F}_n(D + 1/k | X^n, Y^n) > \delta\} \leq \frac{1}{\delta} \cdot \mathbb{E}[\bar{F}_n(D + 1/k | X^n, Y^n)] \rightarrow 0 \quad (95)$$

となる．したがって δ の代わりに $1/k$ を用いれば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\{\bar{F}_n(D + 1/k | X^n, Y^n) > 1/k\} = 0 \quad (96)$$

を得る．

それとは別に

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{P_{X^n | Y^n}(X^n | Y^n)}{P_{X^n}(X^n)} \leq -\frac{1}{k} \right\} = 0 \quad (97)$$

となることが知られている [1, (3.18)]. さらに

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\frac{n}{k}}}{e^{\frac{1}{k}} - 1} = 0 \quad (98)$$

となることは自明である. これらのことから, 十分大きなすべての n に対して

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{P_{X^n|Y^n}(X^n|Y^n)}{P_{X^n}(X^n)} \leq -\frac{1}{k} \right\} < \frac{1}{k} \quad (99)$$

$$\Pr \left\{ \bar{F}_n \left(D + \frac{1}{k} \middle| X^n, Y^n \right) > \frac{1}{k} \right\} < \frac{1}{k} \quad (100)$$

$$\frac{e^{-\frac{n}{k}}}{e^{\frac{1}{k}} - 1} < \frac{1}{k} \quad (101)$$

となる. 各 n に対してこれらが成り立つ最大の k を用いて $\gamma_n \triangleq \frac{1}{k}$ とおく (対角線論法). すると $\gamma_n \rightarrow 0$ かつ

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{P_{X^n|Y^n}(X^n|Y^n)}{P_{X^n}(X^n)} \leq -\gamma_n \right\} < \gamma_n \quad (102)$$

$$\Pr \left\{ \bar{F}_n(D + \gamma_n | X^n, Y^n) > \gamma_n \right\} < \gamma_n \quad (103)$$

$$\frac{e^{-n\gamma_n}}{e^{\gamma_n} - 1} < \gamma_n \quad (104)$$

となる.

ここで

$$\mathcal{S}_n(\mathbf{y}) \triangleq \{ \mathbf{x} \in \mathcal{X}^n : \bar{F}_n(D + \gamma_n | \mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \gamma_n \} \quad (105)$$

として補題 1 を使う. すると, ある $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} \text{len } \varphi_n(X^n) \leq \frac{\xi + \gamma_n}{1 - \gamma_n} + \frac{1}{n} \right\} + \lambda_n \geq \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{P_{X^n|Y^n}(X^n|Y^n)}{P_{X^n}(X^n)} \leq \xi \right\} \quad (106)$$

$$\Pr \{ X^n \notin \mathcal{S}_n(\psi_n(\varphi_n(X^n))) \} \leq \lambda_n \quad (107)$$

$$\lambda_n \triangleq \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{P_{X^n|Y^n}(X^n|Y^n)}{P_{X^n}(X^n)} \leq -\gamma_n \right\} + \Pr \{ X^n \notin \mathcal{S}_n(Y^n) \} + \frac{e^{-n\gamma_n}}{e^{\gamma_n} - 1} \quad (108)$$

を満たす.

式 (108) について, $\lambda_n \rightarrow 0$ を確認するが, 第 1 項と第 3 項は明らかである. 第 2 項については \mathcal{S}_n の定義より

$$\Pr \{ X^n \notin \mathcal{S}_n(Y^n) \} = \Pr \{ \bar{F}_n(D + \gamma_n | X^n, Y^n) > \gamma_n \} \rightarrow 0 \quad (109)$$

となることが確認できる.

さて、すると式 (106) は定義 1 より

$$\frac{1}{n} \text{len } \varphi_n(X^n) \stackrel{d}{\lesssim} \frac{1}{n} \log \frac{P_{X^n|Y^n}(X^n|Y^n)}{P_{X^n}(X^n)} \quad (110)$$

となる.

最後に確率的歪みの分布を評価する. 確率的歪みの分布に関して

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} \Delta_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) > D + \gamma_n \right\} \quad (111)$$

$$= \sum_{\mathbf{x}} P_{X^n}(\mathbf{x}) \Pr \left\{ \frac{1}{n} \Delta_n(\mathbf{x}, \psi_n(\varphi_n(\mathbf{x}))) > D + \gamma_n | X^n = \mathbf{x} \right\} \quad (112)$$

$$= \sum_{\mathbf{x}} P_{X^n}(\mathbf{x}) \bar{F}_n(D + \gamma_n | \mathbf{x}, \psi_n(\varphi_n(\mathbf{x}))) \quad (113)$$

が成り立つが, \mathbf{x} に関する和の範囲を

$$\bar{\mathcal{X}}^n \triangleq \{ \mathbf{x} : \bar{F}_n(D + \gamma_n | \mathbf{x}, \psi_n(\varphi_n(\mathbf{x}))) \leq \gamma_n \} \quad (114)$$

か否かで分割すると, $\bar{F}_n \leq 1$ に注意すれば

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} \Delta_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) > D + \gamma_n \right\} \quad (115)$$

$$\leq \gamma_n \cdot \Pr\{X^n \in \bar{\mathcal{X}}^n\} + \Pr\{X^n \notin \bar{\mathcal{X}}^n\} \quad (116)$$

$$\leq \gamma_n + \Pr\{\bar{F}_n(D + \gamma_n | X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) > \gamma_n\} \quad (117)$$

$$= \gamma_n + \Pr\{X^n \notin \mathcal{S}_n(\psi_n(\varphi_n(X^n)))\} \quad (118)$$

$$\leq \gamma_n + \lambda_n \rightarrow 0 \quad (119)$$

を得る. これは

$$\text{p-lim sup}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \Delta_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) \leq D \quad (120)$$

を意味する. \square

5.2 逆定理

必要性 (逆定理) を証明するために次の補題を用意する.

補題 2 ([5]) 任意の符号 (φ_n, ψ_n) と $\gamma > 0$ に対して $Y^n \triangleq \psi_n(\varphi_n(X^n))$ とおけば

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} \text{len } \varphi_n(X^n) \leq \frac{1}{n} \log \frac{P_{X^n|Y^n}(X^n|Y^n)}{P_{X^n}(X^n)} - \gamma \right\} \leq e^{-n\gamma} \quad (121)$$

が成り立つ.

逆定理は補題 2 から直ちに出る.

定理 10 (逆定理) 任意の符号列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ に対してある補助情報源 \mathbf{Y} が存在して

$$\frac{1}{n} \log \frac{P_{X^n|Y^n}(X^n|Y^n)}{P_{X^n}(X^n)} \stackrel{d}{\lesssim} \frac{1}{n} \text{len } \varphi(X^n), \quad (122)$$

$$\text{p-lim sup}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \Delta_n(X^n, Y^n) \leq \text{p-lim sup}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \Delta_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) \quad (123)$$

を満たす.

[証明] $Y^n \triangleq \psi_n(\varphi_n(X^n))$ とおく. 任意の $\gamma > 0$ に対して

$$\mathcal{T}_n \triangleq \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{X}^n : \frac{1}{n} \text{len } \varphi_n(\mathbf{x}) > \frac{1}{n} \log \frac{P_{X^n|Y^n}(\mathbf{x}|\psi_n(\varphi_n(\mathbf{x})))}{P_{X^n}(\mathbf{x})} - \gamma \right\} \quad (124)$$

とおくと,

$$\Pr \left\{ \frac{1}{n} \text{len } \varphi(X^n) \leq \xi \right\} \quad (125)$$

$$= \Pr \left\{ \frac{1}{n} \text{len } \varphi(X^n) \leq \xi, X^n \in \mathcal{T}_n \right\} + \Pr \left\{ \frac{1}{n} \text{len } \varphi(X^n) \leq \xi, X^n \notin \mathcal{T}_n \right\} \quad (126)$$

$$\leq \Pr \left\{ \frac{1}{n} \log \frac{P_{X^n|Y^n}(X^n|Y^n)}{P_{X^n}(X^n)} \leq \xi + \gamma \right\} + e^{-n\gamma} \quad (127)$$

となる. これは (122) を意味する. (123) は自明である. \square

5.3 符号化定理

定理 9 と定理 10 を統合し, 定理 1 を導く. 符号語長を $\stackrel{d}{\lesssim}$ によって制約するために任意の実数値確率変数列 $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える. 定理 9 は次のように言い換えられる.

定理 9' ある補助情報源 \mathbf{Y} が存在して

$$\frac{1}{n} \log \frac{P_{X^n|Y^n}(X^n|Y^n)}{P_{X^n}(X^n)} \stackrel{d}{\lesssim} R_n, \quad (128)$$

$$\text{p-lim sup}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \Delta_n(X^n, Y^n) \leq D \quad (129)$$

を満たすならば

$$\frac{1}{n} \text{len } \varphi_n(X^n) \stackrel{d}{\lesssim} R_n, \quad (130)$$

$$\text{p-lim sup}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \Delta_n(X^n, \psi_n(\varphi_n(X^n))) \leq D \quad (131)$$

となるような符号列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する.

また、定理 10 は次のように言い換えられる。

定理 10' 符号列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が (130), (131) を満たすならば, (128), (129) なる補助情報源 \mathbf{Y} が存在する。

[定理 1 の証明] 定理 9' と定理 10' から直ちに導かれる。□

最後に、歪みレート関数を導出する。標準的な定式化にならって次のように達成可能性と歪みレート関数を定義する。

定義 2 確率変数列 $\mathbf{R} = \{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ と実数 D に対してレート歪みの組 (\mathbf{R}, D) が達成可能とは, (130), (131) となるような符号列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在することである。与えられた \mathbf{R} に対して (\mathbf{R}, D) が達成可能となるような歪み D の下限を $D(\mathbf{R})$ と表し、歪みレート関数と呼ぶ。

このとき次の定理が成り立つ。

定理 4

$$D(\mathbf{R}) = \inf_{\mathbf{Y}: \frac{1}{n} \log \frac{P_{X^n | Y^n}(X^n | Y^n)}{P_{X^n}(X^n)} \stackrel{d}{\lesssim} R_n} \text{p-lim sup}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \Delta_n(X^n, Y^n) \quad (132)$$

[証明] (132) の右辺を D^* とおく。任意の $D > D^*$ と考える。このとき (128) なる \mathbf{Y} が存在して (129) を満たす。定理 2' よりこの \mathbf{Y} に対して (130), (131) なる符号列が存在する。すなわち、任意の $D > D^*$ に対して (\mathbf{R}, D) は達成可能であり、よって

$$D(\mathbf{R}) \leq D^* \quad (133)$$

である。

次に、 (\mathbf{R}, D) が達成可能であるような D を考える。すると (130), (131) なる符号列が存在する。定理 10' よりある \mathbf{Y} が存在して (128), (129) を満たす。したがって (\mathbf{R}, D) が達成可能ならば $D \geq D^*$ となり

$$D(\mathbf{R}) \geq D^* \quad (134)$$

を得る。□

6 まとめ

Berger は定常無記憶情報源における 2 か所に雑音が入る問題設定についてレート歪み理論を考察した。本研究では一般情報源に拡張して 4 通りすべてについて考察した。固定長平均歪み、可変長平均歪みは雑音のない問題に帰着することができ、レート歪み関数も導くことができた。固定長最大歪み、可変長最大歪みも雑音のない問題に帰着することができた。これらは平均歪みを用いた 2 通りのレート歪み問題と異なり、確率的歪みを使用した通信モデルに帰着

した。さらに、固定長最大歪みはレート歪み関数まで求めることができた。ところが、可変長最大歪みは帰着先は分かったが帰着先の符号化定理が未解決であるためレート歪み関数を求めることができなかった。そこで、確率的歪みに対して最大歪み制約をし、かつ分布を制約する可変長符号化定理を求めた。これは可変長最大歪みを適用した2か所に雑音が入る通信モデルの帰着先としては直接的には関係しない。分布を制約したが帰着先として求めていたのは平均符号語長である。その関係性を明らかにすることが今後の課題となる。

謝辞

本研究を行うにあたり、丁寧なご指導を賜りました指導教員の西新幹彦准教授に感謝の意を表す。

参考文献

- [1] 韓 太舜, 情報理論における情報スペクトル的方法, 培風館, 1998.
- [2] T.Berger, Rate Distortion Theory, Prentice-Hall, 1971.
- [3] 金子歩夢, 西新幹彦, 「雑音を含んで観測される一般情報源に対するレート歪み理論について」, 第45回情報理論とその応用シンポジウム (SITA2022) 予稿集, pp.437–441, Dec. 2022.
- [4] M.Nishiara, Y.Ito, “Proof of achievability part of rate-distortion theorem without random coding,” IEICE Trans. Fundamentals, Vol.E107-A, No.3, Mar. 2024.
- [5] 西新幹彦, 「情報スペクトル指向の情報源可変長符号化定理について」, 第45回情報理論とその応用シンポジウム (SITA2022) 予稿集, pp.442–447, Dec. 2022.